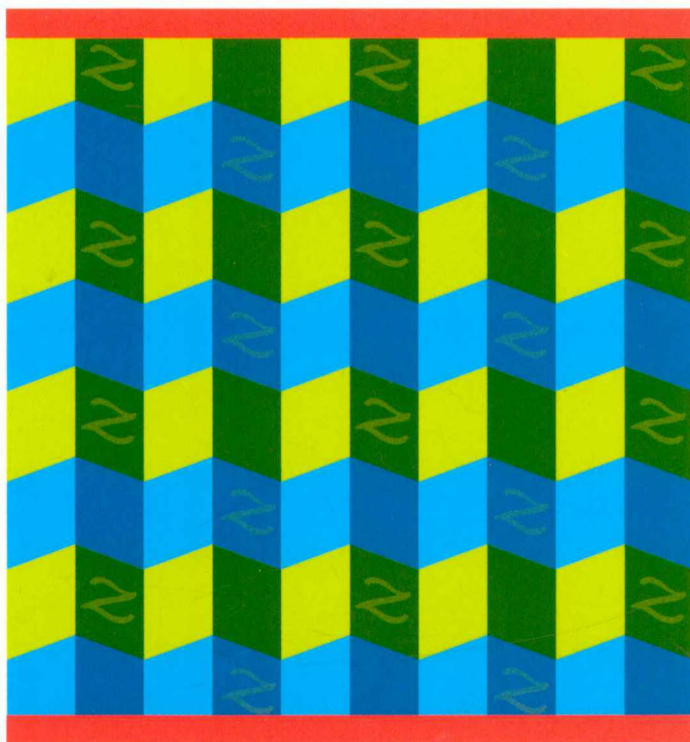


M A N U A L S

Matemàtiques



Joaquim Bruna
Julià Cufí

Anàlisi complexa



Universitat Autònoma de Barcelona

Servei de Publicacions

ANÀLISI COMPLEXA

Joaquim Bruna
Julià Cufí

ANÀLISI COMPLEXA

Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Publicacions
Bellaterra, 2008

**DADES CATALOGRÀFIQUES RECOMANADES PEL SERVEI DE BIBLIOTEQUES
DE LA UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA**

Anàlisi complexa / Joaquim Bruna i Julià Cufí. — Bellaterra : Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de Publicacions, 2025. — (Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona ; 49)

ISBN 978-84-10202-62-7

I. Bruna, Joaquim

II. Cufí, Julià

III. Col·lecció

1. Funcions de variables complexes

2. Funcions harmòniques

517.55

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració
de la Generalitat de Catalunya

Il·lustració de la coberta:
Pep Sansó

Primera edició a paper: 2008
Primera edició digital: 2025

Edició i impressió:
Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Publicacions
08193 Bellaterra (Barcelona)
Tel.: 93 581 10 22.
sp@uab.cat
<http://publicacions.uab.cat>

ISBN 978-84-10202-62-7



Aquest llibre està publicat amb una llicència Creative Commons CC-BY-NC-ND.
El titular de l'obra autoritza a utilitzar els continguts sempre que es reconegui
l'autoria. No es permet fer un ús comercial, ni la generació d'obres derivades.

Índex

Introducció	xiii
1 Aritmètica i topologia del pla complex	
1.1 Aritmètica dels nombres complexos	1
1.2 Geometria analítica amb terminologia complexa	9
1.3 Nocions topològiques. El pla compactificat	13
1.4 Corbes, camins, element de longitud	17
1.5 Determinacions de l'argument. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt	23
1.6 Dominis amb vora regular	30
1.7 Exercicis	38
2 Funcions de variable complexa	
2.1 Polinomis de variables reals, polinomis de variable complexa, funcions racionals	44
2.2 La funció exponencial de variable complexa, logaritmes i potències. Funcions trigonomètriques	46
2.3 Sèries de potències	52
2.4 Derivació de funcions de variable complexa	66
2.5 Funcions analítiques de variable complexa	77

2.6	Funcions analítiques de variable real i la seva extensió complexa	85
2.7	Exercicis	90
3	Funcions holomorfes i formes diferencials	
3.1	Integrals de línia complexes	96
3.2	Integrals de línia, camps vectorials i 1-formes diferencials	99
3.3	El teorema fonamental del càlcul complex	105
3.4	La fórmula de Green	110
3.5	El teorema de Cauchy i aplicacions	118
3.6	Els teoremes clàssics	123
3.7	Funcions holomorfes com a camps vectorials i funcions harmòniques	137
3.8	Exercicis	145
4	Propietats locals de les funcions holomorfes	
4.1	La fórmula integral de Cauchy	149
4.2	Funcions analítiques i funcions holomorfes	154
4.3	Analicitat de les funcions harmòniques. Sèries de Fourier	159
4.4	Zeros de funcions analítiques	162
4.5	Estudi local d'una funció holomorfa. Teorema de l'aplicació oberta	168
4.6	Principi del màxim. Desigualtats de Cauchy. Teorema de Liouville	171
4.7	Exercicis	175
5	Singularitats aïllades de les funcions holomorfes	
5.1	Punts singulars aïllats	179
5.2	Desenvolupament en sèrie de Laurent	184
5.3	Residu d'una funció en una singularitat aïllada	190
5.4	Funcions harmòniques en una corona	195
5.5	Funcions holomorfes i funcions singulars a l'infinit	197
5.6	El principi de l'argument	200

5.7	Dependència del conjunt de solucions d'una equació respecte de paràmetres	205
5.8	Càlcul d'integrals reals	208
5.9	Exercicis	223

6 Homologia i funcions holomorfes

6.1	Homologia de cadenes i dominis simplement connexos . .	227
6.2	Versions homològiques de la fórmula de Green i del teorema de Cauchy	231
6.3	El teorema dels residus i el principi de l'argument en versió homològica	239
6.4	El teorema de Cauchy per a formes diferencials localment exactes	242
6.5	Caracteritzacions dels dominis simplement connexos . . .	244
6.6	El primer grup d'homologia d'un domini i el teorema de de Rham. Homotopia	247
6.7	Funcions harmòniques a dominis n -connexos	252
6.8	Exercicis	255

7 Funcions harmòniques

7.1	Problemes de la física clàssica i funcions harmòniques . .	260
7.2	Funcions harmòniques a dominis de $\mathbb{R}^n$	268
7.3	Potencials newtonians i logarítmics. Fórmules de descomposició de Riesz	277
7.4	Principi del màxim. Problemes homogenis de Dirichlet i de Neumann	287
7.5	La funció de Green. El nucli de Poisson	290
7.6	Dominis plans: mètodes específics de variable complexa. Els problemes de Dirichlet i de Neumann al disc unitat .	294
7.7	L'equació de Poisson a $\mathbb{R}^n$	305
7.8	L'equació de Poisson i els problemes de Dirichlet i de Neumann no homogenis en un domini de $\mathbb{R}^n$	322
7.9	La solució del problema de Dirichlet i del problema de Neumann a la bola	330

7.10	Descomposició de camps	335
7.11	Problema de Dirichlet i transformacions conformes	342
7.12	El principi de Dirichlet	346
7.13	Exercicis	349
8	Representació conforme	
8.1	Aplicacions conformes	355
8.2	Representacions conformes	358
8.3	Transformacions homogràfiques	366
8.4	Automorfismes de dominis simplement connexos	374
8.5	El problema de Dirichlet i el problema de Neumann al semplà	379
8.6	Corbes de nivell	381
8.7	Transformacions conformes elementals	385
8.8	Representació conforme de polígons	393
8.9	Representació conforme de dominis doblement connexos	402
8.10	Aplicacions de la representació conforme	405
8.11	Exercicis	415
9	El teorema de Riemann i el problema de Dirichlet	
9.1	Successions de funcions holomorfes o harmòniques	419
9.2	El teorema de Riemann	436
9.3	Funció de Green i representació conforme	438
9.4	Solució del problema de Dirichlet en un domini qualsevol	443
9.5	Exercicis	453
10	El teorema de Runge i les equacions de Cauchy-Riemann	
10.1	Els teoremes d'aproximació de Runge	458
10.2	Aproximació de funcions harmòniques	466
10.3	Descomposició de funcions meromorfes en elements simples	468
10.4	Les equacions de Cauchy-Riemann no homogènies al pla. Integrals de Cauchy	480

10.5	Les equacions de Cauchy-Riemann no homogènies en un obert. Nuclis amb pesos	486
10.6	El problema de Dirichlet per a l'operador $\bar{\partial}$	496
10.7	Exercicis	502
11	Zeros de funcions holomorfes	
11.1	Productes infinits de números i de funcions	508
11.2	El teorema de factorització de Weierstrass	514
11.3	Interpolació per funcions enteres	522
11.4	Zeros de funcions holomorfes i l'equació de Poisson	527
11.5	La fórmula de Jensen	530
11.6	Creixement d'una funció holomorfa i distribució dels zeros. La condició de Blaschke	534
11.7	Funcions enteres d'ordre finit	538
11.8	Ideals de l'àlgebra de les funcions holomorfes	545
11.9	Exercicis	552
12	La transformació de Fourier complexa	
12.1	L'extensió complexa de la transformada de Fourier. Primer teorema de Paley-Wiener	558
12.2	La fórmula de Poisson	562
12.3	Les funcions de banda limitada. Segon teorema de Paley-Wiener	566
12.4	La transformada de Laplace	576
12.5	Aplicacions de la transformada de Laplace	589
12.6	Sèries de Dirichlet	600
12.7	La Z-transformada	602
12.8	Exercicis	607
	Bibliografia	613
	Índex de notacions	615
	Índex alfabètic	617

Introducció

El propòsit que teníem en començar a escriure aquest llibre era de fer un manual que cobrís el contingut d'un curs bàsic d'anàlisi complexa, com els que s'expliquen a les nostres universitats. El resultat, però, ha estat un text més extens que conté temes que no caben en un curs semestral i que corresponen més aviat a un curs d'ampliació i també algun material que no és freqüent de trobar en la bibliografia de variable complexa. Per aquest motiu esperem que el llibre que presentem sigui un bon complement per a moltes de les referències que fan servir habitualment tant els estudiants com els professors.

Si hem escrit aquest llibre és perquè preteníem aportar alguna novetat, no només en la presentació sinó també en el contingut, en la llista, llarguíssima, de llibres de variable complexa que van apareixent periòdicament. El punt de partida ha estat enquadrar l'anàlisi complexa dins el marc general de l'anàlisi. Tot i que és possible presentar –i així ho fan molts textos– la variable complexa d'una manera aïllada i específica, nosaltres hem optat per buscar el màxim de punts de contacte amb altres parts de l'anàlisi. El punt de vista que hem pres ha tingut com a conseqüència la inclusió d'alguns apartats que no són habituals en altres textos i una formulació nova d'alguns resultats clàssics. En destaquem uns quants tot seguit.

En el capítol 3 es dona la versió real dels teoremes de Cauchy i de Cauchy-Goursat. El resultat és una versió de la fórmula de Green amb hipòtesis de regularitat molt febles, les quals serveixen també per als teoremes clàssics del càlcul vectorial.

En el mateix capítol 3, la presentació del teorema de Cauchy en el context de l'anàlisi vectorial permet formular una aproximació al concepte d'holomorfia des d'una perspectiva de variable real en termes dels camps que són simultàniament conservatius i solenoïdals. El concepte de funció harmònica apareix aleshores d'una manera molt natural.

En el capítol 6 es demostra una versió homològica de la fórmula de Green que es pot interpretar com una fórmula de Green amb multiplicitats. Amb l'ajuda d'aquesta fórmula i d'un procés de regularització, que és estàndard en variable real, es contesta afirmativament la pregunta de L.V. Ahlfors sobre la possibilitat de modificar la demostració del teorema de Cauchy per tal que cobreixi també el cas de qualsevol forma diferencial localment exacta.

En el capítol 7 s'estudien de manera sistemàtica les funcions harmòniques i l'operador de Laplace en un context de variable real a $\mathbb{R}^n$ i es destaca l'especificitat del cas de dimensió 2 i la relació amb les funcions holomorfes. L'estudi inclou, amb detall, les propietats del potencial de Riesz d'una mesura i la seva importància en la solució de l'equació de Poisson i dels problemes de Dirichlet i de Neumann no homogenis.

En el capítol 9 s'analitza la relació que hi ha entre la funció de Green i la representació conforme, la qual permet demostrar el teorema de Riemann a partir de la solució del problema de Dirichlet, tot i que també es dona la demostració basada en les propietats de les famílies normals. L'existència de solució per al problema de Dirichlet es prova amb el mètode de Perron, el qual és generalitzable a qualsevol dimensió.

De la mateixa manera que s'ha tractat l'equació de Poisson o equació inhomogènia per al laplacà, en el capítol 10 es consideren les equacions inhomogènies de Cauchy-Riemann. La solució, en el cas general, s'obté fent servir el teorema d'aproximació de Runge i permet estudiar el problema de Dirichlet per a l'operador $\bar{\partial}$.

El capítol 11 està dedicat a l'estudi dels conjunts de zeros de les funcions holomorfes i es posa de manifest la relació que hi ha entre aquesta qüestió i l'equació de Poisson, a la qual ja ens hem referit. Aquesta relació permet analitzar la distribució dels zeros d'una funció holomorfa en termes del seu creixement.

Finalment, el lligam entre la variable real i la variable complexa apareix també en el capítol 12 amb la transformada de Fourier complexa o transformada de Laplace. Es dona una demostració del teorema de Shannon-Whittaker, molt conegut en teoria de la informació, fent servir els mètodes que s'han utilitzat en el capítol 10 per a la descomposició de funcions meromorfe en elements simples.

Per a la lectura d'aquest text és suficient tenir un bon coneixement de la topologia del pla i del càlcul diferencial per a funcions de diverses variables reals. A partir d'aquí, el llibre és autocontingut i donem demostracions rigoroses de tots els enuncisats sense evitar algunes qüestions que de vegades es tracten una mica superficialment. En aquest sentit volem destacar l'estudi, en el capítol 1,

dels dominis del pla amb vora regular incloent-hi el tractament de l'orientació de la frontera. Aquest estudi ens ha permès formular de manera precisa la versió dels teoremes clàssics de l'anàlisi complexa per a dominis amb vora regular orientada, versió que és la que més s'utilitza a l'hora de les aplicacions. Tot i això, en el capítol 6 donem també la versió homològica dels teoremes fonamentals, en la línia iniciada per Ahlfors, que és més general i que es pot relacionar d'una manera més flexible amb la topologia dels dominis plans.

L'extensió del text permet que se'n puguin fer diverses lectures o seguir itineraris de diversos nivells. Per exemple, es pot seguir un curs bàsic de variable complexa amb els capítols 1 i 2, el capítol 3 fins a la secció 3.5 inclosa i els capítols 4, 5 i 8, aquest darrer sense les seccions 8.8 i 8.9, si es vol.

Una altra possibilitat és fer servir, totalment o parcialment, el contingut dels capítols 9, 10, 11 i 12 per a un curs d'ampliació de variable complexa.

Atès el plantejament inicial de buscar la màxima interconnexió amb altres parts de l'anàlisi, hem posat molt d'èmfasi en el paper que fan les funcions harmòniques i en l'estudi dels problemes que s'hi relacionen. Hi hem dedicat el capítol 7, que és el capítol més llarg del llibre i que es pot utilitzar com una introducció a la teoria del potencial. Aquest capítol es pot llegir de forma independent coneixent només el contingut del capítol 3; en tot cas, les seccions 7.7 fins a la 7.12 poden requerir un nivell de maduresa matemàtica una mica superior a la dels capítols precedents.

Cada capítol està distribuït en seccions, i cada secció, en apartats. Tots els enunciats (teoremes, proposicions, lemes i corol·laris), així com els exemples, estan numerats d'una manera contínua dins de cada capítol; només queden al marge d'aquesta numeració les observacions. L'última secció de cada capítol conté enunciats d'exercicis proposats.

No cal dir que en la preparació d'aquest llibre ens hem beneficiat de la feina i de l'experiència d'autors anteriors. Volem manifestar el nostre deute amb Ahlfors [1], Burckel [3], Gamelin [7] i Saks-Zygmund [11]. Estem molt agraïts també a Juan José Donaire per la seva lectura de l'original, a Lluís Bruna i Miquel Dalmau, que n'han fet lectures parcials i a Mark Melnikov que ens ha proporcionat alguns dels exercicis proposats. Tots ells ens han fet suggeriments molt valuosos.

Finalment, el llibre no existiria sense la feina tipogràfica excel·lent de Raquel Hernández, Maria Julià i Rosa Rodríguez. A totes elles els en donem les gràcies.

Bellaterra, juny del 2008

Joaquim Bruna i Julià Cufí

Capítol 1

Aritmètica i topologia del pla complex

En aquest capítol s'estudien les propietats del pla complex, tant pel que fa a la seva estructura de cos com a les seves propietats topològiques. Tot i que la majoria d'aquestes ja són conegudes pels estudiants d'Anàlisi complexa, es fa un repàs de l'aritmètica dels complexos i de la topologia del pla complex, posant èmfasi en l'estudi dels dominis plans amb frontera regular. També es posa de manifest la utilitat de la notació complexa a l'hora de considerar algunes qüestions de geometria analítica, com ara les aplicacions ortogonals, que seran útils més endavant. S'estudien detalladament les determinacions de l'argument i la noció d'índex d'una corba plana, qüestions que, tot i ser de caràcter essencialment topològic, tenen una gran transcendència de cara a entendre el comportament de les funcions holomorfes, que és l'objectiu dels capítols següents.

1.1 Aritmètica dels números complexos

1.1.1 Operacions aritmètiques, mòdul i argument

El cos dels números complexos $\mathbb{C}$ és el resultat d'adjuntar al cos dels números reals $\mathbb{R}$ una unitat imaginària i tal que $i^2 = -1$. L'expressió general d'un número complex és, doncs, $z = x + iy$ amb $x, y \in \mathbb{R}$; x s'anomena *part real* de z , $x = \operatorname{Re} z$, i y la *part imaginària* de z , $y = \operatorname{Im} z$. Si associem a z el punt del pla de coordenades (x, y) , respecte d'un sistema de referència fixat, $\mathbb{C}$ s'identifica

amb $\mathbb{R}^2$ i parlem del *pla complex d'Argand-Gauss*. El número $\bar{z} = x - iy$ s'anomena *conjugat* de z ; l'aplicació $z \rightarrow \bar{z}$ és la reflexió respecte de l'eix de les abscisses. Hom té aleshores les relacions

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

La *suma* dels números complexos $z = a + ib$, $w = c + id$, que és $z + w = (a + c) + i(b + d)$, es visualitza amb la *regla del paral·lelogram* de la suma de vectors, identificant z amb el vector que té l'origen en l'origen de coordenades i l'extrem en z , i anàlogament per a w (fig. 1.1).

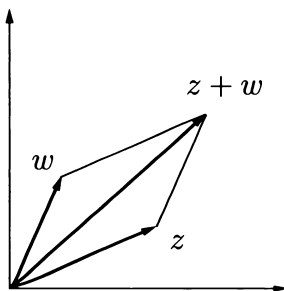


Figura 1.1

Per a visualitzar geomètricament el *producte*

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

és necessari parlar primer de la *forma polar* dels números complexos i per a això cal introduir el *mòdul* i l'*argument* d'un número complex.

El *mòdul* de $z = x + iy$ és la distància a l'origen del punt (x, y) , $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Hom té la desigualtat triangular

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|,$$

que implica

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w|,$$

i també valen les igualtats

$$|zw| = |z||w|,$$

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|,$$

per a $z, w, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Amb les operacions de suma i producte que s'han introduït, el pla complex $\mathbb{C}$ és un cos commutatiu en el qual l'invers d'un número $z \neq 0$ és $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Recordem que, per definició, 2π és la longitud d'un cercle de radi 1 (i, per tant, un cercle de radi r té longitud $2\pi r$). La definició geomètrica de les funcions trigonomètriques sinus i cosinus es fa aleshores de la manera següent: si recorrem el cercle de centre 0 i radi 1 en el sentit contrari al de les agulles del rellotge una longitud $t \geq 0$ a partir del punt 1, arribem a un punt que anomenem 1_t ; per definició, les parts real i imaginària d'aquest punt són, respectivament, $\cos t$ i $\sin t$; per a $t < 0$ fem el mateix però en sentit contrari (fig. 1.2).

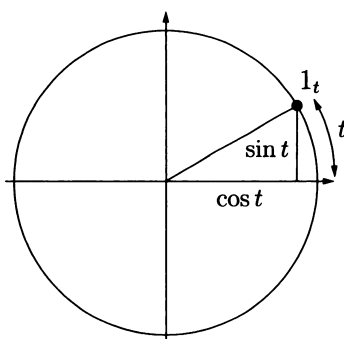


Figura 1.2

Així, $1_t = \cos t + i \sin t$, i la definició de π que hem donat equival a definir $\frac{\pi}{2}$ com el primer zero positiu de la funció cosinus. Les funcions sinus i cosinus són 2π periòdiques i, a més, cosinus és parella i sinus és senar. A partir de les definicions anteriors es demostren totes les propietats d'aquestes funcions que ens són familiars. En particular, es tracta de funcions indefinidament derivables de la variable real t , que compleixen $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$. Les fórmules d'addició

$$\begin{aligned}\cos(t+s) &= \cos t \cos s - \sin t \sin s, \\ \sin(t+s) &= \sin t \cos s + \cos t \sin s\end{aligned}\tag{1.1}$$

també es poden justificar geomètricament. La figura 1.3 és una prova de la segona fórmula de (1.1). La igualtat

$$1_t 1_s = 1_{t+s},$$

que és conseqüència de les fórmules anteriors, ens diu que l'aplicació

$$t \longrightarrow 1_t$$

Definició 1.2. Anomenem *argument* de $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ i representem per $\arg z$ qualsevol número $\phi \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{z}{|z|} = 1_\phi$.

De vegades s'utilitza també la notació $\arg z$ per a designar el conjunt de tots els arguments de z . Notem que si ϕ és un argument de z , aleshores $\arg z = \{\phi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. Formalment, $\arg z$ és, per tant, una classe d'equivalència de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; informalment, diem que $\arg z$ està determinat llevat d'un múltiple enter de 2π . Amb aquestes notacions i d'acord amb (1.1) es compleix

$$\arg zw = \arg z + \arg w, \quad \arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Per definició, l'angle entre z i w amb $z, w \neq 0$ o angle que va de z a w és $\arg w - \arg z = \arg w\bar{z} = \arg \frac{w}{z}$. Es tracta d'angles orientats; així, l'angle que va de w a z , $\arg z - \arg w$, és l'oposat de l'angle entre z i w .

Definició 1.3. Entre tots els arguments de $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, l'únic que pertany a l'interval $(-\pi, \pi]$ s'anomena *argument principal* de z i es designa per $\text{Arg } z$.

Si $z = x + iy$ amb $x > 0$, és $\text{Arg } z = \arctan \frac{y}{x}$ (recordem que la funció $\arctan x$ és la funció inversa de la funció $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i és contínua i bijectiva de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\mathbb{R}$). En els altres quadrants l'argument principal no és $\arctan \frac{y}{x}$. Si $z = iy$, $y > 0$, és $\text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$; en el segon quadrant, $z = x + iy$ amb $x < 0$, $y > 0$, és $\text{Arg } z = \arctan \frac{y}{x} + \pi$; si $z = x < 0$, $\text{Arg } z = \pi$; en el tercer quadrant, $z = x + iy$, $x, y < 0$, és $\text{Arg } z = \arctan \frac{y}{x} - \pi$ i finalment, si $z = iy$, $y < 0$, és $\text{Arg } z = -\frac{\pi}{2}$.

L'expressió $z = |z|1_\phi$, en termes del mòdul i un argument, s'anomena *forma polar* de z , i també s'utilitza la notació $z = r_\phi$, on $r = |z|$. Més endavant introduïrem la notació basada en la funció exponencial. L'operació de multiplicar per z es visualitza ara fàcilment com una transformació en el pla complex: multiplicar pel número positiu $|z|$ és una dilatació, i multiplicar per 1_ϕ consisteix en un gir d'angle ϕ .

1.1.2 Arrels n -èsimes i potències

Una propietat important de $\mathbb{C}$ és la de ser un cos *algebraicament tancat*. Això significa que tot polinomi P amb coeficients complexos de grau n té exactament n arrels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, i P factoritza en la forma

$$P(z) = A(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n),$$

on A és una constant. Aquest resultat s'anomena també *teorema fonamental de l'àlgebra*; en veurem una prova més endavant. En particular, tot número

complex $z \neq 0$ té n arrels n -èsimes diferents. Aquest fet es pot provar directament tenint en compte que si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, les seves arrels n -èsimes són les solucions de l'equació $w^n = z$. Posant $z = |z|1_\phi$ i $w = |w|1_\alpha$, l'equació anterior equival a

$$|w|^n 1_{n\alpha} = |z| 1_\phi$$

la qual imposa $|w|^n = |z|$ i $n\alpha = \phi + 2k\pi$, k enter. Ara es comprova de seguida que les solucions

$$w_k = |z|^{1/n} 1_{\phi/n + \frac{2\pi}{n}k} \text{ per a } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

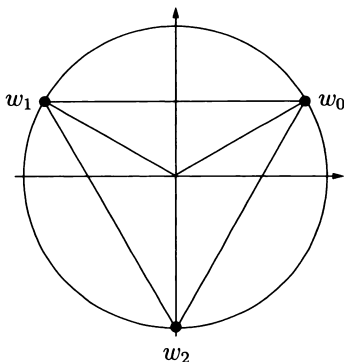
són totes diferents i que qualsevol altra solució és una d'aquestes. Indicarem per $z^{\frac{1}{n}}$ qualsevol de les arrels n -èsimes de z . Observem que les arrels n -èsimes d'un número complex corresponen a punts situats en els vèrtexs d'un polígon regular de n costats.

Exemple 1.4. Si calculem les arrels cúbiques de i , trobem

$$i = 1_{\frac{\pi}{2}}, \quad w_k = 1_{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k}, \quad k = 0, 1, 2,$$

que corresponen als punts de la figura 1.4

□



$$w_0 = \sqrt{3}/2 + i/2,$$

$$w_1 = -\sqrt{3}/2 + i/2,$$

$$w_2 = -i.$$

Figura 1.4

Les n arrels d'1 s'anomenen *arrels n -èsimes de la unitat* i formen un grup multiplicatiu d'ordre n . El número $w = 1_{2\pi/n}$ s'anomena *arrel n -èsima primitiva*, de manera que les n arrels n -èsimes de la unitat són $1 = w^0, w, w^2, \dots, w^{n-1}$. Si x és un número real positiu, la seva arrel quadrada positiva es designa per $\sqrt{x}$; tot seguit ampliem el significat d'aquesta notació. De les dues arrels quadrades de $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, la notació $\sqrt{z}$ designarà aquella que o bé té part real

positiva, o bé està en el semieix imaginari positiu; en notació polar,

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} 1_{\text{Arg } z/2}.$$

La funció $\sqrt{z}$ s'anomena *determinació principal de l'arrel quadrada*. De manera anàloga, la notació $\sqrt[n]{z}$ es reserva per a la determinació de l'arrel n -èsima que està en el sector $-\frac{\pi}{n} < \text{Arg } w \leq \frac{\pi}{n}$.

Exemple 1.5. Per a un polinomi de grau dos, $P(z) = Az^2 + Bz + C$, $A \neq 0$, l'equació $P(z) = 0$ s'escriu, completant quadrats, de la forma $(z + \frac{B}{2A})^2 = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$ i arribem a la fórmula

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

per a les dues solucions de $P(z) = 0$, amb A, B, C complexos qualssevol. $\square$

Les potències de base complexa i exponent enter tenen una definició unívoca,

$$z^n = zz \cdots z,$$

$$z^{-n} = z^{-1} z^{-1} \cdots z^{-1}.$$

Però si l'exponent q és racional i $q = \frac{n}{m}$, z^q es defineix com $z^q = (z^{\frac{1}{m}})^n$. Això coincideix amb $(z^n)^{1/m}$ i és independent de l'expressió de q . Si $z = r 1_\phi$ és l'expressió polar de z i $q = \frac{n}{m}$ és l'expressió irreductible de q , z^q és el conjunt format pels m números (diferents)

$$\sqrt[n]{|z|} 1_{\frac{n}{m}\phi + k\frac{2\pi n}{m}}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Si $\frac{n}{m}$ és l'expressió irreductible de q i $z \neq 0$, hi ha, doncs, m valors diferents de z^q . Si w és un d'aquests valors, $w^{\frac{m}{n}}$ és un conjunt de n números un dels quals és z ; per tant, s'ha d'anar amb compte amb equacions com ara

$$(z^{\frac{n}{m}})^{\frac{m}{n}} = z,$$

que és incorrecta, perquè el terme de l'esquerra designa un conjunt de n números complexos, mentre que el terme dret és tan sols un d'aquests números. La definició de z^w per a z, w generals la donarem més endavant.

1.1.3 L'estructura de cos

El pla $\mathbb{R}^2$ s'identifica amb $\mathbb{C}$ i, per tant, té estructura de cos. És ben conegut, però, que aquest cos no pot ser ordenat com ho és $\mathbb{R}$.

Teorema 1.6. *En el cos $\mathbb{C}$ no és possible definir un ordre total que sigui compatible amb les operacions de suma i producte.*

Demostració. Suposem que existís un ordre en els complexos que complissin les propietats: 1. Donats z, w diferents, o bé $z < w$ o bé $w < z$. 2. Si $z < w$, llavors $z + h < w + h$ per a tot h . 3. Si $z, w > 0$, també $zw > 0$ (aquestes tres propietats impliquen totes les regles aritmètiques habituals). El número i seria positiu o negatiu; suposem $i > 0$. Aleshores $-1 = i^2 > 0$, i sumant 1, obtenim $0 > 1$. D'altra banda, com que $-1 > 0$, també $1 = (-1)(-1) > 0$. Arribem així a $0 > 1$ i $1 > 0$ simultàniament, que és absurd. Igualment s'arriba a una contradicció si partim de $i < 0$. $\square$

D'altra banda, és força natural preguntar-se si $\mathbb{R}^n$, per a $n > 2$, pot tenir una estructura de cos de manera que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ en sigui un subcòs. La resposta és negativa i la situació és la descrita en el teorema següent:

Teorema 1.7. *Cap espai $\mathbb{R}^n$ amb $n > 2$ té una estructura de cos commutatiu que estengui la de $\mathbb{C}$. A $\mathbb{R}^4$ es pot definir una estructura de cos no commutatiu, el cos dels quaternions, extensió de $\mathbb{C}$. A $\mathbb{R}^8$ es pot definir una estructura de cos no associatiu, el cos dels octonions, també extensió de $\mathbb{C}$.*

Demostració. Tan sols veurem que a $\mathbb{R}^3$ no pot definir-se cap estructura de cos commutatiu extensió de $\mathbb{C}$ i definirem els quaternions. Representem els vectors de $\mathbb{R}^3$ en la forma $a + bi + cj$ (és a dir, i és el vector $(0, 1, 0)$ i j és el vector $(0, 0, 1)$) i suposem que tenim una multiplicació estenent la de $\mathbb{C}$. Observem que una multiplicació d'aquestes característiques queda completament determinada dient quant val ij , perquè aleshores, per l'associativitat del producte, hom té

$$-j = (i^2)j = i(ij), j^2 = -(ij)^2.$$

Llavors, posant $ij = a + bi + cj$ amb $a, b, c \in \mathbb{R}$, seria

$$-j = ai - b + c(ij) = ai - b + c(a + bi + cj),$$

d'on, igualant coeficients, es desprèn $c^2 = -1$, en contradicció amb $c \in \mathbb{R}$.

La idea que porta als quaternions és que, si bé no és possible definir ij com a element de $\mathbb{R}^3$, potser sí que ho és si hom té més espai, per exemple a $\mathbb{R}^4$. Això és factible si s'abandona el requeriment que el nou producte sigui commutatiu. Posant k per al vector $(0, 0, 0, 1)$ i

$$\begin{aligned} ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j, \quad jk = -kj = i \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1, \end{aligned}$$

hom pot comprovar que $\mathbb{R}^4$ té estructura de cos (no commutatiu). $\square$

1.2 Geometria analítica amb terminologia complexa

1.2.1 Rectes i circumferències

És convenient disposar de les nocions geomètriques o mètriques habituals a $\mathbb{R}^2$ en notació complexa. Fem la identificació entre el número complex $z = x + iy$ i el punt (x, y) del pla i també amb el vector d'origen el de coordenades i extrem z .

El producte escalar euclidià entre $z = a + ib$ i $w = c + id$ és $ac + bd = \operatorname{Re} z\bar{w}$. Així, $\operatorname{Re} z\bar{w}/|z||w|$ és el cosinus de l'angle format per z , w . Com que iw és perpendicular a w , $(\operatorname{Im} z\bar{w})/|z||w| = -\operatorname{Re} zi\bar{w}/|z||w| = \operatorname{Re} zi\bar{w}/|z||w|$, és el cosinus de l'angle entre z i iw i també el sinus de l'angle entre z i w .

Si a l'equació lineal $Ax + By + C = 0$ fem la substitució $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, resulta que l'equació general d'una recta és del tipus $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m = 0$, amb $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{R}$ i, en variar m , s'obtenen totes les rectes que són perpendiculars a α . En forma paramètrica, l'equació de la recta que passa per z_1 i té z_2 per vector director és $z(t) = z_1 + tz_2$, $t \in \mathbb{R}$.

L'equació general d'una cònica és $P(x, y) = 0$, on P és un polinomi amb coeficients reals de grau dos: $P(x, y) = \sum_{k+l \leq 2} a_{k,l} x^k y^l$, $a_{k,l} \in \mathbb{R}$. Si fem la substitució $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, trobarem una expressió del tipus

$$P(z) = \sum_{k+l \leq 2} \alpha_{k,l} z^k \bar{z}^l,$$

on ara els $\alpha_{k,l}$ són números complexos que compleixen $\alpha_{l,k} = \overline{\alpha_{k,l}}$. En general, un polinomi en z , $\bar{z}$ de grau n ,

$$P(z) = \sum_{k+l \leq n} \alpha_{k,l} z^k \bar{z}^l,$$

pren valors reals si i només si $\alpha_{l,k} = \overline{\alpha_{k,l}}$, que és el que s'obté si s'imposa la condició $\bar{P}(z) = P(z)$ i s'igualen coeficients. Tornant al cas $n = 2$, l'expressió general de les còniques es pot reescriure en la forma

$$\bar{\beta}z^2 + \beta\bar{z}^2 + n|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m = 0,$$

amb $m, n \in \mathbb{R}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Per a un cercle de centre α i radi r , és

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) - r^2 = |z|^2 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z - r^2 + |\alpha|^2 = 0.$$

Això és, els cercles corresponen a $\beta = 0$, $n \neq 0$ i $\frac{m}{n} - |\alpha|^2 < 0$, en l'equació d'una cònica.

1.2.2 Aplicacions lineals conformes i anticonformes

El pla $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i podem considerar, per tant, les aplicacions $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que són $\mathbb{R}$ -lineals, és a dir, que compleixen $T(\lambda_1 z + \lambda_2 w) = \lambda_1 T(z) + \lambda_2 T(w)$ si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$. Habitualment les manipulem amb la matriu de T respecte de la base $(1, 0) = 1$, $(0, 1) = i$,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

de manera que $(x, y) \xrightarrow{T} (ax + by, cx + dy)$, $T(1) = (a, c) = a + ci$, $T(i) = (b, d) = b + id$. En termes de $z = x + iy$, és $T(z) = ax + by + i(cx + dy) = \alpha z + \beta \bar{z}$, amb $\alpha = \frac{1}{2}(a + d - ib + ic)$, $\beta = \frac{1}{2}(a - d + ic + ib)$. Això significa que $T(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$, amb $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ qualssevol, és l'*expressió general* d'una aplicació $\mathbb{R}$ -lineal. És immediat comprovar que

$$\det T = ad - bc = |\alpha|^2 - |\beta|^2,$$

i, per tant, T és invertible quan $|\alpha| \neq |\beta|$. En aquest cas podem expressar l'aplicació inversa T^{-1} amb notació complexa resolent el sistema en $z, \bar{z}$

$$\alpha z + \beta \bar{z} = w$$

$$\bar{\beta} z + \bar{\alpha} \bar{z} = \bar{w},$$

que dona $z = T^{-1}(w) = \frac{1}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} (\bar{\alpha} w - \beta \bar{w})$.

D'altra banda, $\mathbb{C}$ és també un $\mathbb{C}$ -espai vectorial (de dimensió 1) i podem considerar les aplicacions $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, que són $\mathbb{C}$ -lineals, és a dir, que compleixen $T(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 T(z_1) + \lambda_2 T(z_2)$, on ara $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Evidentment, en aquest cas T està completament determinada per $\alpha = T(1)$ mitjançant $T(z) = \alpha z$. Les aplicacions $\mathbb{C}$ -lineals són, és clar, $\mathbb{R}$ -lineals i dins d'aquestes es caracteritzen per la condició $\beta = 0$, si $Tz = \alpha z + \beta \bar{z}$. També és fàcil veure que una aplicació $\mathbb{R}$ -lineal T és $\mathbb{C}$ -lineal si i només si commuta amb l'operació de multiplicar per i (gir d'angle 90°): $T(iz) = iT(z)$. Analíticament, si $T(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$, la condició

$$\alpha iz + \beta \overline{(iz)} = T(iz) = iT(z) = i(\alpha z + \beta \bar{z})$$

implica $-\beta i \bar{z} = i \beta \bar{z}$, per a tot z i, per tant, $\beta = 0$.

Definició 1.8. Una aplicació T de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ -lineal i invertible, s'anomena *conforme* si preserva la magnitud i l'orientació dels angles, és a dir, si per a qualssevol $z, w \in \mathbb{C}$ l'angle entre z, w és el mateix que l'angle entre Tz, Tw . Analíticament, T ha de complir

$$\arg Tz - \arg Tw = \arg z - \arg w, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Òbviament, això és el mateix que imposar $\arg Tz - \arg z = \arg Tw - \arg w$, per a tot z, w : així, la funció $\arg Tz - \arg z$ és constant respecte de z quan mirem els seus valors a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Com que $\arg \frac{Tz}{z} = \arg Tz - \arg z$, això significa exactament que tots els punts $\frac{Tz}{z}$, $z \neq 0$, són en una semirecta fixa que passa per l'origen. Ara bé, si $Tz = \alpha z + \beta \bar{z}$, la quantitat

$$\frac{Tz}{z} = \alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$$

recorre, en variar $z \neq 0$, el cercle de centre α i radi $|\beta|$, i és clar que només pot estar inclòs en una semirecta si $|\beta| = 0$. Així, hem vist:

Proposició 1.9. *Per a una aplicació T de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ -lineal i invertible, són equivalents:*

- a) T és conforme.
- b) T és de la forma $Tz = \alpha z$, amb $\alpha \in \mathbb{C}$, és a dir, T és $\mathbb{C}$ -lineal.
- c) T consisteix en un gir (d'angle $\text{Arg } \alpha$) seguit d'una dilatació (de factor $|\alpha|$).

En termes de la matriu de T , la condició $\beta = 0$ equival a $d - a = i(b + c)$, és a dir, $a = d$, $b = -c$ i resulta

$$T = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix},$$

o bé $Tz = \alpha z$ amb $\alpha = a + ic$. De manera anàloga, les aplicacions $T(z) = \beta \bar{z}$ són exactament les que preserven la magnitud dels angles però en canvien l'orientació. S'anomenen *anticonformes* o bé $\mathbb{C}$ -*antilineals* i tenen una matriu del tipus $T = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Si a una aplicació conforme $Tz = \alpha z$ o anticonforme $Tz = \beta \bar{z}$ li imposen que conservi les distàncies, haurà de complir $|Tz| = |z|$, és a dir, $|\alpha| = 1$ o $|\beta| = 1$. Això significa $a^2 + c^2 = 1$, que vol dir que la matriu de T és una matriu ortogonal, és a dir, que satisfà $T^{-1} = T^t$.

Definició 1.10. *Diem que l'aplicació $\mathbb{R}$ -lineal T de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ distorsiona les distàncies en un factor constant $m > 0$ si $|Tz - Tw| = m|z - w|$, és a dir, si i només si $|Tz| = m|z|$ per a tot z .*

Això equival al fet que $\frac{Tz}{z} = \alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$ té mòdul constant m i només pot passar si $\alpha = 0$ (i llavors $m = |\beta|$), o bé si $\beta = 0$. Així, hem vist:

Proposició 1.11. *Una aplicació T de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ -lineal i invertible, distorsiona les distàncies en un factor constant si i només si és $\mathbb{C}$ -lineal o bé $\mathbb{C}$ -antilineal.*

En el cas $m = 1$, es tracta de girs o bé de girs seguits d'una reflexió.

Hem vist que les aplicacions $\mathbb{R}$ -lineals de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que preserven la magnitud dels angles són les $\mathbb{C}$ -lineals i les $\mathbb{C}$ -antilineals. Com són aquestes transformacions en el cas de l'espai $\mathbb{R}^n$? Ens ho diu el resultat següent:

Proposició 1.12. *Una aplicació $\mathbb{R}$ -lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, invertible, preserva la magnitud dels angles si i només si és de la forma $T = \lambda O$ amb O una transformació ortogonal i $\lambda > 0$.*

Recordem que una transformació és ortogonal si està donada en la base canònica per una matriu O tal que $OO^t = O^tO = I$, on O^t és la matriu trasposta de O i I la matriu identitat. Per tal de simplificar farem servir la notació $|x|$ per a indicar la *norma* del vector x de $\mathbb{R}^n$ en lloc de $\|x\|$ que és, potser, més habitual.

Demostració. Preservar la magnitud dels angles és el mateix que preservar el cosinus d'aquests angles,

$$\frac{Tu \cdot Tv}{|Tu| |Tv|} = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}, \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Si O és ortogonal, O preserva el producte escalar i la norma; per tant, si $T = \lambda O$ és

$$\frac{Tu \cdot Tv}{|Tu| |Tv|} = \frac{\lambda^2 Ou \cdot Ov}{\lambda^2 |Ou| |Ov|} = \frac{Ou \cdot Ov}{|Ou| |Ov|} = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}.$$

Recíprocament, suposem que T preserva la magnitud dels angles i sigui $e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Llavors els vectors $Te_1, Te_2, \dots, Te_n$ són dos a dos perpendiculars. Sigui O la transformació lineal definida per $Oe_i = \frac{Te_i}{|Te_i|}$; com que transforma una base ortonormal en una altra base ortonormal, O és una transformació ortogonal. Aleshores $O^{-1}T = R$ és una altra transformació lineal, invertible, que preserva angles i $Re_i = c_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, on $c_i = |Te_i|$. Si ara suposem que

$$\frac{Ru \cdot Rv}{|Ru| |Rv|} = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

amb $u = e_i + e_j$ i $v = e_j$, trobem

$$\frac{(c_i e_i + c_j e_j) \cdot c_j e_j}{(c_i^2 + c_j^2)^{1/2} c_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Així, $2c_j^2 = c_i^2 + c_j^2$ i, per tant, $c_i = c_j = \lambda$. Això significa $R = \lambda \text{Id}$ i, per tant, $T = \lambda O$. Les transformacions conformes corresponen a $\det O = +1$, les anticonformes, a $\det O = -1$. $\square$

Per tant, la situació és la mateixa que en dimensió 2, en el sentit que les transformacions lineals que conserven angles són transformacions ortogonals seguides de dilatacions, és a dir, són les *semblances*.

1.3 Nocions topològiques. El pla compactificat

Considerarem sempre que el pla complex $\mathbb{C}$ està dotat de la topologia habitual, és a dir, la que té com a base d'entorns de cada punt $a \in \mathbb{C}$ la família de discos oberts, $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, per a $r > 0$. També farem servir la notació $D_r(a)$ per a aquests discos i $C(a, r)$ o $C_r(a)$ n'indicarà la frontera, és a dir, la circumferència de centre a i radi r . En general, ∂E designarà la frontera topològica del conjunt E . El disc $D(0, 1)$ l'anomenarem el *disc unitat* i el representarem per $\mathbb{D}$. És molt convenient, però, submergir l'espai $\mathbb{C}$ en un espai més ampli, compacte, obtingut per l'adjunció del punt de l'infinit.

Designarem per $\mathbb{C}^*$ l'espai compacte obtingut en afegir a $\mathbb{C}$ el punt de l'infinit, ∞ . Una base d'entorns de ∞ la formen els complementaris dels discos tancats centrats en 0, $\{z : |z| > r\} \cup \{\infty\}$. Per tant, si (z_n) és una successió de números complexos, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ vol dir que, per a tot $r > 0$, hom té $|z_n| > r$ per a n prou gran, o bé, que $|z_n| \rightarrow +\infty$, quan $n \rightarrow \infty$. Així, un obert de $\mathbb{C}^*$ que contingui ∞ ha de contenir $\{z : |z| > r\}$ per a un cert $r > 0$. Per exemple, un semiplà $\{z : \operatorname{Re} z > a\}$ té ∞ com a punt adherent i el conjunt $\{z : \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{\infty\}$ no és un obert de $\mathbb{C}^*$. Tota successió (z_n) de punts de $\mathbb{C}$ té una parcial convergent a un punt de $\mathbb{C}^*$; si la successió és acotada té una parcial convergent a un punt de $\mathbb{C}$, i si no és acotada, té una parcial convergent a ∞ .

La *projecció estereogràfica* estableix un homeomorfisme entre l'esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, sense el pol nord, i el pla complex. Si pensem en $\mathbb{C}$ com el pla de l'equador de S^2 , el punt z del pla té associat a S^2 el punt P intersecció de S^2 amb la recta que uneix el pol nord amb z . Per tant, l'espai compactificat $\mathbb{C}^*$ s'identifica amb S^2 , i el pol nord, amb ∞ (fig. 1.5). Analíticament és

$$P = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \text{ si } z = x + iy.$$

Per aquest motiu, ens referirem indistintament al *pla complex ampliat* $\mathbb{C}^*$ o a l'*esfera de Riemann* S^2 .

Sovint considerarem funcions definides en subconjunts E de $\mathbb{C}$, en general oberts, que prenen valors reals o complexos. Quan es parli de funcions contínues, diferenciables, etc., s'entén que a E se'l considera com a subconjunt del pla, amb la distància habitual, que en notació complexa no és altra

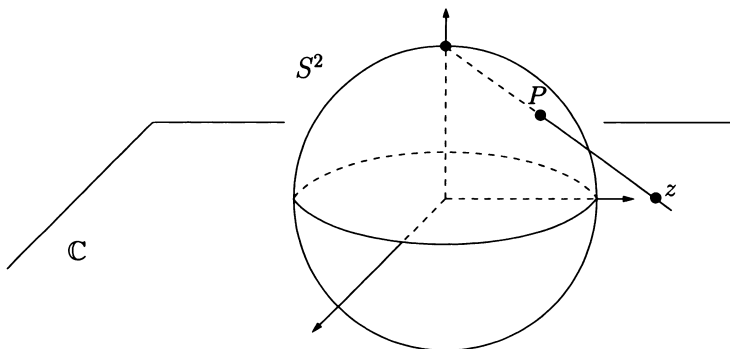


Figura 1.5

cosa que $d(z, w) = |z - w|$. Per exemple, que una funció f definida a E sigui *contínua* en un punt $z \in E$ vol dir que per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que $w \in E$, $|w - z| < \delta$ implica $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$; equivalentment, per a tota successió (z_n) de punts de E amb límit z , la successió imatge $(f(z_n))$ té límit $f(z)$. Designarem per $C(E)$ el conjunt de les funcions contínues a E .

Més generalment, podem considerar funcions contínues $f: E \rightarrow \mathbb{C}^*$, on ara E és un subconjunt de $\mathbb{C}^*$ i f també pren valors a $\mathbb{C}^*$. Si $\infty \in E$ la continuïtat en el punt de l'infinit significa que $f(\infty) = l \in \mathbb{C}^*$ i $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = l$, és a dir, per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha un $r > 0$ tal que $|f(z) - l| < \varepsilon$ si $|z| > r$, quan $l \neq \infty$, o bé $|f(z)| > 1/\varepsilon$ si $|z| > r$, quan $l = \infty$.

Així, per exemple, tota funció definida a $\mathbb{C}^*$ per un polinomi de la variable complexa z , $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, amb $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $z \in \mathbb{C}$ i $P(\infty) = \infty$ si $n \geq 1$ és una funció contínua a $\mathbb{C}^*$. En efecte, la continuïtat a $\mathbb{C}$ és evident i per al punt de l'infinit, la condició $\lim_{|z| \rightarrow \infty} P(z) = \infty$ és conseqüència de la igualtat $P(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n \right)$, $z \in \mathbb{C}$. En canvi una funció definida per un polinomi en les dues variables reals x, y és contínua a $\mathbb{C}$ però pot no ser-ho a $\mathbb{C}^*$ com es veu agafant $P(x, y) = x + y$, per exemple.

Al llarg d'aquest text apareixerà sovint la noció de *domini*. Un domini del pla complex és un obert connex de $\mathbb{C}$. De vegades s'utilitza també el terme *regió* en lloc de domini. A més a més dels dominis, considerarem també oberts qualssevol i conjunts compactes de $\mathbb{C}$, i convé repassar les propietats de connexió d'aquests conjunts, així com les dels seus complementaris.

Recordem primer que les *components connexes* d'un conjunt $A \subset \mathbb{C}$ són els subconjunts connexos maximals de A i que A és la reunió disjunta de les seves components. Tota component connexa de A és tancada a A i, per tant, tancada

a $\mathbb{C}$ si A és tancat a $\mathbb{C}$. Les components de A en general no són obertes a A ; quan A és obert a $\mathbb{C}$, llavors les components connexes de A són obertes a $\mathbb{C}$ i, en particular, n'hi ha com a màxim una quantitat numerable. Quan A no és obert, pot haver-hi una quantitat no numerable de components connexes. Un exemple extrem és el conjunt de Cantor, que és un conjunt perfecte (tots els seus punts són d'acumulació), no numerable i totalment desconnex. Per tant, doncs, les components connexes del conjunt de Cantor són cadascun dels seus punts, en quantitat no numerable i no són obertes a $\mathbb{R}$.

Així, si K és un compacte de $\mathbb{C}$, les components connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ són conjunts oberts connexos de $\mathbb{C}$, és a dir, dominis de $\mathbb{C}$, en quantitat finita o numerable. Tota component C de $\mathbb{C} \setminus K$ compleix la condició $\partial C \subset K$. Entre totes les components de $\mathbb{C} \setminus K$ n'hi ha sempre una i només una que no és acotada: és la que conté els punts $z \notin K$ amb $|z|$ prou gran. Totes les altres components –si n'hi ha– són acotades i, intuïtivament, representen els “forats” de K . Un forat C de K és, per tant, un domini acotat de $\mathbb{C} \setminus K$ amb $\partial C \subset K$, i n'hi ha una quantitat finita o numerable.

Si U és un obert de $\mathbb{C}$, llavors $\mathbb{C} \setminus U$ és tancat i les seves components connexes són conjunts tancats de $\mathbb{C}$, en quantitat no necessàriament finita o numerable, tal com passa, per exemple, si $U = \mathbb{C} \setminus E$, on E és el conjunt de Cantor. Si U és un obert, la frontera de cada component connexa C de $\mathbb{C} \setminus U$ compleix $\partial C \subset C$, $\partial C \cap U = \emptyset$ i $\partial C \subset \partial U$. Quan U és obert, no es pot parlar de “la component no acotada” de $\mathbb{C} \setminus U$ perquè pot ser que $\mathbb{C} \setminus U$ no tingui cap component no acotada (per exemple, si $U = \mathbb{C} \setminus K$, K compacte), o bé que en tingui més d'una (per exemple si U és una banda il·limitada). Ara la idea intuïtiva de “forat” de U correspon a les components connexes acotades de $\mathbb{C} \setminus U$, i poden aparèixer, fins i tot, en quantitat no numerable, tal com hem vist.

És immediat comprovar que un conjunt $A \subset \mathbb{C}$ no té components connexes acotades si i només si $A \cup \{\infty\}$ és connex. Així, un compacte $K \subset \mathbb{C}$ (respectivament un obert $U \subset \mathbb{C}$) no té “forats” (components acotades del complementari en $\mathbb{C}$) si i només si $\mathbb{C}^* \setminus K$ (respectivament, $\mathbb{C}^* \setminus U$) és connex. Per al cas d'un compacte K , $\mathbb{C}^* \setminus K$ connex equival a $\mathbb{C} \setminus K$ connex perquè les components connexes de $\mathbb{C}^* \setminus K$ són les mateixes que les de $\mathbb{C} \setminus K$, afegint el punt ∞ a la component no acotada. En canvi, per a un obert U , en afegir el punt ∞ , diferents components de $\mathbb{C} \setminus U$ poden quedar connectades a $\mathbb{C}^*$. Per exemple, si U és una banda, $U = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$, U no té forats, $\mathbb{C} \setminus U$ té dues components (no és connex), però $\mathbb{C}^* \setminus U$ sí que és connex.

Pel que acabem de comentar, és més convenient, en general, pensar en el complementari d'un obert o d'un compacte de $\mathbb{C}$ respecte de tot el pla ampliat $\mathbb{C}^*$.

Definició 1.13. *Un domini U del pla complex s'anomena simplement connex si el seu complementari respecte del pla ampliat, $\mathbb{C}^* \setminus U$, és connex.*

Intuïtivament, el fet de ser simplement connex vol dir que el domini U no té “forats”, és a dir, que $\mathbb{C} \setminus U$ no té components acotades perquè l'única component de $\mathbb{C}^* \setminus U$ ha de contenir el punt ∞ . També es fa servir el terme simplement connex per a un compacte K del pla tal que $\mathbb{C}^* \setminus K$ (o $\mathbb{C} \setminus K$) és connex.

En el cas que un domini tingui forats, convé introduir una denominació per al domini en funció del nombre de forats.

Definició 1.14. *Un domini U del pla complex es diu que és n -connex o que té grau de connexió n ($n \geq 1$) si $\mathbb{C}^* \setminus U$ té n components connexes. Si en té infinites es diu que U té grau de connexió infinit.*

El cas $n = 1$ correspon als dominis simplement connexos de la definició 1.13. A la figura 1.6 hi surt un domini acotat U que s'obté eliminant del disc unitat la successió de discos $\overline{D}_n = D(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n^3})$, $n \geq 2$, que té grau de connexió infinit.

Acabem aquesta secció provant que tot obert del pla es pot recobrir pel que s'anomena *successió exhaustiva de compactes*.

Lema 1.15. *Per a tot obert U del pla, hi ha una successió de compactes $K_n \subset U$, $n = 1, 2, \dots$ que compleixen les condicions següents:*

- a) $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$.
- b) Per a tot compacte $K \subset U$, existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$.
- c) Per a cada $n \in \mathbb{N}$, tota component acotada de $\mathbb{C} \setminus K_n$ conté almenys una component acotada de $\mathbb{C} \setminus U$.

Demostració. Definim

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{D}(0, n).$$

És immediat comprovar a) i b). Per tal de comprovar c), sigui C una component acotada de $\mathbb{C} \setminus K_n = (\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, n)) \cap \bigcap_{w \notin U} D(w, 1/n)$. Com que cadascun dels conjunts d'aquesta reunió és connex, si un d'ells talla C , estarà contingut dins de C per la maximalitat de C (la reunió de dos conjunts connexos que es tallen

és connexa). Essent C acotat, veiem, doncs, que C no pot intersectar $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, n)$ i que és reunió d'uns quants discos,

$$C = \bigcup_{w_j \in \mathbb{C}, w_j \notin U} D(w_j, 1/n).$$

En particular, C talla $\mathbb{C} \setminus U$ i, per tant, hi ha una component F de $\mathbb{C} \setminus U$ que talla C . Llavors F és un conjunt connex de $\mathbb{C} \setminus U \subset \mathbb{C} \setminus K$ que talla C , és a dir, $F \subset C$. $\square$

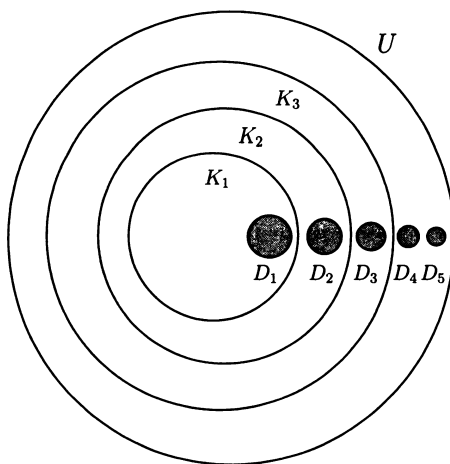


Figura 1.6

El significat del lema és que, malgrat que $K_n \subset U$ i, per tant, $\mathbb{C} \setminus K_n$ és més gran que $\mathbb{C} \setminus U$, K_n no crea més forats que els que són forçats pels forats de U (eventualment una component de $\mathbb{C} \setminus K_n$ pot contenir més d'una component de $\mathbb{C} \setminus U$). D'altra banda, és clar que tota component de $\mathbb{C} \setminus U$ està continguda en una component de $\mathbb{C} \setminus K_n$, per a tot n (fig. 1.6).

1.4 Corbes, camins, element de longitud

1.4.1 Corbes i camins

Utilitzarem molt sovint *corbes contínues*. Per a nosaltres una corba contínua, o senzillament *corba*, en un domini U serà una aplicació contínua $\gamma: [a, b] \rightarrow U$, on $[a, b]$ és un interval de $\mathbb{R}$. També és habitual dir que γ és un *arc de corba* o,

senzillament, un *arc*. Designarem per γ^* el conjunt imatge o recorregut de γ ; habitualment el visualitzem com un “fil” continu a U ; però, de fet, γ^* pot ser un conjunt molt general. Per exemple, pot ser tot un quadrat.

Exemple 1.16. Les corbes contínues que omplen un quadrat s’anomenen *corbes de Peano*. Una de les primeres construccions d’aquestes corbes és deguda a Hilbert. És la següent: dividim el quadrat unitat en quatre quadrats numerats de manera consecutiva. Si pensem que l’aplicació que busquem ha de transformar l’interval $[0, 1]$ en tot el quadrat, és natural imposar que dividint $[0, 1]$ en quatre quarts transformi cada un d’ells en cada un dels quadrats 1, 2, 3, 4. Si fem una nova divisió de cada quadrat en 4 i de cada quart de $[0, 1]$ en 4 trossos, podem continuar exigint que cada $1/16$ de $[0, 1]$ s’apliqui en un dels 16 quadrats resultants. Continuem aquest procés i numerem els quadrats de cada generació de manera que, si tenim dos quadrats consecutius de la generació m , l’últim i el primer de la generació $m + 1$ de cada un d’ells siguin també adjacents. Ara cada punt $t \in [0, 1]$ és el límit d’interval·ls de longitud 4^{-m} que el contenen i a cada interval li correspon un quadrat de la m -èsima generació, que té costat de longitud 2^{-m} . Si fem correspondre a t el punt comú a tots els quadrats que corresponen als interval·ls que convergeixen cap a t , no és difícil comprovar la continuïtat de la corba que s’obté (fig. 1.7). $\square$

11	14	21	22
1		2	
12	13	24	23
43	42	31	32
4		3	
44	41	34	33

Figura 1.7

La corba $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ s’anomena *tancada* si $\gamma(b) = \gamma(a)$, i *simple* (sense autointerseccions) si $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ per a $s, t \in (a, b)$, $s \neq t$. D’una corba simple se’n diu també una *corba de Jordan* o un *arc de Jordan*. La corba s’anomena

diferenciable si per a cada valor del paràmetre t_0 existeix el límit

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \quad (1.2)$$

En termes de les components de γ , $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, això equival a dir que les funcions reals $x(t)$, $y(t)$ siguin derivables en el punt t_0 , i llavors $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$. Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, aquest vector és tangent a la corba en el punt $\gamma(t_0)$, és a dir, la recta que passa per $\gamma(t_0)$ de vector director $\gamma'(t_0)$ és tangent a la corba. Si $\gamma'(t)$ existeix per a tot t i és contínua a $[a, b]$, direm que γ és de classe C^1 i anomenarem *regulars* les corbes de classe C^1 amb derivada no nul·la a cada punt. Si γ' existeix i és contínua, llevat d'un nombre finit de punts en els quals γ tingui derivades laterals, direm que γ és de classe C^1 a trossos, o bé que γ és un *camí*. Un significat anàleg té el concepte de corba regular a trossos, per a les quals utilitzarem també el terme *camí regular*.

Les regles per a calcular derivades de sumes o productes $\gamma(t) + \sigma(t)$, $\gamma(t) \cdot \sigma(t)$ són les habituals. Per exemple,

$$(\gamma(t) \cdot \sigma(t))' = \gamma'(t) \cdot \sigma(t) + \gamma(t) \cdot \sigma'(t) \quad (1.3)$$

si $\gamma(t)$ i $\sigma(t)$ són derivables.

Mirem amb un cert detall l'exemple $\gamma(t) = 1_t = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Quan t varia a $\mathbb{R}$, $\gamma(t)$ recorre infinites vegades la circumferència unitat $\mathbb{T}$ en el sentit antihorari i

$$\gamma'(t) = -\sin t + i \cos t = i\gamma(t),$$

que expressa que el vector tangent és el vector radial multiplicat per i , és a dir, girat 90° . En aquest punt convé abandonar la notació 1_t per al punt $\cos t + i \sin t$, introduint la funció exponencial d'exponent imaginari pur.

Comencem per recordar que el número real e (d'Euler) es caracteritza, entre tots els reals positius $a > 0$, per ser l'únic que té la propietat que la funció exponencial de base a , $t \mapsto a^t$ coincideix amb la seva derivada; és a dir, $(a^t)' = a^t$ si i només si $a = e$. Aquest fet equival a la definició clàssica de e com $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$. Per les regles de diferenciació habituals, hom té $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$ si u és una funció derivable de t ; en particular, $(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}$ si $\alpha \in \mathbb{R}$. Atès que $(1_t)' = i1_t$, segons acabem de veure, sovint es canvia la notació 1_t per e^{it} , perquè així la regla $(1_t)' = i1_t$ és com l'anterior amb $\alpha = i$: $(e^{it})' = ie^{it}$. L'equació

$$e^{it} = 1_t = \cos t + i \sin t$$

és una *definició* de e^z quan $z = it$ és imaginari pur. L'invers de e^{it} coincideix amb el seu conjugat i és e^{-it} . Amb aquesta notació, les funcions trigo-

nomètriques s'expressen per

$$\begin{aligned}\cos t &= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \\ \sin t &= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).\end{aligned}$$

Així, tenim la definició de e^z per a $z = x \in \mathbb{R}$ (del càlcul amb funcions d'una variable real) i ara la definició per a $z = it$, imaginari pur. La definició de e^z per a $z \in \mathbb{C}$ qualsevol la donarem més endavant.

Les corbes poden estar donades també en forma polar. Si $R: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ són contínues,

$$\gamma(t) = R(t)e^{i\phi(t)} = R(t)(\cos \phi(t) + i \sin \phi(t))$$

és una corba contínua a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $R(t)$, $\phi(t)$ són derivables, és immediat comprovar que γ és una corba diferenciable i

$$\gamma'(t) = R'(t)e^{i\phi(t)} + R(t)i\phi'(t)e^{i\phi(t)} = (R'(t) + iR(t)\phi'(t))e^{i\phi(t)}.$$

Més endavant (teorema 1.23) veurem que tota corba contínua $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$ que no passi per l'origen s'escriu en la forma $\gamma(t) = R(t)e^{i\phi(t)}$.

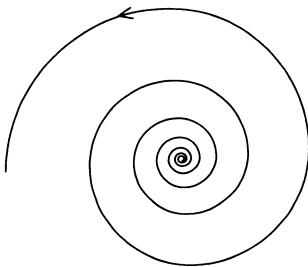


Figura 1.8

Exemple 1.17. Si $R(t)$ és una funció positiva, creixent amb $\lim_{t \rightarrow -\infty} R(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = +\infty$, llavors

$$\gamma(t) = R(t)e^{it}$$

recorre una espiral que s'expandeix a mesura que gira en el sentit antihorari, i $\gamma'(t) = R'(t)e^{it} + iR(t)e^{it} = (R'(t) + iR(t))e^{it}$ (fig. 1.8). $\square$

És important no confondre γ amb γ^* , ja que γ inclou γ^* i la forma com és recorregut. Per exemple, $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$, $\gamma_2(t) = e^{2\pi i t^2}$, $0 \leq t \leq 1$ recorren totes dues la circumferència unitat, però amb velocitats diferents. Aquest exemple és un cas particular d'un canvi de parametrització. En general, diem que $\Gamma(u)$, $u \in [c, d]$ s'ha obtingut de $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ per un *canvi de parametrització* si el nou paràmetre u i el vell paràmetre t estan lligats per una relació $t = \Phi(u)$, on Φ és un homeomorfisme de $[c, d]$ en $[a, b]$ i $\Gamma(u) = \gamma(\Phi(u))$. Observem que, en aquest cas, $\Gamma^* = \gamma^*$. Tot homeomorfisme entre intervals és o bé estrictament creixent o bé estrictament decreixent; aquest fet classifica les parametritzacions de γ^* en dues classes, cadascuna associada intuïtivament a un sentit de recorregut. Una *orientació* de γ^* consisteix en l'elecció d'una d'aquestes dues classes. Una parametrització $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ i la parametrització $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$, defineixen orientacions oposades.

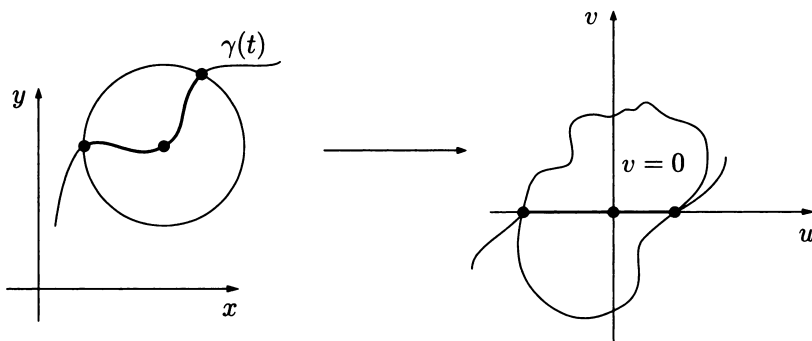


Figura 1.9

Tal com s'ha mostrat més amunt, γ^* pot ser bastant arbitrari i, en particular, pot ser un quadrat. Si la corba γ és C^1 a trossos, el conjunt γ^* ja té una estructura més particular. En efecte, a l'entorn de tot punt t_0 on la derivada existeixi i sigui no nul·la, es pot aplicar el teorema de la funció implícita i el conjunt γ^* és, a l'entorn de $\gamma(t_0)$, del tipus $\{(u, v) : v = 0\}$, on u, v són unes coordenades locals; en aquest cas γ^* sí que és un "fil" (fig. 1.9), d'acord amb el que diu la intuïció. En conseqüència, en aquest cas el conjunt γ^* té mesura planar zero (vegeu la proposició 1.35).

1.4.2 Longitud i paràmetre arc

Repassem, ara, la noció de longitud d'una corba, $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. Considerem una poligonal P inscrita a γ determinada pels punts $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n)$,

amb $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. La seva longitud és

$$L(P) = \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sum_i \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}. \quad (1.4)$$

La longitud de γ es defineix per

$$L(\gamma) = \sup\{L(P) : P \text{ és una poligonal inscrita a } \gamma\}.$$

Si $L(\gamma) < +\infty$ es diu que γ és *rectificable*. En el cas que γ sigui de classe C^1 a trossos, aplicant el teorema del valor mitjà a cada diferència de (1.4) trobem

$$L(P) = \sum_i \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} (t_{i+1} - t_i), \quad (1.5)$$

on els punts ξ_i, η_i són intermedis entre t_i i t_{i+1} . En afegir punts a la poligonal, i prendre límits a (1.5) resulta

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Aquesta integral està ben definida perquè per hipòtesi $[a, b]$ es descompon en intervals on γ' és contínua. L'integrand, $ds = |\gamma'(t)| dt$, és l'*element de longitud* de γ (allò que integrat dona la longitud). Lògicament, l'element de longitud és invariant per un canvi de parametrització, tant si es conserva el sentit com si no. En efecte, si $t = \Phi(u)$ i $\Gamma(u) = \gamma(\Phi(u))$, hom té

$$|\Gamma'(u)| du = |\gamma'(\Phi(u))| |\Phi'(u)| du = |\gamma'(t)| dt = ds.$$

Donat un camí γ , si designem per $s(t)$ la longitud de l'arc de corba entre $\gamma(a)$ i $\gamma(t)$,

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(x)| dx,$$

hom té $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$; per tant, $t \rightarrow s(t)$ és una bijecció Ψ estrictament creixent de $[a, b]$ a $[0, L]$, on L és la longitud total de γ . Considerant la bijecció inversa $\Phi = \Psi^{-1}$, podem prendre s com a nou paràmetre, $\Gamma(s) = \gamma(\Phi(s))$; com que la longitud entre $\Gamma(0)$ i $\Gamma(s)$ és s , ha de ser $|\Gamma'(s)| = 1$, fet que també es comprova observant que $\frac{ds}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = |\gamma'(t)|^{-1}$ i que $\Gamma'(s) = \gamma'(t) \cdot \frac{dt}{ds}$. Aquesta parametrització s'anomena *parametrització pel paràmetre arc*.

Un cas particular de corba regular és el del gràfic d'una funció real ϕ de variable real $x \in [a, b]$, amb derivada contínua, $\gamma(x) = (x, \phi(x))$; en aquest cas $\gamma'(x) = (1, \phi'(x))$, $|\gamma'(x)| = \sqrt{1 + \phi'^2(x)}$ i la fórmula per a la longitud esdevé

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'^2(x)} dx.$$

1.4.3 Integració respecte de l'element de longitud

Si γ és una corba de classe C^1 a trossos i h és una funció contínua sobre γ^* , que pren valors reals, definim la *integral de h respecte de l'element de longitud ds* , $\int_{\gamma} h ds$, com

$$\int_{\gamma} h ds = \int_a^b h(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Aquesta integral està ben definida i, de fet, és el límit de les sumes de Riemann

$$\sum h(\gamma(t_i)) |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|.$$

Novament, aquesta noció és independent d'un canvi de parametrització, tant si conserva el sentit del recorregut com si no.

Exemple 1.18. Considerem la corba $\gamma(t) = (t, \operatorname{ch} t) = (t, \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}))$, $0 \leq t \leq 1$. El vector tangent és $(1, \operatorname{sh} t)$ que té mòdul $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t$, $ds = \operatorname{ch} t dt$. La longitud és $\int_0^1 \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} 1 = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$. Si $h(x, y) = xy$, hom té

$$\int_{\gamma} h ds = \int_0^1 h(t, \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t dt = \int_0^1 t(\operatorname{ch} t)^2 dt = \frac{1}{8}(3 + 2 \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 2). \quad \square$$

1.5 Determinacions de l'argument. Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

1.5.1 Determinacions de l'argument

Recordem que tot número complex $z \neq 0$ té associat el conjunt $\arg z$ dels seus arguments.

Definició 1.19. Si $0 \notin E \subset \mathbb{C}$, una *determinació contínua de l'argument a E* és una aplicació contínua

$$g: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $g(z) \in \arg z$, si $z \in E$.

Així, g tria de manera contínua un dels possibles arguments de cada punt $z \in E$. Moltes vegades es parla de *determinació de l'argument* per tal de referir-se a una determinació contínua de l'argument.

Exemple 1.20. L'argument principal, Arg , no és una determinació de l'argument a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ perquè en un punt a real negatiu no és contínua en ser

$$\lim_{y \rightarrow 0, y > 0} \text{Arg}(a + iy) = \pi = \text{Arg } a,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0, y < 0} \text{Arg}(a + iy) = -\pi.$$

La funció Arg sí que és contínua a tot altre punt i, per tant, és una determinació contínua de l'argument a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, que pren valors a $(-\pi, \pi)$. $\square$

Observem que si g, h són dues determinacions contínues de l'argument a E , $(g - h)/(2\pi)$ és una funció contínua a E que pren només valors enters; en conseqüència, si E és connex, és una funció constant. Així, en un conjunt connex totes les determinacions contínues de l'argument, si n'hi ha, difereixen entre si per constants que són múltiples enters de 2π . A $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $\text{Arg } z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ són totes les possibles determinacions contínues de l'argument.

No sempre hi ha determinacions contínues de l'argument sobre un conjunt E . Per exemple, a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no n'hi ha cap, perquè si g en fos una, a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ seria, pel que acabem de dir, $g(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi k$ per a un $k \in \mathbb{Z}$ i g no podria ser contínua en els punts reals negatius.

Si L és qualsevol semirecta que surti de l'origen, diguem $L = \{z: \text{Arg } z = \alpha\}$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$, a $\mathbb{C} \setminus L$ hi ha determinacions contínues de l'argument donades analíticament per

$$\text{Arg}(z \cdot e^{i(\pi - \alpha)}) - \pi + \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De manera anàloga es parla de *determinacions contínues de l'arrel n -èsima* a un conjunt E que no contingui el zero. Per exemple, una determinació contínua de l'arrel quadrada és una aplicació contínua $h: E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z)^2 = z$, $z \in E$. Si h_1, h_2 són dues determinacions de l'arrel quadrada, llavors $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = 1$ i, per tant, si E és connex o bé $h_1 = h_2$ o bé $h_1 = -h_2$. Observem que si g és una determinació contínua de l'argument a E , aleshores $h(z) = \sqrt{|z|}e^{ig(z)/2}$ és una determinació contínua de l'arrel quadrada.

Més generalment, es defineixen les determinacions de l'argument o de les arrels de funcions contínues $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ no nul·les: una *determinació de l'argument de f* : $E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és una funció $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $g(z) \in \arg f(z)$, si $z \in E$ i una *determinació de l'arrel m -èsima de f* : $E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és una funció h contínua en E tal que $h^m = f$. Si hi ha una determinació contínua de l'argument de f , g , és evident que també n'hi ha una de l'arrel m -èsima, posant senzillament $h = |f|^{1/m}e^{ig/m}$. Ara bé, pot existir una determinació contínua

de l'arrel d'una funció f sense que existeixi determinació de l'argument de f , tal com ho mostra l'exemple següent.

Exemple 1.21. Considerem $f(z) = (z^2 - 1) = (z + 1)(z - 1)$ a $E = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$; quan z recorre la circumferència de centre 0 i radi 2 ($z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), $z^2 - 1$ recorre la circumferència de centre -1 i radi 4 dues vegades, de manera que qualsevol determinació de l'argument tindrà al llarg d'aquesta corba una variació de 4π i és, per tant, discontinua. En canvi, la determinació principal de $\sqrt{w}$, composta amb f dóna una determinació contínua de $\sqrt{f}$ (vegeu l'exercici 11). $\square$

En la definició de determinació de l'argument d'una funció f que hem donat més amunt, hem suposat que el domini de f era una part de $\mathbb{C}$, però la mateixa definició es pot donar quan f està definida en qualsevol espai mètric o topològic connex X . Tot i que ens interessarà especialment el cas en què X sigui un interval de la recta o bé un domini del pla, precisem la definició en general.

Definició 1.22. *Sigui X un espai connex i $f: X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una funció contínua. Una determinació contínua (o, simplement, una determinació) de l'argument de f és una aplicació contínua $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) \in \arg f(x)$, per a cada $x \in X$. Dit d'una altra manera, $f(x) = |f(x)|e^{ih(x)}$, $x \in X$.*

Observem que si en la definició anterior es pren $X = E \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = z$, tenim el concepte de determinació de l'argument donat per la definició 1.19.

Dues possibles determinacions contínues de l'argument de f difereixen en una funció que pren només valors que són múltiples enters de 2π i, essent X connex, ha de ser una constant múltiple de 2π .

Si en el conjunt imatge, $E = f(X)$, hi ha una determinació contínua $g(w)$ de l'argument de la variable $w \in E$, llavors $h = g \circ f$ és una determinació contínua de l'argument de f . Aquesta condició es compleix a l'entorn de cada punt $x \in X$, agafant, per exemple, un entorn de x que la funció f apliqui en el disc $D(f(x), |f(x)|)$.

Considerem el cas d'una corba contínua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ que no passi per zero, $\gamma(t) \neq 0$. Si pretenem escriure $\gamma(t)$ en coordenades polars,

$$\gamma(t) = R(t)e^{i\phi(t)},$$

per al terme $R(t)$ no hi ha opció: senzillament $R(t) = |\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ i $R(t)$ és contínua. Ara bé, per a $\phi(t)$ hi ha una infinitat d'opcions i no és evident que existeixi una tria de $\phi(t)$ contínua, però tanmateix és cert; és clar que la funció $\phi(t)$ no és altra cosa que una determinació de l'argument de γ , en el sentit de la definició 1.22.

Teorema 1.23. *Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ és un corba contínua que no passa per l'origen, existeix una determinació contínua ϕ de l'argument de γ . Per tant, $\phi(t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ és l'expressió general de totes les determinacions de l'argument de γ . Si γ és diferenciable, també ho és ϕ i $\phi'(t) = \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$.*

Demostració. Considerem una partició $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ de manera que $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ estigui inclòs en un disc D_i que no contingui el zero; això és possible per la continuïtat de γ i la compacitat de $[a, b]$. Si g_i és una determinació de $\operatorname{Arg} z$ a D_i , $\phi_i = g_i \circ \gamma$ és una determinació de $\operatorname{Arg} \gamma(t)$ a $[t_{i-1}, t_i]$. En el punt t_i , hi tenim dos arguments de $\gamma(t_i)$, que són $\phi_i(t_i)$ i $\phi_{i+1}(t_i)$, que diferiran en un múltiple de 2π ; afegint a ϕ_{i+1} aquest múltiple enter de 2π , aconseguim, per iteració, una determinació global ϕ .

Veiem ara que en un punt t on γ sigui diferenciable, també ho és ϕ i $\phi'(t) = \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$; suposem sense perdre generalitat que $\gamma(t)$ està en el semiplà $\operatorname{Re} z > 0$. Llavors $\phi(t)$ difereix en un entorn de t de la determinació principal $\operatorname{Arg} \gamma(t)$ per una constant i té la mateixa derivada. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x(t) > 0$, és

$$\operatorname{Arg} \gamma(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$

i derivant resulta, efectivament, $\frac{d \operatorname{Arg} \gamma(t)}{dt} = \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$. □

És important adonar-se que el que es demana és que ϕ sigui contínua en el paràmetre t de la corba i que hem provat que una determinació de l'argument de γ sempre existeix, encara que a γ^* no existeixi una determinació de $\arg z$.

Exemple 1.24. La corba $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, té la determinació contínua de l'argument $h(t) = t$, però a $\gamma^* = \mathbb{T}$ no hi ha cap determinació de $\arg z$. □

Si ϕ és una determinació de l'argument de γ , la quantitat $\phi(b) - \phi(a)$, que no depèn de la determinació escollida perquè la constant additiva es cancel·la, s'anomena *variació de l'argument al llarg de γ* i es representa per $\Delta_\gamma \arg$. En el cas de corbes diferenciables a trossos, pel teorema fonamental del càlcul, hom té

$$\Delta_\gamma \arg = \operatorname{Im} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt,$$

perquè $\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(t) dt$ i ara s'aplica el teorema 1.23.

1.5.2 Índex d'una corba tancada

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ és una corba tancada que no passa per l'origen i $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és una determinació de l'argument al llarg de γ , llavors $\phi(a)$ i $\phi(b)$ són arguments del mateix punt i, per tant, $\phi(b) - \phi(a) = \Delta_\gamma \arg$ és un múltiple enter de 2π i té sentit la definició següent:

Definició 1.25. Si γ és una corba tancada que no passa per l'origen, el número enter $\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg$ s'anomena *índex de γ respecte de l'origen* o també el nombre de voltes de γ al voltant de l'origen i es representa per $\text{Ind}(\gamma, 0)$.

En el cas que la corba tancada γ sigui C^1 a trossos, el número $\text{Ind}(\gamma, 0)$ es pot calcular de la manera següent: si $\gamma(t) = R(t)e^{i\phi(t)}$, $R(t) = |\gamma(t)|$, tenim $\gamma'(t) = (R'(t) + iR(t)\phi'(t))e^{i\phi(t)}$ i $\gamma'(t)/\gamma(t) = \left(\frac{R'(t)}{R(t)} + i\phi'\right)$; per tant, $\text{Re} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$ és $\frac{R'(t)}{R(t)}$, la derivada de $\log R(t) = \log |\gamma(t)|$, i resulta

$$\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_a^b \text{Re} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt + i \int_a^b \text{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \log \frac{|\gamma(b)|}{|\gamma(a)|} + i \Delta_\gamma \arg.$$

Així doncs, per a una corba tancada $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, C^1 a trossos hom té

$$\text{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

De manera intuïtiva, $\text{Ind}(\gamma, 0)$ és el nombre de voltes que ens faria el cap si seguíssim amb la vista, situats a l'origen, una partícula que es desplaçés segons la trajectòria $\gamma(t)$. Es tracta d'una quantitat que és invariant per canvis de parametrització que conservin l'orientació i que canvia de signe davant de canvis de parametrització que no la conservin.

Definició 1.26. Si γ és una corba tancada qualsevol i $z \notin \gamma^*$, definim l'índex de γ respecte de z , designat per $\text{Ind}(\gamma, z)$, com $\text{Ind}(\gamma - z, 0)$.

En el cas d'una corba tancada de classe C^1 a trossos parametritzada per $[a, b]$, hom té

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt. \quad (1.6)$$

Com a funció de z , l'índex és una funció contínua en el complementari de γ^* . Aquest fet, per al cas d'una corba C^1 a trossos, que són les que aquí considerarem, es pot provar utilitzant l'expressió integral (1.6) i la demostració, en el cas d'una corba contínua tancada, es proposa com a exercici (vegeu l'exercici 13).

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ és una corba tancada, sabem que el complementari de γ^* en el pla, $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, té una única component connexa no acotada i un conjunt finit o numerable de components connexes acotades. És important fer notar la propietat següent:

L'índex, $\text{Ind}(\gamma, z)$, com a funció de z , és constant en cada una de les components connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma^$ i val zero en la component no acotada.*

En efecte, en cada component $\text{Ind}(\gamma, z)$ és una funció contínua que només pren valors enters i, per tant, ha de ser constant. L'afirmació sobre el component no acotat és intuïtivament clara i es pot justificar també analíticament observant que si movem el punt z podem suposar que hi ha un disc D tal que $z \notin D$ i $\gamma^* \subset D$. Aleshores sobre D es pot prendre una determinació de l'argument de $w - z$ que composta amb γ donarà una determinació de l'argument de $\gamma(t) - z$, la qual, clarament, valdrà el mateix per a $t = a$ i $t = b$.

Exemple 1.27. a) Si considerem una circumferència centrada a l'origen, de radi R i recorreguda m vegades,

$$\gamma(t) = Re^{imt}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(amb m enter) i $z \in \mathbb{C}$, resulta, pel que acabem de dir:

Si $|z| > R$, $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$.

Si $|z| < R$, $\text{Ind}(\gamma, z) = \text{Ind}(\gamma, 0)$ i

$$\text{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{miRe^{imt}}{Re^{imt}} dt = m.$$

Si $|z| = R$, $\text{Ind}(\gamma, z)$ no està definit.

b) Si considerem ara que γ sigui la vora d'un quadrat recorreguda en el sentit directe (antihorari) i z és un punt de l'interior del quadrat, és clar intuïtivament que $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$. Això es pot comprovar també amb el mètode que, tot seguit, descrivim per al càlcul de l'índex. Una prova analítica, fent servir (1.6), d'aquest fet és més llarga i es proposa com a exercici (vegeu l'exercici 12). $\square$

A l'hora de calcular l'índex d'una corba tancada γ respecte d'un punt $z \notin \gamma^*$, a part de la fórmula integral (1.6) vàlida per a corbes de classe C^1 , hi ha un mètode geomètric que és molt útil i fàcil d'aplicar, que és el següent:

Considerem una semirecta qualsevol que surt del punt z ; es pot provar que gairebé totes aquestes semirectes (en el sentit de la mesura de Lebesgue sobre

una circumferència de centre z sobre la qual prenem la direcció de cada semirecta) tallen γ^* en un nombre finit de punts. Fixem una d'aquestes semirectes, diguem-li L i siguin $w_1, \dots, w_n$ els punts de tall de L amb γ^* ,

$$L \cap \gamma^* = \{w_1, \dots, w_n\}.$$

Ara associem a cada punt w_j un número σ_j igual a ± 1 d'acord amb la regla següent:

$\sigma_j = +1$ si γ travessa L , en el punt w_j , en sentit directe.

$\sigma_j = -1$ si γ travessa L , en el punt w_j , en sentit invers.

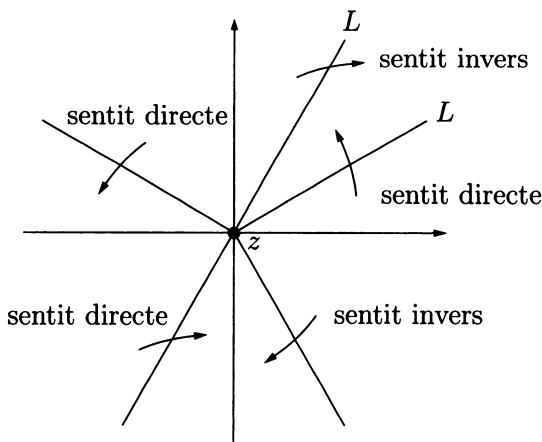


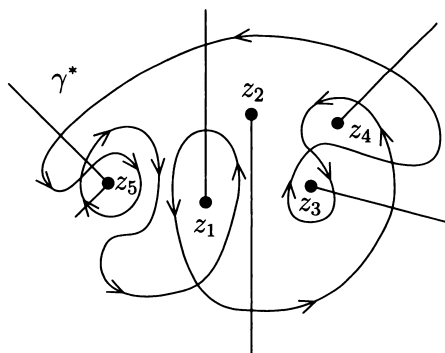
Figura 1.10

Aleshores es compleix

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \sum_{j=1}^n \sigma_j. \quad (1.7)$$

Es diu que γ travessa L en el sentit directe si ho fa en el sentit dels arguments creixents, i en sentit invers si ho fa en el sentit dels arguments decreixents, pensant que l'origen s'ha posat en el punt z (fig. 1.10). La justificació de (1.7) és clara intuïtivament. Una prova rigorosa és més delicada i no la farem aquí.

Exemple 1.28. Vegeu la figura 1.11. □



$$\text{Ind}(\gamma, z_1) = 2;$$

$$\text{Ind}(\gamma, z_2) = 1;$$

$$\text{Ind}(\gamma, z_3) = 0;$$

$$\text{Ind}(\gamma, z_4) = 2;$$

$$\text{Ind}(\gamma, z_5) = -1.$$

Figura 1.11

1.6 Dominis amb vora regular

Si U és un domini del pla, la frontera topològica de U , ∂U , pot ser extraordinàriament complicada. Per aquest motiu, en l'estudi de la teoria de funcions, convé moltes vegades considerar dominis que tinguin una frontera regular. La idea més natural és pensar que la frontera de U està formada per una o diverses corbes tancades. En aquest context és rellevant el *teorema de la corba de Jordan*, del qual recordem aquí l'enunciat (vegeu [6, pàg. 261]).

Teorema 1.29. *Si γ és una corba tancada de Jordan, l'obert $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ té dues components connexes, una que és acotada i una altra que no ho és. La component acotada és simplement connexa i γ^* és la frontera topològica de cadascuna de les components. A més, $\text{Ind}(\gamma, z)$ val 0 si z pertany a la component no acotada i val 1 o -1 si z pertany a la component acotada.*

La component acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ s'anomena *interior de γ* , $\text{Int}(\gamma)$, i la no acotada és l'*exterior de γ* , $\text{Ext}(\gamma)$.

A la vista d'aquest teorema anomenarem *domini de Jordan* tot domini que sigui la component connexa acotada del complementari d'una corba tancada de Jordan. Així doncs, la frontera d'un domini de Jordan és una corba de Jordan tancada. A l'enunciat següent, la prova del qual es deixa com a exercici, es veu que aquesta propietat de la frontera caracteritza els dominis de Jordan.

Proposició 1.30. *Si U és un domini acotat del pla tal que ∂U és una corba de Jordan tancada, llavors U és un domini de Jordan.*

Una idea una mica més general que la de domini de Jordan és pensar que la frontera de U és una varietat de dimensió 1, que és el que toca ser a la frontera

d'una varietat de dimensió 2, com ara és U . Recordem que una *varietat de dimensió 1* o *1-varietat* és un espai topològic M , amb restriccions de numerabilitat, que es pot recobrir per una família d'oberts de M de manera que cada un d'ells és homeomorf a l'interval $(0, 1)$. És evident que una corba tancada de Jordan, que podem pensar com un espai homeomorf a la circumferència unitat $\mathbb{T}$, és una 1-varietat. Si considerem un domini acotat U , la seva frontera ∂U és un compacte que no té per què ser connex. Si suposem ara que ∂U és una 1-varietat, llavors cada component connexa de ∂U és també una 1-varietat que, a més, és compacta i connexa. Doncs bé, resulta que cadascuna d'aquestes components ha de ser una corba tancada de Jordan. Això és a causa del fet següent, ben conegut (vegeu [5, pàg. 127]).

Teorema 1.31. *Tota 1-varietat compacta i connexa és homeomorfa a $\mathbb{T}$ i és, per tant, una corba tancada de Jordan.*

Així doncs, els dominis de Jordan són exactament els dominis acotats del pla complex que tenen per frontera una 1-varietat connexa.

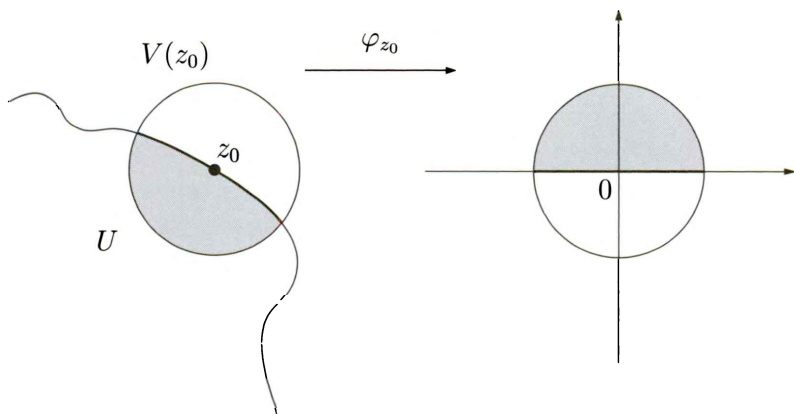


Figura 1.12

Una altra manera d'exigir que un domini acotat U tingui la seva frontera regular és suposar que el compacte $\bar{U}$ sigui una *subvarietat de $\mathbb{R}^2$ amb vora*. Recordem que això significa que cada punt $z_0 \in \partial U$ té un entorn $V(z_0)$, obert de $\mathbb{C}$, de manera que hi ha un homeomorfisme $\varphi_{z_0}: V(z_0) \rightarrow \mathbb{D}$, de $V(z_0)$ sobre el disc unitat $\mathbb{D}$, tal que (fig. 1.12)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \varphi_{z_0}(V(z_0) \cap \partial U) = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z = 0\} \\ \text{b)} \quad & \varphi_{z_0}(V(z_0) \cap U) = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

És clar que si $\bar{U}$ és una subvarietat amb vora, llavors ∂U és una 1-varietat. Així mateix aquesta hipòtesi limita el nombre de components de ∂U :

Proposició 1.32. *Si U és un domini acotat tal que $\bar{U}$ és una subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^2$, llavors ∂U té un nombre finit de components connexes.*

La prova es deixa com a exercici.

Resumint el que hem dit fins ara resulta, doncs, que si U és un domini acotat i $\bar{U}$ és una subvarietat amb vora, llavors la frontera de U està formada per un nombre finit de corbes de Jordan tancades (fig. 1.13). Val la pena fer notar que també és cert el recíproc d'aquest fet, de manera que podem enunciar el resultat següent:

Proposició 1.33. *Si U és un domini acotat del pla, llavors la seva frontera és la reunió d'un nombre finit de corbes tancades de Jordan disjunts entre si, si i només si $\bar{U}$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^2$ amb vora.*

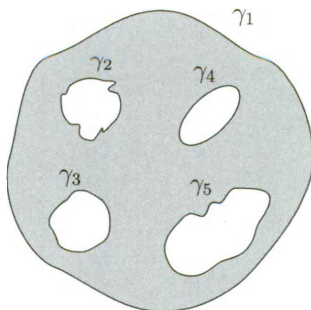


Figura 1.13

Per tal de provar-ho n'hi ha prou de veure que si γ és una corba tancada de Jordan, llavors tant l'interior de γ , més la pròpia γ , com l'exterior de γ , més la corba, són subvarietats amb vora de $\mathbb{R}^2$. Això és una conseqüència del fet que tot homeomorfisme entre una corba de Jordan i $\mathbb{T}$ es pot estendre a un homeomorfisme de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ (teorema de Schoenflies: vegeu [5, pag. 153]).

Totes les consideracions que hem fet fins ara són topològiques en el sentit que no s'ha imposat cap condició de diferenciabilitat, ni a les corbes ni als homeomorfismes. Però les equivalències que hem establert continuen sent vàlides si substituïm corba de Jordan per corba de Jordan regular, 1-varietat per 1-varietat de classe C^1 regular, i subvarietat amb vora per subvarietat amb vora regular. Així, prendrem com a bàsica la definició següent:

Definició 1.34. Direm que un domini acotat U del pla és un domini amb vora regular (resp. amb vora regular a trossos) si la frontera de U està formada per un nombre finit de corbes tancades de Jordan regulars i disjunes entre si (resp. regulars a trossos).

Si, per exemple, considerem que $\overline{U}$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^2$ amb vora regular, llavors l'homeomorfisme $\varphi_{z_0}: V(z_0) \rightarrow D$ entre un entorn de $z_0 \in \partial U$ i el disc unitat $\mathbb{D}$ que satisfà (1.8) és un difeomorfisme entre $V(z_0)$ i $\mathbb{D}$. Això té com a conseqüència que les corbes de Jordan tancades que formen ∂U siguin regulars. El recíproc, és a dir, el fet que si U té vora regular, d'acord amb la definició 1.34, llavors $\overline{U}$ és una subvarietat regular amb vora, es pot provar ara directament utilitzant el teorema de la funció inversa.

Proposició 1.35. Sigui $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ una corba tancada de Jordan regular i $z_0 = \gamma(t_0)$, $0 \leq t_0 \leq 1$. Llavors existeix un entorn $V(z_0)$ del punt z_0 , un disc $D_\delta(t_0)$ de centre $(t_0, 0)$ i un difeomorfisme φ de $D_\delta(z_0)$ sobre $V(z_0)$ de manera que

- a) $\varphi(t, 0) = \gamma(t) \quad |t - t_0| < \delta$
- b) $J_\varphi(t_0, 0) > 0$.

Si ara posem $D_\delta^+ = D_\delta(t_0) \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_\delta^- = D_\delta(t_0) \cap \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$, i $V^+(z_0) = \varphi(D_\delta^+)$, $V^-(z_0) = \varphi(D_\delta^-)$, aleshores es compleix $V^+(z_0) \subset \operatorname{Int}(\gamma)$, $V^-(z_0) \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$ o bé $V^+(z_0) \subset \operatorname{Ext}(\gamma)$, $V^-(z_0) \subset \operatorname{Int}(\gamma)$ (fig 1.14).

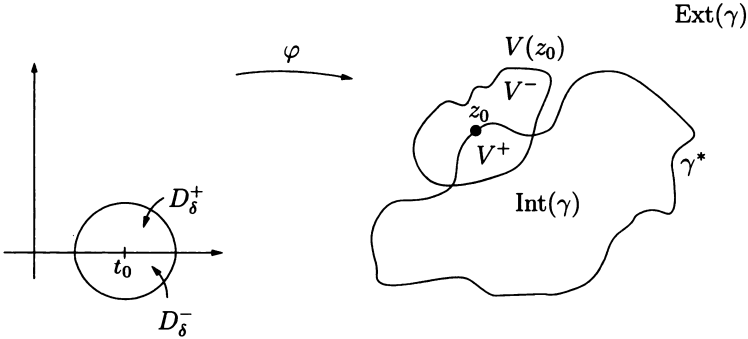


Figura 1.14

Demostració. Siguin $x(t)$, $y(t)$ les components de γ , és a dir, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Com que γ és regular, $\gamma'(t_0) \neq 0$ i podem suposar, per exemple, que $x'(t_0) \neq 0$. Definim al voltant del punt $(t_0, 0)$ la funció φ per $\varphi(t, s) = (x(t), y(t) + s)$

si $x'(t_0) > 0$ o bé $\varphi(t, s) = (x(t), y(t) - s)$ si $x'(t_0) < 0$, de manera que $J_\varphi(t_0, 0) > 0$.

Pel teorema de la funció inversa φ és un difeomorfisme de classe C^1 d'un entorn de $(t_0, 0)$, posem $D_\delta(t_0)$, en un entorn de $\varphi(t_0, 0) = z_0$, posem $V(z_0)$ i $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$, si $|t - t_0| < \delta$. Així, els punts de $V(z_0) \setminus \gamma^*$ es reparteixen en dos oberts connexos que ja podem anomenar $V^+(z_0)$ i $V^-(z_0)$ i que són, precisament, $\varphi(D_\delta^+)$ i $\varphi(D_\delta^-)$.

Com que V^+ , V^- han d'estar continguts en alguna de les components connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, tenim la conclusió de l'enunciat. $\square$

Corol·lari 1.36. *Un domini acotat U del pla és un domini amb vora regular (resp. regular a trossos) si i només si $\overline{U}$ és una subvarietat amb vora regular (resp. regular a trossos) de $\mathbb{R}^2$.*

Analitzem ara una mica més detalladament l'estructura d'un domini amb vora regular i de la seva frontera.

Proposició 1.37. *Sigui U un domini acotat del pla amb vora regular (o regular a trossos). Llavors $\partial U = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$, on γ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ són corbes tancades de Jordan regulars (o regulars a trossos) i disjunts entre si, de manera que:*

- a) $\gamma_i^* \subset \text{Int}(\gamma_1)$, $\text{Int}(\gamma_i) \subset \text{Int}(\gamma_1)$, $i = 2, 3, \dots, N$.
- b) $\text{Int}(\gamma_2), \text{Int}(\gamma_3), \dots, \text{Int}(\gamma_N)$ són disjunts entre si.
- c) $U = \text{Int}(\gamma_1) \setminus (\overline{\text{Int}(\gamma_2)} \cup \dots \cup \overline{\text{Int}(\gamma_N)})$.

Demostració. Ja sabem que ∂U està formada per un nombre finit de corbes tancades de Jordan disjunts i regulars. Suposem que γ_i, γ_j són dues d'aquestes corbes. Llavors la proposició és una conseqüència immediata de les observacions següents:

$$1) \gamma_i^* \subset \text{Int}(\gamma_j) \Rightarrow \text{Int}(\gamma_i) \subset \text{Int}(\gamma_j).$$

En efecte, la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_j^*$ no talla γ_i^* ; per tant, ha d'estar continguda en una component de $\mathbb{C} \setminus \gamma_i^*$ que només pot ser la no acotada; i ara prenem complementaris.

$$2) \text{Int}(\gamma_i) \cap \text{Int}(\gamma_j) = \emptyset \Rightarrow U \subset \text{Ext}(\gamma_i) \cap \text{Ext}(\gamma_j) \text{ (fig. 1.15).}$$

En efecte, si fos $U \subset \text{Int}(\gamma_i)$, no podria ser $\gamma_j^* \subset \partial U$. Anàlogament passaria si fos $U \subset \text{Int}(\gamma_j)$.

$$3) \gamma_i^* \subset \text{Int}(\gamma_j) \Rightarrow U \subset \text{Int}(\gamma_j) \setminus \overline{\text{Int}(\gamma_i)}.$$

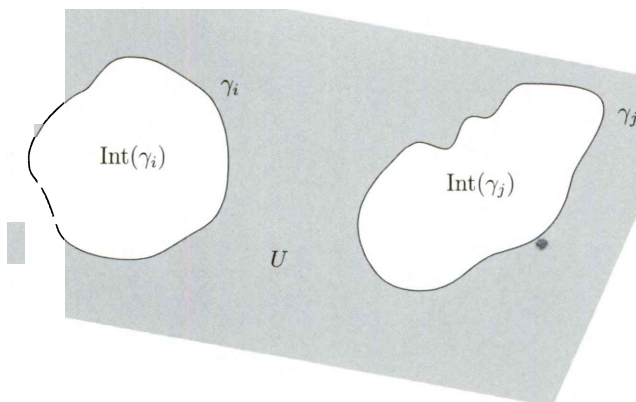


Figura 1.15

En efecte, sabem que $\text{Int}(\gamma_i) \subset \text{Int}(\gamma_j)$. És clar que $U \subset \text{Int}(\gamma_j)$ perquè $\gamma_i^* \subset \partial U$ i no pot ser $U \subset \text{Int}(\gamma_i)$ perquè $\gamma_j^* \subset \partial U$.

D'aquestes consideracions i del fet que U és acotat es dedueix que hi ha una corba de Jordan i només una de ∂U que conté U en el seu interior. Si anomenem γ_1 aquesta corba, i $\gamma_2, \dots, \gamma_N$ les restants, és clar que es compleixen les condicions a), b), c). $\square$

Acabarem aquesta secció fent algun comentari sobre l'orientació de la frontera d'un domini amb vora regular i definirem el que s'entén per recórrer la frontera en sentit positiu.

Suposem que U és un domini acotat amb vora regular (o regular a trossos) de manera que, d'acord amb la proposició 1.37, la frontera de U està formada per les corbes tancades de Jordan $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_N^*$, i considerem cada una d'aquestes corbes separatament (fig. 1.16). Per exemple, fixem $\gamma_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$, i per a cada valor t_0 del paràmetre considerem el punt $z_0 = \gamma_1(t_0)$ i un difeomorfisme φ com a la proposició 1.35. Aleshores, o bé $V^+(z_0) \subset U$ o bé $V^-(z_0) \subset U$. En el primer cas prenem l'orientació de γ_1^* donada per la parametrització $\gamma_1(t)$, i en el segon cas, l'orientació oposada donada per la parametrització $\gamma_1(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$ (vegeu la pàg. 21). De la mateixa manera s'orienten les corbes $\gamma_2, \dots, \gamma_N$ i els sentits de recorregut així definits sobre $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_N^*$ orienten ∂U en el sentit positiu (intuitivament el domini U queda a l'esquerra del recorregut). Si $\vec{T}$ és el camp dels vectors tangents a ∂U donat per aquesta orientació (és a dir, el conjunt dels vectors $\gamma_i'(t)$ per a $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, N$),

el camp $\vec{N} = -i\vec{T}$ s'anomena camp *normal exterior* a ∂U , de manera que $\det(\vec{N}, \vec{T}) > 0$.

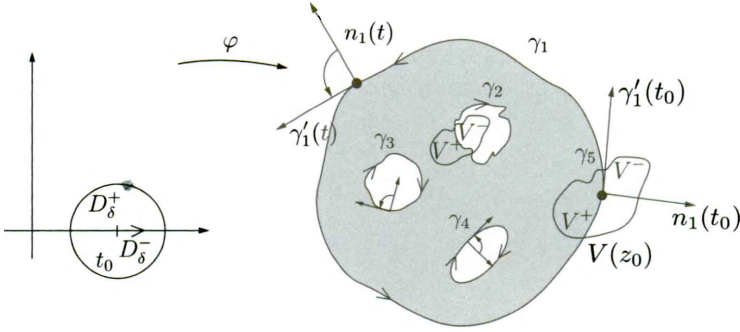


Figura 1.16

Si γ és una corba tancada de Jordan, sabem, pel teorema 1.29, que $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$, per a tot $z \in \text{Int}(\gamma)$ o bé $\text{Ind}(\gamma, z) = -1$, per a tot $z \in \text{Ext}(\gamma)$. En el primer cas es diu que γ està *orientada positivament*, i en el segon, que està *orientada negativament*. Ara és natural preguntar-se quina relació hi ha entre l'orientació de ∂U en sentit positiu i l'orientació de les corbes de Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$, contemplades a la proposició 1.37, en el sentit que acabem de dir. La resposta depèn del lema següent:

Lema 1.38. *Sigui γ una corba tancada de Jordan, regular a trossos, i $U = \text{Int}(\gamma)$ el domini de Jordan que defineix. Llavors l'orientació positiva de γ en el sentit que*

$$\text{Ind}(\gamma, z) = 1, \quad z \in U$$

coincideix amb l'orientació de ∂U en sentit positiu.

Demostració. Suposem que γ està orientada en sentit positiu i veiem que existeix un punt $z_1 \in U$ amb $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 1$. Sigui V un entorn al voltant d'un punt de γ , com a la proposició 1.35 (amb $J_\varphi > 0$), de manera que $V^+ \subset U$ i $V^- \subset \text{Ext}(\gamma)$. Agafem $z_1 \in V^+$ i $z_2 \in V^-$; sabem que $\text{Ind}(\gamma, z_2) = 0$, $\text{Ind}(\gamma, z_1) = \pm 1$ i volem veure que $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 1$. Tallem la corba γ en dos trossos: $\gamma_1^* = \gamma^* \cap V$ i $\gamma_2^* = \gamma^* \setminus \gamma_1^*$. D'acord amb la notació de l'apartat 1.5.1 anomenem $\Delta_\gamma \arg(a)$ la variació de l'argument al llarg de $\gamma(t) - a$, on a és un punt fixat. Llavors, per la definició d'índex, hom té

$$\Delta_\gamma \arg(z_1) = \Delta_{\gamma_1} \arg(z_1) + \Delta_{\gamma_2} \arg(z_1) = \pm 1$$

$$\Delta_\gamma \arg(z_2) = \Delta_{\gamma_1} \arg(z_2) + \Delta_{\gamma_2} \arg(z_2) = 0.$$

Ara bé, pel fet que γ té l'orientació induïda per la positiva de U , és clar que

$$\Delta_{\gamma_1} \arg(z_1) > 0, \quad \Delta_{\gamma_1} \arg(z_2) < 0$$

i, per tant, $\Delta_{\gamma_2} \arg(z_2) > 0$.

Finalment, com que $\Delta_{\gamma_2} \arg(a)$ és una funció contínua de a , $|\Delta_{\gamma_2} \arg(z_1) - \Delta_{\gamma_2} \arg(z_2)|$ és tan petit com es vulgui si z_1 i z_2 són molt pròxims. Es pot aconseguir, doncs, que $\Delta_{\gamma_2} \arg(z_1) > 0$, i llavors ha de ser $\Delta_{\gamma} \arg(z_1) > 0$, és a dir, $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 1$. $\square$

Suposem ara que tenim la descomposició $\partial U = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$, amb les condicions de la proposició 1.37. Com que $U \subset \text{Int}(\gamma_i)$ però $U \subset \text{Ext}(\gamma_i)$, $i = 2, \dots, N$, resulta del lema 1.38 i de la seva prova que si ∂U està orientada en sentit positiu llavors γ_1 està orientada positivament i $\gamma_2, \dots, \gamma_N$ estan orientades negativament, és a dir,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\gamma_1, z) &= 1 & \text{si } z \in \text{Int}(\gamma_1); \\ \text{Ind}(\gamma_i, z) &= -1 & \text{si } z \in \text{Int}(\gamma_i); \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Per aquesta raó, d'ara en endavant anomenarem *orientació positiva* de la frontera d'un domini U amb vora regular o regular a trossos la que correspon a les orientacions donades per (1.9) per a les corbes de Jordan que componen ∂U . Amb les hipòtesis anteriors, si posem, per definició,

$$\text{Ind}(\partial U, z) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}(\gamma_i, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \partial U,$$

tenim la caracterització següent dels punts de U :

$$\begin{aligned} U &= \{z \in \mathbb{C} \setminus \partial U : \text{Ind}(\partial U, z) = 1\}, \\ \mathbb{C} \setminus \bar{U} &= \{z \in \mathbb{C} \setminus \partial U : \text{Ind}(\partial U, z) = 0\}. \end{aligned}$$

1.7 Exercicis

1. Siguin $z_1, \dots, z_N$ punts de pla complex amb $|z_i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$ i $z_1 + \dots + z_N = 0$. Proveu:

- Si $N = 3$, els 3 punts han de ser els vèrtexs d'un triangle equilàter.
- Si $N = 4$, els 4 punts han d'estar diametralment oposats de dos en dos.
- Si $N = 5$, hi ha infinites solucions diferents de les formades per tres punts formant triangle equilàter més dos punts diametralment oposats.

2. Proveu que hi ha números complexos z que compleixen la igualtat

$$|z - a| + |z - b| = |c|,$$

amb $a, b, c \in \mathbb{C}$ donats, si i només si $|a - b| \leq |c|$. En aquest cas calculeu els valors màxim i mínim de $|z|$ quan z varia en aquest conjunt de números i també els punts on s'agafen aquests valors.

3. Trobeu el valor de les sumes

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\frac{jk}{n} 2\pi\right), \quad \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{jk}{n} 2\pi\right)$$

quan n és un número natural i k un número enter que no és múltiple de n .

4. Proveu que la transformació $z \rightarrow w$ definida per a $z \in \mathbb{C}$ per $w = \alpha \bar{z}$ amb $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ és la simetria respecte de la recta que passa per l'origen i té pendent $\tan(\theta/2)$ seguida d'una dilatació.

5. Trobeu la relació que hi ha d'haver entre els coeficients de l'equació $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ per tal que les tres solucions complexes formin un triangle equilàter.

6. Donats tres números complexos u, w, z , considerem els números $\rho = u + \gamma w + \gamma^2 z$ i $\tau = u + \gamma^2 w + \gamma z$ on $\gamma = e^{2i\pi/3}$.

- Com es transformen els números ρ, τ quan efectuem sobre u, z, w una translació, una rotació de centre l'origen o una homotècia?

Proveu que si els números ρ/τ i ρ'/τ' associats als punts u, w, z i u', w', z' , són iguals, llavors els triangles uwz i $u'w'z'$ són semblants.

- Caracteritzeu els triangles uwz per als quals $\rho = 0$ i $\tau = 0$.

7. Siguin z_1, z_2, z_3 tres punts del pla complex i R el radi de la circumferència que passa per aquests punts. Proveu la igualtat

$$\frac{1}{R^2} = \sum_{\sigma} \frac{1}{(z_{\sigma(2)} - z_{\sigma(1)})(\overline{z_{\sigma(3)}} - \overline{z_{\sigma(1)}})}$$

on σ recorre el grup de les permutacions del conjunt $\{1, 2, 3\}$.

8. Trobeu tots els homomorfismes continus del grup additiu de $\mathbb{R}$ en el grup multiplicatiu $\mathbb{T}$.
9. Proveu que si l'aplicació $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ compleix $|\Phi(z) - \Phi(w)| = m|z - w|$, amb $m > 0$, per a tot parell $z, w \in \mathbb{C}$, llavors és $\Phi(z) = \alpha + T(z)$ amb T una aplicació $\mathbb{R}$ -lineal i $\alpha \in \mathbb{C}$. Per tant, Φ és una aplicació conforme o anticonforme seguida d'una translació.
10. Si $z, w \in \mathbb{C}^*$, indiquem per $d(z, w)$ la distància euclidiana a $\mathbb{R}^3$ entre els punts que corresponen a z, w sobre l'esfera S^2 en la projecció estereogràfica. Proveu les fórmules següents:

$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \quad \text{si } z, w \in \mathbb{C}$$

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

11. Proveu que si en un obert U del pla amb $0 \notin U$ hi ha una determinació de $\sqrt{z}$, també hi ha una determinació de $\arg z$.
12. Si γ és la vora d'un quadrat recorreguda en sentit antihorari i z un punt de dins el quadrat, proveu analíticament que $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$.
13. Proveu que si γ és una corba tancada qualsevol, aleshores $\text{Ind}(\gamma, z)$ és una funció contínua de z a cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
14. (Lema del gos). Siguin $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ dues corbes tancades parametritzades a $[a, b]$ que no passen per l'origen de manera que

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \quad t \in [a, b].$$

Proveu que es compleix $\text{Ind}(\gamma_1, 0) = \text{Ind}(\gamma_2, 0)$

15. Sigui $\gamma_n(t)$, $a \leq t \leq b$, $n = 1, 2, \dots$ una successió de corbes tancades i $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, una altra corba tancada de manera que $\gamma_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(t)$

uniformement a $[a, b]$. Proveu que si z és un punt que no és a sobre de γ , es compleix

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \text{Ind}(\gamma_n, z)$$

a partir d'un valor de n en endavant.

16. Poseu un exemple d'una corba tancada γ tal que $\text{Ind}(\gamma, z)$ sigui una funció de z no acotada quan $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

17. Sigui $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, una corba tancada de longitud finita $L(\gamma)$. Proveu que hi ha una successió de poligonals tancades $P_n(t)$, $a \leq t \leq b$, $n = 1, 2, \dots$ que compleixen

a) $P_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma(t)$ uniformement a $[a, b]$.

b) $L(P_n) \nearrow L(\gamma)$.

c) $\lim_n \text{Ind}(P_n, z) = \text{Ind}(\gamma, z)$ si $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma^* \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^*)$.

18. Sigui $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ una corba tancada de classe C^1 tal que $\gamma^* \subset \mathbb{T}$, $\text{Ind}(\gamma, 0) = n$ i $L(\gamma) = 2\pi|n|$ per a un enter n . Proveu que si $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, és una determinació contínua de $\arg \gamma'(t)$, llavors $\varphi(t)$ és una funció monòtona a l'interval $[0, 2\pi]$, és a dir, γ fa $|n|$ voltes a $\mathbb{T}$ en sentit directe o invers.

19. Poseu un exemple d'una corba tancada de Jordan, γ , amb $L(\gamma) = +\infty$.

20. Sigui $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, una corba regular, és a dir, de classe C^1 amb $\gamma'(t) \neq 0$, $a \leq t \leq b$. Proveu:

a) Existeixen constants $m, \mu > 0$ i $\delta > 0$ tals que

$$m|t - s| \leq |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \mu|t - s| \quad \text{si} \quad t, s \in [a, b] \quad \text{i} \quad |t - s| < \delta.$$

b) Existeix una constant $K > 0$ tal que

$$\int_{\{t: |\gamma(t) - z| < r\}} |\gamma'(t)| dt \leq Kr$$

per a $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$.

21. Un domini acotat del pla amb vora regular que sigui simplement connex és un domini de Jordan. És certa l'afirmació per a tot domini acotat simplement connex?

22. Sigui U un obert del pla tal que $C^* \setminus U$ és connex. Proveu que cada component connexa de U és un domini simplement connex.

- 23.** Sigui $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció amb derivada contínua. Proveu que el domini, tipus subgraf,

$$U = \{(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$$

és un domini simplement connex amb vora regular a trossos.

Capítol 2

Funcions de variable complexa

L'objectiu d'aquest capítol és fixar la idea de funció de variable complexa, descriure les funcions que apareixen amb més freqüència com ara l'exponencial, el logaritme complex o les funcions trigonomètriques i estendre al camp complex el càlcul diferencial. La manera més important de definir noves funcions de variable complexa és a través de les sèries de potències. Per aquest motiu les sèries de potències complexes s'estudien detalladament posant èmfasi en el fet que el domini natural de les sèries de potències, també de les de variable real, es troba en el pla complex.

L'extensió de la noció de derivada a les funcions de variable complexa porta al concepte de funció holomorfa, el qual és considerat des d'un punt de vista analític i des d'un punt de vista geomètric. Les sèries de potències defineixen funcions holomorfes; però, de fet, hi ha una connexió molt més profunda entre funcions holomorfes i sèries de potències perquè, tal com es veurà en el capítol 4, tota funció holomorfa és, localment, la suma d'una sèrie de potències.

L'estudi de les funcions que s'expressen, localment, com a suma de sèries de potències, anomenades funcions analítiques, va, doncs, íntimament lligat a l'estudi de les funcions holomorfes. Per aquesta raó es dediquen els últims apartats del capítol a les funcions analítiques tant de variable complexa com de variable real. La inclusió de les funcions analítiques de variable real és significativa perquè aquestes funcions només adquireixen tot el seu sentit quan es miren des de l'òptica de la variable complexa.

2.1 Polinomis de variables reals, polinomis de variable complexa, funcions racionals

En general, considerarem funcions $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ definides en un domini U del pla complex i que prenen valors complexos. Les podem representar en la forma $f = u + iv$, on $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ són funcions reals definides a U .

Les funcions més senzilles són *els polinomis en la variable complexa z* , $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$, amb $a_n \in \mathbb{C}$, que són funcions definides a tot $\mathbb{C}$. Recordem que, pel teorema fonamental de l'àlgebra, hom pot escriure

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

on els punts α_i són els zeros de P , comptant multiplicitats. És important distingir entre aquests polinomis i els polinomis de les dues variables reals x, y . És evident que si partim d'un polinomi $P(z)$ i substituïm z per $z = x + iy$, obtenim un polinomi $P(x, y)$ en les variables x, y amb coeficients complexos; també podem posar $P(z) = P_1(x, y) + iP_2(x, y)$ amb P_1, P_2 polinomis amb valors reals; per exemple,

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Però no tot polinomi en x, y amb coeficients complexos (o equivalentment tot polinomi $P_1 + iP_2$ amb P_1, P_2 amb valors reals) és un polinomi en z ; per exemple, $x^2 + y^2$ no ho és i, de fet, veurem més endavant que cap polinomi que prengui només valors reals no pot ser-ho.

Com podem reconèixer si un polinomi $P(x, y)$ és, de fet, un polinomi $P(z)$ en z ? Aquesta pregunta es pot resoldre algebraicament, trobant $P(z)$ directament: només cal expressar x, y en termes de $z, \bar{z}$,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

substituir aquestes variables en el polinomi $P(x, y)$, i el que ha de passar és que no aparegui cap terme en $\bar{z}$. Una altra manera de respondre a aquesta pregunta és la següent:

Sigui $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ una funció complexa de la variable real t que, si és contínua, podem pensar que representa una corba en el pla complex. A (1.2) ja hem definit la derivada $\gamma'(t)$ d'aquesta funció com

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

en els punts on aquest límit existeix. En aquest cas es compleix $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Les propietats formals de la derivada $\gamma'(t)$ són les mateixes que en el cas de funcions que prenen valors reals. Així, per exemple, si $m \in \mathbb{N}$ resulta

$$(\gamma(t)^m)' = m\gamma(t)^{m-1}\gamma'(t)$$

que és conseqüència de la igualtat (1.3). Resulta així que si $P(z) = \sum_{l=1}^n a_l z^l$ és un polinomi en z , hom té

$$[P(\gamma(t))]' = \gamma'(t) \sum_l l a_l \gamma(t)^{l-1}.$$

Si ara, tal com sembla natural, designem per $P'(z)$ el polinomi $\sum_l l a_l z^{l-1}$, tenim la regla

$$[P \circ \gamma]' = \gamma' P'(\gamma).$$

Doncs bé, resulta que els polinomis en z són els únics que tenen aquesta propietat. En efecte: suposem que $P(x, y) = \sum_{k,j} a_{k,j} x^k y^j$ té la propietat

$$[P \circ \gamma]' = \gamma' Q(\gamma),$$

per a algun polinomi Q i per a tota funció $\gamma(t)$ derivable i provem que P és un polinomi en z . Prenent $\gamma(t)$ paral·lela a l'eix de les abscisses, $\gamma(t) = t + ib$, $b \in \mathbb{R}$, tindrem $\frac{\partial P}{\partial x} = Q$ i prenent $\gamma(t)$ paral·lela a l'eix de les ordenades, $\gamma(t) = a + it$, $a \in \mathbb{R}$, tindrem $\frac{\partial P}{\partial y} = iQ$. Així doncs,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = i \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.1)$$

és a dir, $j a_{k,j} = i(k+1) a_{k+1,j-1}$. Introduint els números $b_{k,j} = k! j! a_{k,j} (-i)^j$, l'equació anterior significa que $b_{k+1,j-1} = b_{k,j}$, és a dir, per iteració, que $b_{k,j}$ només depèn del valor $k+j = l$. Així, $b_{k,j} = b_{k+j,0}$. Resulta, doncs, $k! j! a_{k,j} = (k+j)! a_{k+j,0} i^j$ o bé

$$a_{k,j} = \binom{k+j}{k} i^j a_{k+j,0}$$

i, per tant, $P(z) = \sum_l a_{l0} z^l$. En conseqüència, hem vist analíticament que la relació $[P \circ \gamma]' = \gamma' Q(\gamma)$ per a un polinomi Q i per a qualsevol $\gamma(t)$ es compleix si i només si P és un polinomi en z i, en aquest cas, és $Q = P'$.

També destacarem les *funcions racionals*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

on P , Q són polinomis en z . Simplificant els possibles factors irreductibles comuns, podem suposar que P , Q no tenen zeros en comú; en aquest cas, la funció R deixa d'estar definida en el conjunt $Z(Q)$ dels zeros de Q , que s'anomenen també *pols de R* . Així, R és una funció contínua a $\mathbb{C} \setminus Z(Q)$. Tota funció racional R té una descomposició única com a suma d'un polinomi (que només apareix si el grau de P és més gran o igual que el de Q) i de fraccions simples, és a dir, fraccions del tipus

$$\frac{a}{(z - \alpha)^k},$$

on $\alpha \in Z(Q)$, a és una constant i k és menor o igual que la multiplicitat de α com a zero de Q . Aquest resultat es pot provar de manera purament algebraica, però també en donarem una demostració analítica més endavant (vegeu el teorema 5.13).

Observem que tota funció racional, $R = P/Q$, defineix una funció contínua de $\mathbb{C}^*$ a $\mathbb{C}^*$ si posem $R(a) = \infty$ quan a és un pol de R i $R(\infty) = \infty$ si $\text{gr}(P) > \text{gr}(Q)$ o bé $R(\infty) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z)$ (finit) si $\text{gr}(P) \leq \text{gr}(Q)$, on $\text{gr}(\cdot)$ indica el grau del polinomi corresponent.

2.2 La funció exponencial de variable complexa, logaritmes i potències. Funcions trigonomètriques

2.2.1 La funció exponencial

Després dels polinomis, possiblement, la funció que apareix amb més freqüència en l'Anàlisi és la funció exponencial. A més de la funció exponencial de variable real, e^x , coneixem també la funció exponencial quan l'exponent és un número imaginari pur, $z = it$, que ha estat introduïda en l'apartat 1.4.1, d'acord amb la definició

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (2.2)$$

L'extensió a un exponent complex qualsevol és la següent:

Definició 2.1. Per a $z = x + iy$, es defineix l'exponencial de z en base e com

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

En particular, si $z = iy$ és $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ i retrobem la definició ja donada quan z és imaginari pur. En general, és $e^z = e^x \cdot e^{iy}$. La igualtat (2.2) es coneix com a *identitat d'Euler*.

Utilitzant les fórmules (1.1) per al sinus i el cosinus d'una suma, es comprova de seguida que es compleix la regla

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad \text{si } z, w \in \mathbb{C}.$$

Aquesta relació és la propietat fonamental de la funció exponencial. En particular, hom té $e^{-z} = 1/e^z$ i $e^z \neq 0$, per a tot $z \in \mathbb{C}$. L'equació $e^z = 1$ té infinites solucions: $z = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. La funció exponencial és periòdica de període $2\pi i$: $e^{z+2\pi ki} = e^z$, $k \in \mathbb{Z}$. També $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\operatorname{Im} z \in \arg e^z$ i $e^z = e^w$ si i només si $z - w$ és un múltiple enter de $2\pi i$.

L'aplicació exponencial és bijectiva de la banda $B = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i, per tant, injectiva també en tota banda horitzontal d'amplada menor que 2π . La recta horitzontal $y = y_0$ es transforma, per la funció exponencial, en la semirecta oberta que surt de l'origen i forma un angle y_0 amb l'eix Ox i la recta vertical $x = x_0$ en el cercle centrat a l'origen de radi e^{x_0} (fig 2.1).

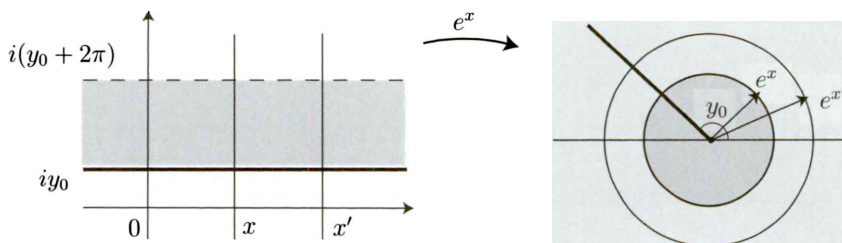


Figura 2.1

Una recta $y = mx$, de pendent $m \neq 0$, es transforma en la corba d'equació paramètrica $x \rightarrow e^x \cdot e^{imx}$, que és una espiral (fig. 2.2).

2.2.2 Logaritmes

Tan important com la funció exponencial ho és la seva inversa que és la funció logaritme.

Definició 2.2. Per a $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, anomenem *logaritme* de z , $\log z$, qualsevol número complex w tal que $e^w = z$.

En variable real, la funció exponencial és una bijecció de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$ i, per tant, només els números reals positius tenen definit un logaritme real que és únic. Això defineix la funció logaritme (neperià) $\operatorname{Log}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, inversa de l'exponencial. En el cas complex, si resollem l'equació $e^w = z$, equivalent

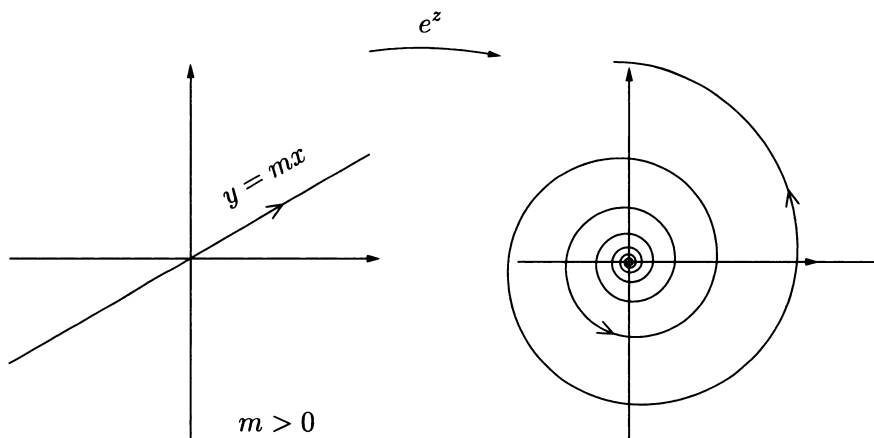


Figura 2.2

a $e^{\operatorname{Re} w} e^{i \operatorname{Im} w} = |z| e^{i \arg z}$, veiem que tots els logaritmes tenen la mateixa part real, $\operatorname{Log} |z|$, i que la seva part imaginària és un argument de z , és a dir,

$$\log z = \operatorname{Log} |z| + i \arg z.$$

Per tant, dos logaritmes de z difereixen en un múltiple enter de $2\pi i$.

Definició 2.3. D'entre tots els logaritmes de z , el definit per $\operatorname{Arg} z$ s'anomena *logaritme principal* de z i el designem per $\operatorname{Log} z$,

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Quan z és real i positiu, aquest logaritme coincideix amb el logaritme neperià. Així Log és una funció complexa definida a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i, igual que la funció argument principal, és discontinua en el semieix real negatiu. La regla

$$\log zw = \log z + \log w$$

és vàlida si interpretem que es tracta de conjunts i de sumes de conjunts. Però la regla $\operatorname{Log} zw = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$ no ho és; per exemple, $z = w = -1 - i$ tenen $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} w = \operatorname{Log} \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i$, mentre que $zw = 2i$ té $\operatorname{Log} zw = \operatorname{Log} 2 + \frac{\pi}{2}i$.

De manera anàloga al que hem fet per a l'argument, parlarem de *determinacions contínues del logaritme*.

Definició 2.4. Una *determinació contínua del logaritme en un conjunt connex* $E \subset \mathbb{C}$, que no contingui el zero, és una funció g contínua a E tal que $e^{g(z)} = z$,

si $z \in E$. Més generalment, si $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció definida en un conjunt E qualsevol i $f(z) \neq 0$ per a $z \in E$, llavors una determinació contínua de $\log f$ és una funció contínua g definida a E de manera que $e^{g(z)} = f(z)$, $z \in E$.

És obvi que és equivalent parlar de determinacions contínues del logaritme que de determinacions contínues de l'argument, ja que l'argument és la part imaginària del logaritme i la part real ja està completament determinada. Per exemple, Log és una determinació contínua del logaritme fora dels nombres reals no positius. En el complement de tota semirecta i, en particular, en tot disc que no inclogui el zero, hi ha determinacions contínues del logaritme. Així mateix, tenim el concepte de determinació del logaritme al llarg d'una corba γ i un anàleg del teorema 1.23 per al logaritme. Ara, si $h(t)$ és una determinació del logaritme al llarg de la corba diferenciable $\gamma(t)$, hom té $e^{h(t)} = \gamma(t)$ i $h'(t) = \gamma'(t)/\gamma(t)$.

2.2.3 Potències complexes

Definició 2.5. Donats els números $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, definim z^w com el conjunt de números complexos

$$z^w = e^{w \log z} \text{ on } \log z \text{ és qualsevol logaritme de } z. \quad (2.3)$$

Quan per a $\log z$ triem la determinació principal, $e^{w \text{Log } z}$ s'anomena determinació principal de z^w . En general, si $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció definida en un conjunt connex E amb $f(z) \neq 0$, $z \in E$, i $w \in \mathbb{C}$, una determinació contínua de f^w és una funció contínua $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in [f(z)]^w$, $z \in E$.

És evident que si hi ha una determinació contínua h de $\log f$, llavors $g(z) = e^{wh(z)}$ és una determinació contínua de f^w . Com que dos logaritmes de z tenen per diferència un múltiple enter de $2\pi i$, dos possibles valors de z^w difereixen en un factor $e^{2k\pi iw}$, $k \in \mathbb{Z}$ i tenen, per tant, el mateix mòdul, que és $|z|^w$, si w és real. Si w és un enter m , tots aquests factors són 1 i en aquest cas el conjunt de potències es redueix a l'únic valor $z^m = z \cdots z$ (m vegades) si $m > 0$, o bé $z^m = z^{-1} \cdots z^{-1}$ si $m < 0$. Si w és racional amb expressió irreductible $\frac{n}{m}$, llavors la definició 2.5 coincideix amb la que s'ha donat a l'apartat 1.1.2 i $z^{n/m}$ és un conjunt finit de m números. Si w és irracional, llavors

$$z^w = e^{w \text{Log } |z|} \cdot e^{iw \text{Arg } z} \cdot e^{2k\pi iw}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

i aquest conjunt és una successió densa de punts en la circumferència de centre 0 i radi $|z|^w$. Si $w = it$ és imaginari pur, resulta

$$z^w = e^{it \text{Log } |z|} \cdot e^{-t \text{Arg } z} \cdot e^{-t2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 2.6. 1^w és el conjunt format per $e^{2\pi i k w}$, $k \in \mathbb{Z}$, i en el cas $w = it$, aquest conjunt està format pels números reals $e^{-2\pi t k}$, $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Observem que, en general, és $\log z^w = w \log z + 2\pi \mathbb{Z}i$, entesa la igualtat com una igualtat de conjunts. Regles de l'aritmètica com ara

$$(z^w)^\eta = z^{w\eta} \quad (2.4)$$

han de ser convenientment interpretades. El terme de l'esquerra és α^η , amb $\alpha = z^w$; per tant,

$$(z^w)^\eta = e^{\eta \log \alpha} = e^{\eta(w \log z + 2\pi \mathbb{Z}i)} = e^{\eta w \log z + 2\pi \eta k i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'aquí es desprèn que el conjunt $(z^w)^\eta$ conté el conjunt $z^{w\eta}$, i són iguals només si η és enter. Només si w, η són tots dos enters, (2.4) és una igualtat vàlida entre números. En altres casos la seva aplicació pot portar a conclusions absurdes, com ara provar que tot complex $z \neq 0$ val 1 segons l'argumentació següent: com que $z \neq 0$, $z = e^w$, per a algun w ; posem $\eta = w/2\pi i$. Llavors $z = e^w = e^{2\pi i \eta} = (e^{2\pi i})^\eta = 1^\eta = 1!!$

2.2.4 Funcions trigonomètriques

De la identitat d'Euler (2.2) es dedueix que les funcions trigonomètriques de la variable real x es poden expressar en termes de l'exponencial complexa mitjançant les fórmules

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

L'extensió d'aquestes funcions al camp complex s'obté posant, per definició,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

D'aquesta definició resulta que $\cos z, \sin z$ són funcions definides a tot $\mathbb{C}$, periòdiques de període 2π , és a dir, $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$ i $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$, $k \in \mathbb{Z}$. També és immediat comprovar la validesa de les fórmules d'addició:

$$\begin{aligned} \cos(z + w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(z + w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w \end{aligned} \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad (2.6)$$

així com la relació fonamental

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad z \in \mathbb{C}.$$

A diferència del cas real les funcions $\sin z, \cos z$ no són ara funcions acotades. Per exemple, $\cos ix = \frac{e^{-x} + e^x}{2} \rightarrow \infty$ quan $x \rightarrow \pm\infty$.

2.2.5 Funcions hiperbòliques

D'una manera semblant es poden considerar també les *funcions hiperbòliques de la variable complexa* z , definides per

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Aquestes funcions estan vinculades amb les funcions trigonomètriques per les relacions

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.7)$$

i satisfan la igualtat $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. També valen les fórmules d'addició

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z + w) &= \operatorname{ch} z \cdot \operatorname{ch} w + \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{sh} w \\ \operatorname{sh}(z + w) &= \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} w + \operatorname{ch} z \cdot \operatorname{sh} w \end{aligned} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Si apliquem les fórmules d'addició (2.6) a $\cos z = \cos(x + iy)$ i tenim en compte les relacions (2.7), hom té

$$\operatorname{Re} \cos(x + iy) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y \quad \operatorname{Im} \cos(x + iy) = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{Re} \sin(x + iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y \quad \operatorname{Im} \sin(x + iy) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Ara es pot calcular $|\cos z|$ i $|\sin z|$. Posant sempre $z = x + iy$ resulta $|\cos z|^2 = (\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2 = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$. És a dir,

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

i, anàlogament,

$$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}.$$

D'aquestes igualtats es dedueixen les estimacions

$$|\operatorname{sh} y| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch} y$$

$$|\operatorname{sh} y| \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch} y,$$

que ens diuen que $|\cos z|, |\sin z| \rightarrow \infty$ quan $|y| \rightarrow \infty$, és a dir, quan ens allunyem de l'eix x , i que el creixement de $|\cos z|, |\sin z|$ és més ràpid que el de $|\operatorname{sh} y|$ i més lent que el de $|\operatorname{ch} y|$.

2.3 Sèries de potències

Una manera molt important de definir noves funcions és fent servir les *sèries de potències de la variable complexa* z . El domini natural de definició de les sèries de potències, també de les de variable real, es troba, com veurem, dins el pla complex.

2.3.1 Sèries numèriques complexes

La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ de terme general $z_n \in \mathbb{C}$, s'anomena *convergent* amb suma S si les sumes parcials $\sum_{n=0}^N z_n$ tenen límit S , quan $N \rightarrow \infty$. Si $z_n = x_n + iy_n$ i $S = A + iB$, això equival al fet que les sèries reals $\sum x_n$, $\sum y_n$ siguin convergents amb suma A , B , respectivament.

Hom diu que la sèrie $\sum z_n$ *convergeix absolutament* si la sèrie dels mòduls $\sum |z_n|$ convergeix; novament això equival al fet que la sèrie de les parts reals i la sèrie de les parts imaginàries tinguin la mateixa propietat.

Exemple 2.7. Considerem la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$. La seva part real és $\sum \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$, que és una sèrie alternada amb el terme general de mòdul decreixent cap a zero i, per tant, és convergent; en mòdul és comparable a $\frac{1}{n}$, i, per tant, la part real no és absolutament convergent. La part imaginària és $\sum \frac{1}{1+n^2}$ que, en ser de termes positius i comparable a la sèrie de terme general $\frac{1}{n^2}$, és absolutament convergent. Així doncs, la sèrie complexa és convergent, però no absolutament convergent. $\square$

El resultat següent, sobre les diverses maneres de sumar una sèrie, ens serà útil més endavant.

Proposició 2.8. *a) Una sèrie de termes complexos és absolutament convergent amb suma S si i només si totes les seves reordenades són convergents amb la mateixa suma S .*

b) Una sèrie absolutament convergent pot ser sumada per blocs de manera arbitrària.

El significat de la proposició és que si hom té una família numerable $\{z_\alpha\}$, $\alpha \in A$ tal que, en algun ordre, els mòduls tenen suma finita, aleshores aquesta

família té una suma $\sum_{\alpha \in A} z_\alpha$ ben definida, independent de l'ordre en el qual escrivim els seus termes (en diem una *família sumable*) i, a més, podem calcular la suma per blocs; això és, si A és la reunió disjunta dels conjunts A_i , $i \in I$, es compleix $\sum_{\alpha \in A} z_\alpha = \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} z_\alpha$.

Demostració. De l'apartat a) demostrarem només que si $\sum z_n$ és una sèrie absolutament convergent amb suma S , llavors qualsevol reordenada també és absolutament convergent amb la mateixa suma. El recíproc, per a sèries de termes reals, es pot trobar a [10, pàg. 76], i per a sèries complexes només cal separar la part real i la part imaginària, però aquesta implicació no la farem servir. Sigui, doncs, $\sum w_n$ una reordenació de la sèrie $\sum z_n$, que suposem que és absolutament convergent amb suma S , i posem $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$, $T_n = \sum_{k=1}^n w_k$.

Si S_m conté tots els termes de T_n , aleshores $\sum_{k=1}^n |w_k| \leq \sum_{k=1}^m |z_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |z_k| < +\infty$ i, per tant, $\sum w_n$ també és absolutament convergent. Ara, donat $\varepsilon > 0$, triem un n de manera que

$$|S - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^\infty |z_k| < \varepsilon.$$

Si T_m conté tots els termes de S_n i $r \geq m$, serà

$$|T_r - S_n| < \varepsilon$$

i, en definitiva,

$$|S - T_r| \leq |S - S_n| + |S_n - T_r| < 2\varepsilon, \text{ si } r \geq m,$$

és a dir, $\sum w_n = S$.

Per a la part b), comencem per observar que és clar que cada bloc $\sum_{\alpha \in A_i} z_\alpha$ és una sèrie absolutament convergent pel fet de ser-ho la sèrie total $\sum_{\alpha \in A} z_\alpha$. Posem ara $S_i = \sum_{\alpha \in A_i} z_\alpha$ si $i \in I$; la sèrie $\sum_{i \in I} S_i$ també és absolutament convergent perquè si ordenem d'alguna manera els índexs de I , diguem $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ i prenem una suma finita, serà

$$\sum_{k=1}^n |S_{i_k}| \leq \sum_{\alpha \in A_{i_1}} |z_\alpha| + \dots + \sum_{\alpha \in A_{i_n}} |z_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in A} |z_\alpha| < +\infty.$$

Ordenem ara els índexs de A en la successió $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$ i, donat $\varepsilon > 0$, triem N de manera que

$$\sum_{n>N} |z_{\alpha_n}| < \varepsilon.$$

Ara podrem trobar un conjunt finit d'índexs $i_1, i_2, \dots, i_{r_0}$ de I tal que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} \subset A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_{r_0}}$. Llavors tindrem, per a tot $r \geq r_0$,

$$\begin{aligned} \left| S_{i_1} + \dots + S_{i_r} - \sum_n z_{\alpha_n} \right| &\leq \left| S_{i_1} + \dots + S_{i_r} - \sum_{n \leq N} z_{\alpha_n} \right| + \\ &+ \left| \sum_{n \leq N} z_{\alpha_n} - \sum_n z_{\alpha_n} \right| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Això vol dir que $\sum_{\alpha \in A} z_{\alpha} = \sum_{i \in I} S_i = \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} z_{\alpha}$. □

Per a il·lustrar com s'apliquen aquestes propietats considerem les *sèries dobles* $\sum_{n,m \in \mathbb{N}} z_{n,m}$. Podem pensar que els números $\{z_{n,m}\}$ són les entrades d'una matriu infinita, que n representa l'índex de les files i m el de les columnes. Una possibilitat és sumar els termes de la matriu primerament per files, $\sum_m z_{n,m}$, i després sumar els resultats obtinguts, $\sum_n \sum_m z_{n,m}$. Alternativament, podem sumar primerament per columnes i després sumar els resultats. En general, les dues formes de suma no donen el mateix, és a dir, que la identitat

$$\sum_n \sum_m z_{n,m} = \sum_m \sum_n z_{n,m} \quad (2.8)$$

no és certa; pot passar que un terme tingui sentit i l'altre no, i també que tots dos tinguin sentit però valors diferents. Per exemple, si prenem $z_{n,m} = 1$ si $n = m + 1$, $z_{n,m} = -1$ si $n = m - 1$ i $z_{mn} = 0$ en els altres casos, resulta que es compleix $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} z_{n,m} = -1$ però $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z_{mn} = 1$. Ara bé, de la proposició 2.8 es dedueix que si $\sum_n \sum_m |z_{n,m}|$ és finita, o bé ho és $\sum_m \sum_n |z_{n,m}|$, aleshores tots dos membres de (2.8) tenen sentit i són iguals. Aquest enunciat és, de fet, el teorema de Fubini per a sèries. Com a aplicació d'aquest resultat, estudiem ara la multiplicació de sèries de termes complexos:

Proposició 2.9. *Suposem que $\sum_n a_n$ és absolutament convergent amb suma A i que $\sum_n b_n$ també ho és amb suma B . Aleshores la sèrie $\sum_k c_k$, on $c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}$, és absolutament convergent amb suma AB .*

Demostració. És evident que $\sum_k |c_k| \leq \sum_{n,m} |a_n| |b_m| = (\sum_n |a_n|)(\sum_m |b_m|) < \infty$ i, per tant, la sèrie $\sum_k c_k$ és absolutament convergent. Això mateix demostra que la sèrie doble $\sum_{n,m} a_n b_m$ és sumable (absolutament convergent); sumant en m i després en n s'obté AB , i agrupant $a_n b_m$ en els blocs definits per $n + m = k$, k fix, s'obté $\sum_k c_k$. $\square$

La sèrie $\sum_k c_k$ de la proposició anterior s'anomena *producte de Cauchy* de les sèries $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$.

2.3.2 Sèries de funcions

També serà necessari disposar de criteris de convergència uniforme per a sèries de funcions $\sum_n f_n(p)$, els termes de les quals són funcions f_n definides en un conjunt arbitrari X i amb valors complexos. Recordem que la noció de convergència uniforme és la que garanteix la continuïtat de la suma en el cas que a X hi hagi definida una topologia i que cada funció f_n sigui contínua sobre X .

Teorema 2.10 (Criteri M de Weierstrass). *Si $|f_n(p)| \leq M_n$, per a tot $p \in X$, $n \geq 1$ i es compleix $\sum_n M_n < +\infty$, llavors la sèrie $\sum_n f_n(p)$ és uniformement convergent a X .*

Demostració. Comprovem que se satisfà el criteri de Cauchy de convergència uniforme. En efecte, si $m > n$, hom té per a $\varepsilon > 0$ prefixat

$$\left| \sum_n^m f_k(p) \right| \leq \sum_n^m |f_k(p)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

per a n prou gran, perquè $\sum M_n < +\infty$. $\square$

Per exemple, amb aquest criteri es veu que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b^n \pi x)$ amb $a, b \in \mathbb{R}$ i $0 < a < 1$ és uniformement convergent a $\mathbb{R}$ i, per tant, defineix una

funció contínua a la recta. Weierstrass va fer servir la sèrie anterior amb b un enter senar i $ab > 1 + 3\pi/2$ per a construir una funció que tot i ser contínua a $\mathbb{R}$ no és derivable en cap punt.

Per als criteris següents necessitem la *fórmula de suma parcial d'Abel*.

Lema 2.11. *Siguin (a_n) , (b_n) dues successions de números complexos i posem $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Aleshores*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k). \quad (2.9)$$

Demostració. Si posem $A_0 = 0$, tenim

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

La fórmula de suma parcial d'Abel és la versió discreta de la fórmula d'integració per parts. Ho veurem millor si l'escrivim en termes de A_n i b_n , com a la prova anterior, és a dir,

$$\sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Aquesta igualtat es correspon amb la fórmula

$$\int_a^b A'(x) b(x) dx = A(x) b(x) \Big|_a^b - \int_a^b A(x) b'(x) dx,$$

on l'operació de derivar sobre funcions correspon a passar de la successió (A_k) a la successió $(A_k - A_{k-1})$ i de la successió (b_k) a la successió $(b_{k+1} - b_k)$.

Teorema 2.12 (Criteri de Dirichlet). *Considerem una sèrie de funcions del tipus $\sum_n f_n(p) g_n(p)$ on les funcions $f_n(p)$ són complexes i les funcions $g_n(p)$*

són reals per a $p \in X, n \geq 1$. Indiquem per $F_n(p) = \sum_{k=1}^n f_k(p)$ la suma parcial n -èsima de $\sum f_n(p)$ i suposem que hi ha una constant $M \geq 0$ tal que $|F_n(p)| \leq M$, per a $n \geq 1, p \in X$. Suposem també que la successió $(g_n(p))$ és monòtona decreixent, $g_n(p) \geq g_{n+1}(p)$, $p \in X, n \geq 1$ i que convergeix uniformement cap a zero a X . Aleshores la sèrie $\sum_n f_n(p) g_n(p)$ és uniformement convergent a X .

Demostració. Fixem $\varepsilon > 0$. Per (2.9), si $n < m$, és

$$\sum_{k=n}^m f_k(p)g_k(p) = \left(\sum_{k=n}^m f_k(p) \right) g_{m+1}(p) - \sum_{k=n}^m \left(\sum_{\ell=n}^k f_\ell(p) \right) (g_{k+1}(p) - g_k(p)) \quad (2.10)$$

i aquesta expressió té el seu mòdul dominat per

$$2Mg_{m+1}(p) + 2M \sum_{k=n}^m (g_k(p) - g_{k+1}(p)) = 2Mg_n(p)$$

i, per tant, és més petita que ε , per a tot $p \in X$, si n és prou gran. $\square$

Exemple 2.13. Sumant una progressió geomètrica i aplicant l'expressió de $\sin x$ de (2.5) surt, de seguida, la igualtat

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \cdot e^{i(n+1)x/2}.$$

Si ara prenem $0 < \delta < \pi$, resulta

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{\sin \delta/2} \quad \text{si} \quad \delta \leq x \leq 2\pi - \delta.$$

Agafant $f_n = e^{inx}$ i $g_n = \frac{1}{n}$ el criteri de Dirichlet garanteix que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

convergeix uniformement a $[\delta, 2\pi - \delta]$, per a tot $\delta > 0$, $\delta < \pi$. Observem que el criteri M de Weierstrass no és aplicable, perquè $|e^{inx}| = 1$ i $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. $\square$

Teorema 2.14 (Criteri d'Abel). *Considerem una sèrie de funcions del tipus $\sum_n f_n(p)g_n(p)$ on les funcions $f_n(p)$ i $g_n(p)$ són complexes, i suposem que $\sum_n f_n(p)$ és uniformement convergent a X i que hi ha un número $M \geq 0$ tal que per a $p \in X$,*

$$|g_1(p)| + \sum_{n \geq 1} |g_n(p) - g_{n+1}(p)| \leq M.$$

Aleshores la sèrie $\sum_n f_n(p)g_n(p)$ convergeix uniformement a X .

Demostració. Donat $\varepsilon > 0$, serà $\left| \sum_{k=n}^m f_k(p) \right| \leq \varepsilon$ si $m > n$ són prou grans. Ara podem acotar el mòdul de (2.10) per

$$\varepsilon |g_{m+1}(p)| + \varepsilon \sum_{k=n}^m |g_k(p) - g_{k+1}(p)| \leq 2\varepsilon M,$$

perquè $|g_\ell(p)| \leq M$, per a tot ℓ, p , tal com es veu posant $g_\ell(z) = \sum_{m=\ell}^{\infty} g_m(p) - g_{m+1}(p)$ i prenent el valor absolut. $\square$

La hipòtesi sobre la successió (g_n) en el criteri d'Abel se satisfà quan aquesta successió és real, monòtona i uniformement acotada a X .

Evidentment, quan X és un punt, els criteris anteriors són criteris de convergència de sèries numèriques. Per exemple, el resultat segons el qual una *sèrie alternada* del tipus $\sum_n (-1)^n a_n$, amb $a_n \searrow 0$ és convergent, pot veure's com una conseqüència del criteri de Dirichlet. Més generalment, si (f_n) és una successió decreixent de funcions que va cap a 0 uniformement a X , llavors la sèrie alternada $\sum_n (-1)^n f_n(p)$ convergeix uniformement a X .

2.3.3 Domini de convergència d'una sèrie de potències

Un tipus especialment important de sèries de funcions són les *sèries de potències*.

Definició 2.15. Una sèrie de potències centrada en un punt $a \in \mathbb{C}$ és una sèrie de funcions de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Una sèrie de potències és, per tant, una sèrie de funcions $\sum_n f_n(z)$ en la qual $f_n(z) = c_n (z - a)^n$ és un monomi de grau n , i la sèrie es pot pensar com un "polinomi de grau infinit". Per a cada valor de $z \in \mathbb{C}$ tenim una sèrie de números complexos. Més enllà dels aspectes formals, el que interessa és determinar el *conjunt de convergència de la sèrie de potències*

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{la sèrie } \sum_n c_n (z - a)^n \text{ és convergent} \right\}$$

i les propietats de la funció f que queda definida a E per $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$.

Així, $z \in E$ si la successió de sumes parcials $\sum_{n=0}^N c_n(z-a)^n$ és convergent a $\mathbb{C}$. Només en casos molt particulars es poden calcular explícitament les sumes parcials i determinar el conjunt E a partir de la definició. Per exemple, per a la sèrie geomètrica centrada a l'origen, $\sum_n z^n$, és

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}, \text{ si } z \neq 1,$$

i si $z = 1$, la suma val $N + 1$. Amb aquesta expressió, veiem que la sèrie és convergent si i només si z^{N+1} és convergent, és a dir, si $|z| < 1$. Per tant, $E = \mathbb{D}$ i el valor de la suma és $1/(1-z)$.

En el teorema següent donarem informació sobre l'estructura de E . Recordem que el límit superior ρ d'una successió (x_n) de números positius es defineix com

$$\rho = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k = \lim_n \sup_{k \geq n} x_k$$

on s'interpreta que $\rho = +\infty$ si la successió no és acotada superiorment. S'utilitza la notació $\rho = \limsup_n x_n$. Quan és finit, ρ és l'únic número amb les dues propietats següents: 1) Per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha infinits termes x_n de la successió més grans que $\rho - \varepsilon$. 2) Per a tot $\varepsilon > 0$ tots els termes de la successió a partir d'un d'ells són menors que $\rho + \varepsilon$. En general, es pot veure que ρ és el màxim dels valors d'adherència de la successió (x_n) , és a dir, dels números $m \leq +\infty$ per als quals hi ha una successió parcial (x_{k_n}) convergent a m , quan $k_n \rightarrow \infty$. Si la successió (x_n) és convergent a $m \leq +\infty$, aleshores $\rho = m$; si la successió és la reunió d'un nombre finit de subsuccessions convergents, ρ és el més gran dels límits respectius.

Teorema 2.16. Si $\sum_n c_n(z-a)^n$ és una sèrie de potències i posem $R = \frac{1}{\rho}$ on $\rho = \limsup_n |c_n|^{\frac{1}{n}}$ (on s'interpreta que $R = 0$ si $\rho = +\infty$ i $R = +\infty$ si $\rho = 0$), llavors la sèrie convergeix uniformement sobre els compactes del disc obert $D(a, R)$, convergeix absolutament a cada punt $z \in D(a, R)$ i divergeix fora del disc tancat $\overline{D}(a, R)$. Per tant, $D(a, R) \subset E \subset \overline{D}(a, R)$ i l'interior del conjunt de convergència E és $D(a, R)$.

Demostració. Si $|z-a| > R$, aleshores $|z-a|^{-1} < \rho$, i per la propietat 1) del límit superior hi ha infinits termes $|c_n|^{\frac{1}{n}}$ que són més grans que $|z-a|^{-1}$. Això és, hi ha infinits valors de n tals que $|c_n(z-a)^n| > 1$, amb la qual cosa

la successió $(c_n(z-a)^n)$ no pot ser convergent a zero i $z \notin E$. Provem ara que la sèrie convergeix uniformement sobre cada disc tancat $\overline{D}(a, r)$, $r < R$: si $|z-a| \leq r$, $|c_n(z-a)^n| \leq |c_n|r^n = M_n$, i per la propietat 2) del límit superior hom té $M_n^{\frac{1}{n}} = |c_n|^{\frac{1}{n}}r < r' < 1$ per a un número r' i a partir d'un valor de n . Llavors, pel criteri de l'arrel, la sèrie $\sum_n M_n$ és convergent i el criteri M de Weierstrass assegura la convergència uniforme de la sèrie de potències a $\overline{D}(a, r)$. $\square$

El número R s'anomena *radi de convergència* de la sèrie de potències, i $D(a, R)$ és el *disc de convergència* (fig. 2.3).

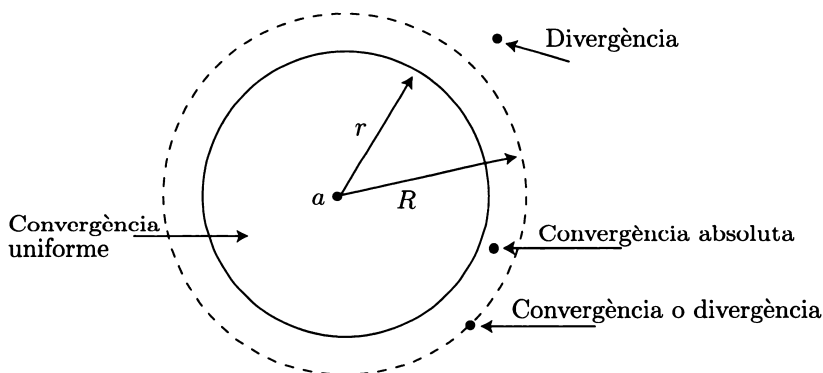


Figura 2.3

En l'expressió de R , c_n és per definició el coeficient de $(z-a)^n$; així, per exemple, la sèrie $\sum_m z^{2m}$ té $c_n = 1$ si n és parell i $c_n = 0$ si n és senar, $\lim_n |c_n|^{\frac{1}{n}}$ no existeix i $\limsup_n |c_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, de manera que el radi de convergència és 1. En general, observem que si una sèrie de potències $\sum_n c_n z^n$ té radi de convergència R i fem el canvi $z = w^k$, la sèrie obtinguda, $\sum_n c_n w^{kn}$, té radi de convergència $R^{\frac{1}{k}}$. Remarquem també que es compleix

$$\begin{aligned} R &= \sup \{r > 0: \sum_n c_n(z-a)^n \text{ convergeix per a } z \in D(a, r)\} = \\ &= \sup \{r > 0: \sum_n |c_n|r^n < \infty\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En molts exemples és convenient utilitzar el fet següent, vàlid per a successions

(x_n) , $x_n > 0$: si existeix $L = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq +\infty$, llavors també és $\lim x_n^{1/n} = L$. Això implica la igualtat $R = \lim_n \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, sempre que aquest límit existeixi.

Cal notar que, en general, la convergència de la sèrie de potències no és uniforme a tot el disc $D(a, R)$. Per exemple, la sèrie geomètrica $\sum z^n$ no convergeix uniformement a $\mathbb{D}$ perquè, si fos així, definiria una funció acotada a $\mathbb{D}$, i no és el cas. El disc $D(a, R)$ és el conjunt obert més gran on la sèrie és convergent. En aquest disc, la sèrie defineix una funció $f(z) = \sum c_n(z-a)^n$; evidentment f és contínua a tot punt z del disc obert $D(a, R)$, perquè la convergència és uniforme a tot disc tancat de radi $r < R$. No es pot donar cap resultat general més precís sobre el conjunt de convergència E d'una sèrie de potències. És a dir, els punts de la frontera de $D(a, R)$ que són de E depenen de cada sèrie de potències.

Exemple 2.17. La sèrie geomètrica $\sum z^n$ té radi de convergència 1 i conjunt de convergència $E = \mathbb{D}$; la sèrie $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ també té radi de convergència 1 i convergeix uniformement a $\overline{\mathbb{D}}$ pel criteri de Weierstrass perquè $|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ i $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$. Així, en aquest cas és $E = \overline{\mathbb{D}}$. $\square$

Aquests són els dos casos extrems; en general, el conjunt de convergència E constarà del disc obert $D(a, R)$ i d'un subconjunt de la circumferència $C(a, R)$.

Exemple 2.18. La sèrie $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$, que té radi de convergència 1, en el punt $z = 1$ dóna la sèrie harmònica i és, per tant, divergent, mentre que en $z = -1$ dóna una sèrie alternada convergent. Provarem ara que a tot altre punt $z \neq 1$ de mòdul 1 és convergent; de fet, aquesta sèrie convergeix uniformement a tot compacte del tipus $K = \{z: |z| \leq 1, |z-1| \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, com es pot veure aplicant el criteri de Dirichlet amb $f_n(z) = z^n$, $g_n(z) = \frac{1}{n}$. En efecte: si $z \in K$, les sumes parcials $\sum_{n=1}^N z^n = (1 - z^{N+1})/(1 - z)$ estan acotades per $\frac{2}{\varepsilon}$ i d'altra banda és evident que $g_n \downarrow 0$ uniformement (tendeix a zero i no depèn de z). En particular, aquesta sèrie defineix una funció contínua a $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, que més endavant determinarem. $\square$

2.3.4 Operacions amb sèries de potències

Amb les sèries de potències es poden efectuar operacions talment com amb els polinomis: si $\sum_n c_n(z-a)^n$, $\sum_n d_n(z-a)^n$ són dues sèries de potències, la suma

és la sèrie de potències $\sum_n (c_n + d_n)(z - a)^n$, mentre que el producte, com per als polinomis, és la sèrie $\sum_n e_n(z - a)^n$, on els coeficients e_n són

$$e_n = \sum_{k=0}^n c_k d_{n-k}.$$

Es tracta, doncs, del producte de Cauchy, efectuat per a cada $z \in \mathbb{C}$. Per exemple, el producte de les sèries $\sum_n 2^n z^n$, $\sum_n 3^n z^n$ tindrà els coeficients

$$e_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Si tenim dues sèries de potències $\sum_n c_n(z - a)^n$, $\sum_n d_n(z - a)^n$ ambdues centrades en el punt a amb radis de convergència R_1 , R_2 , és clar utilitzant (2.11) que la sèrie suma té radi de convergència, com a mínim, $R = \min(R_1, R_2)$ i, òbviament, defineix la funció suma de les funcions definides per cada sumand. Un enunciat anàleg és cert per al producte. Si $|z - a| < R$, ambdues sèries són absolutament convergents en z i, per tant, també ho és el producte de Cauchy, per la proposició 2.9. Així, la sèrie producte té radi de convergència més gran o igual que $|z - a|$; com que z és qualsevol número amb $|z - a| < R$, veiem que el radi de convergència del producte és també, com a mínim, $R = \min(R_1, R_2)$.

Exemple 2.19. El producte de Cauchy de la sèrie geomètrica $\sum_{n \geq 0} z^n$ per si mateixa té $n + 1$ com a coeficient de z^n i, per tant,

$$\sum_n (n + 1)z^n = \left(\frac{1}{1 - z}\right)^2. \quad \square$$

Una altra operació important amb sèries de potències és la *derivació complexa*, de la qual parlarem més endavant.

2.3.5 La funció exponencial com a sèrie de potències complexa

Recordem (definició 2.1) que $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ si $z = x + iy$. Així, la funció $z \mapsto e^z$ estén a tot $\mathbb{C}$ la funció exponencial $x \mapsto e^x$ de la variable real x . Ara veurem que e^z és també, per a $z \in \mathbb{C}$ qualsevol, la suma de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

En primer lloc, és clar que el radi de convergència d'aquesta sèrie de potències és $+\infty$ perquè

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty.$$

Anomenem, provisionalment, $E(z) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ la seva suma. Aplicant la proposició 2.9, resulta

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_n \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_m \frac{w^m}{m!} = \\ &= \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{n+m=k} \frac{k!}{n!m!} z^n w^m = \sum_k \frac{(z+w)^k}{k!} = E(z+w). \end{aligned}$$

En particular, $E(z) = E(x)E(iy) = e^x E(iy)$, i ara tan sols falta comprovar que $E(iy) = \cos y + i \sin y$; ara bé, en l'expressió

$$E(iy) = \sum_n \frac{i^n y^n}{n!}$$

els termes parells, $n = 2k$, donen lloc a la part real de $E(iy)$, i els termes senars, $n = 2k+1$, donen la seva part imaginària; així doncs,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} E(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cos y \\ \operatorname{Im} E(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin y \end{aligned}$$

i, finalment,

$$E(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

tal com havíem enunciat.

A partir de les definicions (2.5) s'obtenen els desenvolupaments en sèrie de potències de les funcions trigonomètriques complexes,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2.3.6 Convergència a la frontera

Sigui $\sum_{n \geq 0} c_n(z-a)^n$ una sèrie de potències de radi de convergència R . Denotem per S el conjunt de punts z tals que $|z-a| = R$ i la sèrie de potències convergeix en z , és a dir, $S = E \cap C(a, R)$. Si S no és buit i $m > 1$ és un número real, considerem el conjunt

$$S_m = \{z: |z-a| < R, d(z, S) \leq m(R - |z-a|)\},$$

on $d(z, S)$ és la distància de z a S . Si S té tan sols un punt w , el conjunt S_m té, a l'entorn de w , la forma d'un angle amb vèrtex w i obertura estrictament més petita que π , depenent de m , que s'anomena *angle de Stolz* (fig. 2.4).

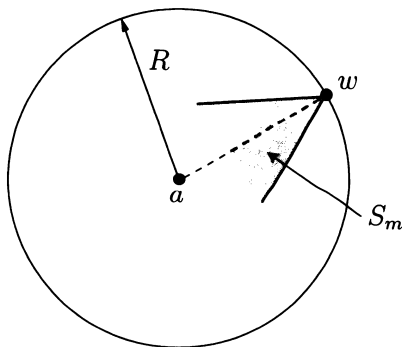


Figura 2.4

Per a un S general, S_m és la reunió de tots els angles de Stolz amb vèrtex en els punts de S .

Teorema 2.20 (Abel). *Amb les notacions anteriors, suposem que S no és buit i que la sèrie $\sum_n c_n(z-a)^n$ convergeix uniformement a S . Aleshores la convergència de la sèrie també és uniforme en el conjunt S_m , per a tot $m > 1$. En particular, la funció suma és contínua a S_m i hom té*

$$\lim_{z \rightarrow w, z \in S_m} \sum_n c_n(z-a)^n = \sum_n c_n(w-a)^n, \quad w \in S.$$

Demostració. Fem la prova tan sols quan S és un punt w ; sense pèrdua de generalitat, podem suposar $a = 0$, $R = 1$ i $w = 1$. Apliquem el criteri d'Abel (teorema 2.14) prenent $f_n(z) = c_n$, $g_n(z) = z^n$. Per hipòtesi, la sèrie $\sum_n c_n$ és

convergent, de manera que trivialment $\sum_n f_n$ és uniformement convergent (en qualsevol conjunt). Comprovem ara que la condició sobre $|g_n|$ es compleix a $S_m = \{z: |z| < 1, |z - 1| \leq m(1 - |z|)\}$; en efecte, hom té

$$1 + \sum_{n \geq 0} |z^n - z^{n+1}| = 1 + |1 - z| \sum_{n \geq 0} |z|^n = 1 + \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq 1 + m. \quad \square$$

Si $f(z) = \sum_n c_n(z - a)^n$ i $w \in S$, el teorema anterior diu que $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$, si z s'acosta a w dins de S_m . En particular, això és cert si z tendeix a w radialment, és a dir, $\lim_{r \rightarrow 1} f(rw) = f(w)$. Si w és interior a S , és a dir, si hi ha un arquet centrat en w tot ell dins de S , llavors f és contínua a w (perquè tot un entorn de w contingut a $\bar{D}(a, R)$ és dins de S_m). En particular, si S és tot el cercle $C(a, R)$, f és contínua a tot el disc tancat.

El teorema d'Abel dona un *mètode de suma* de sèries aplicat de la manera següent. Suposem que $\sum c_n$ és una sèrie numèrica convergent i que volem calcular-ne la suma; considerem la sèrie de potències $\sum c_n z^n$. Com que convergeix per a $z = 1$, aquesta sèrie té radi de convergència $R \geq 1$ i hom té

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_n c_n r^n = \sum_n c_n.$$

En el cas que $R > 1$ això és cert perquè la funció suma és contínua al disc obert de convergència, i si $R = 1$, ho garanteix el teorema d'Abel. El problema d'avaluar $\sum c_n$ s'ha convertit en el problema d'avaluar $\sum c_n r^n$ i després calcular un límit, i pot semblar que encara hem complicat més el problema. El punt està, però, en el fet que pot resultar més fàcil calcular $\sum c_n z^n$ per a $|z| < 1$, utilitzant els recursos de la derivació complexa, que veurem més endavant, i les operacions amb sèries de potències en general, que no pas $\sum c_n$. Observem, en canvi, que pot existir $\lim_{r \rightarrow 1} \sum c_n r^n$ sense que la sèrie $\sum c_n$ sigui convergent. Per exemple, si $c_n = (-1)^n$, és

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.21. La sèrie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ és convergent perquè és una sèrie alternada amb terme general de valor absolut decreixent cap a zero. Considerem la sèrie de potències $\sum \frac{(-1)^n}{n} z^n$; en l'exemple 2.34, utilitzant la derivació complexa, veurem que la seva suma és $-\text{Log}(1+z)$ per a $|z| < 1$. Ara, pel teorema

d'Abel, tenim

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} r^n = - \lim_{r \rightarrow 1} \text{Log}(1+r) = -\text{Log } 2.$$

En un punt $z \neq -1$, $|z| = 1$, la sèrie $\sum \frac{(-1)^n}{n} z^n$ també és convergent d'acord amb el criteri de Dirichlet, perquè

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k z^k \right| = \left| \frac{-z - (-1)^{n+1} z^{n+1}}{1+z} \right| \leq \frac{2}{|1+z|}.$$

El teorema d'Abel ens dona, ara,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n = -\text{Log}(1+z), \quad |z| = 1, z \neq -1.$$

És a dir, si $\theta \in [0, 2\pi]$, $\theta \neq \pi$ i posem $z = e^{i\theta}$, obtenim les fórmules

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{n} &= -\text{Log } |1+z| = -\text{Log } \sqrt{2+2\cos\theta} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n} &= -\text{Arg}(1+z) = -\text{Arg}(1+e^{i\theta}) = -\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Per al valor particular $\theta = \frac{\pi}{2}$, ($z = i$), la segona fórmula es converteix en la igualtat

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

2.4 Derivació de funcions de variable complexa

Per a aprofundir més en l'estudi de les propietats de les funcions de variable complexa cal estendre el càlcul diferencial al camp complex. Això és el que fem a continuació.

2.4.1 Funcions holomorfes

Definició 2.22. Si U és un obert del pla i f és una funció complexa definida a U i $a \in U$, direm que f és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt a si existeix el límit

$$\lim_{z \rightarrow a, z \in U} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

El número complex $f'(a)$ s'anomena derivada (complexa) de f en el punt a .

La definició és, doncs, anàloga al cas de funcions de variable real i $f'(a)$ té el mateix significat: mesura el grau de variació de f a l'entorn del punt a . Cal observar, però, que ara l'increment h pren valors complexos. Enunciat d'una altra manera, el fet que f sigui $\mathbb{C}$ -derivable en a vol dir que hi ha un número complex α tal que els increments $f(a+h) - f(a)$ poden aproximar-se fins al primer ordre per αh , és a dir,

$$f(a+h) - f(a) = \alpha h + o(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0. \quad (2.12)$$

En particular, resulta que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt a , f és contínua en a .

Definició 2.23. Si la funció f està definida a l'obert U i és $\mathbb{C}$ -derivable a tots els punts de U , direm que f és holomorfa a U . Representarem per $H(U)$ el conjunt de les funcions holomorfes a U . Les funcions holomorfes a tot el pla complex s'anomenen funcions enteres.

Si $f \in H(U)$, llavors queda definida a U la funció derivada (complexa) de f , que indicarem per f' i que val $f'(z)$ a cada punt $z \in U$. Per exemple, si n és natural, la funció $f(z) = z^n$ és $\mathbb{C}$ -derivable a tot punt a , amb derivada $f'(a) = na^{n-1}$ perquè

$$\frac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1},$$

té límit na^{n-1} quan $z \rightarrow a$. La funció $f(z) = \bar{z}$ no és $\mathbb{C}$ -derivable a cap punt perquè

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} = \frac{\bar{h}}{h},$$

i si z s'acosta a a horitzontalment, és a dir, $z = a + h$, $h \in \mathbb{R}$, aleshores el quocient val 1, mentre que si z s'acosta verticalment a a , és a dir, $z = a + ih$, $h \in \mathbb{R}$, llavors el quocient anterior val -1 . En el cas de la funció $f(z) = |z|^2$, el quocient incremental és

$$\frac{|a+h|^2 - |a|^2}{h} = \bar{a} + a \frac{\bar{h}}{h} + \bar{h}.$$

Si h és real, el seu límit quan $h \rightarrow 0$ és $\bar{a} + a$, i $\bar{a} - a$ si h és imaginari pur; si f és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt a , aquests valors han de coincidir i llavors $a = 0$. Com que en $a = 0$ trivialment el límit anterior quan $h \rightarrow 0$ val zero, concloem que la funció només és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt $a = 0$.

Aquest exemple mostra la diferència entre el cas complex i el cas real. En el cas complex, imposar l'existència del límit que defineix la derivada és quelcom molt restrictiu perquè hi ha una infinitat de maneres d'acostar-se a a : per

rectes horitzontals, per rectes verticals, inclinades o al llarg d'una espiral o de qualsevol corba que acabi en a . Això farà precisament que les funcions holomorfes en un domini tinguin propietats molt més bones que les seves anàlogues reals, les funcions de variable real derivables en un interval.

Exemple 2.24. La funció exponencial e^z és holomorfa i coincideix amb la seva derivada. Això és immediat aplicant la definició, perquè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z.$$

Es tracta, doncs, d'una funció entera que estén la funció exponencial de variable real a tot el pla. Si tenim en compte les definicions (2.5) i el fet que les regles habituals de derivació també valen en el cas complex, resulta que les funcions $\sin z$, $\cos z$ també són funcions enteres i $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$. $\square$

Comparem ara la definició de funció $\mathbb{C}$ -derivable amb la de funció diferenciable, considerant $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ com a funció de dues variables reals. Recordem que f és diferenciable en el punt a si hi ha una aplicació $\mathbb{R}$ -lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ —la diferencial $df(a)$ — tal que

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h), \quad a, h \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}.$$

Si comparem amb (2.12), resulta que f és $\mathbb{C}$ -derivable en a si i només si és diferenciable en el sentit real i la diferencial $df(a)$ és de la forma $df(a)(h) = \alpha h$ amb $\alpha \in \mathbb{C}$. Ara bé, segons hem vist en la proposició 1.9, les aplicacions $\mathbb{R}$ -lineals de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que són d'aquesta forma són exactament les que són $\mathbb{C}$ -lineals. Així, tenim la primera part del teorema següent:

Teorema 2.25. *La funció f , definida en un entorn del punt $a \in \mathbb{C}$, és $\mathbb{C}$ -derivable en a si i només si és diferenciable en a i la diferencial $df(a)$ és $\mathbb{C}$ -lineal. Si $f = u + iv$ amb u i v reals i f és diferenciable en el punt a , aleshores f és $\mathbb{C}$ -derivable en a si i només si es compleixen, en aquest punt, les equacions següents:*

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Les equacions (2.13), en les quals hem posat $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ i $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, s'anomenen *equacions de Cauchy-Riemann*.

Demostració. Ja hem vist, després de la proposició 1.9, que una matriu $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ és la matriu d'una aplicació $\mathbb{C}$ -lineal, és a dir, de la forma $h \rightarrow \alpha h$, $\alpha \in \mathbb{C}$, si només si

$$a_{11} = a_{22},$$

$$a_{12} = -a_{21},$$

i llavors és $\alpha = a_{11} + ia_{21}$. En el cas de l'aplicació $df(a)$, amb $f = u + iv$, la seva matriu és la matriu *jacobiana* de f , és a dir, $a_{11} = u_x$, $a_{21} = v_x$, $a_{12} = u_y$, $a_{22} = v_y$. $\square$

Una altra manera de deduir les equacions de Cauchy-Riemann és la següent: el límit del quocient incremental ha de ser $f'(a)$ en totes les direccions. Si l'increment h és real, el límit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

val $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = u_x(a) + iv_x(a)$, mentre que si l'increment h és imaginari pur, $h = iy$, és

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a+iy) - f(a)}{iy} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a) = -i(u_y(a) + iv_y(a)).$$

Si igualement les parts reals i les parts imaginàries, es dedueixen les equacions de Cauchy-Riemann. Observem que hem vist també que, si f és $\mathbb{C}$ -derivable en a , aleshores

$$f'(a) = u_x(a) + iv_x(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Així mateix, si J_f és la matriu jacobiana de f , resulta

$$\det(J_f(a)) = u_x(a)^2 + v_x(a)^2 = |f'(a)|^2.$$

Si ara reprenem l'exemple de la funció $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, veiem que f és diferenciable a tots els punts, però les equacions de Cauchy-Riemann donen $2x = 0$, $2y = 0$ i, per tant, només es compleixen a l'origen.

Fem notar que si f és holomorfa en un domini U i $f'(z) = 0$, per a tot $z \in U$, aleshores f ha de ser constant a U perquè f és diferenciable amb $df(z) = 0$, $z \in U$. Aquest fet és la base del resultat següent:

Proposició 2.26. *Si una funció real f és $\mathbb{C}$ -derivable en un punt a , aleshores $df(a) = 0$ i, per tant, tota funció real i holomorfa en un domini és constant. Tota funció $f = u + iv$ holomorfa en un domini queda completament determinada per la seva part real, llevat d'una constant imaginària pura.*

Demostració. Si $v = 0$, les equacions de Cauchy-Riemann impliquen $u_x(a) = v_y(a) = 0$, $u_y(a) = -v_x(a) = 0$ i, per tant, $df(a) = 0$. $\square$

La segona afirmació de la proposició anterior significa exactament que si $f = u + iv$, $g = u + iw$ són funcions holomorfes en un domini amb la mateixa part real, llavors és $f = g + ic$, amb $c \in \mathbb{R}$. La primera afirmació de la proposició també es compleix, és clar, si $u = 0$, és a dir, si f és holomorfa i només pren valors imaginaris purs.

Com a corol·lari del teorema 2.25, resulta que si $f = u + iv$ té derivades parcials u_x, u_y, v_x, v_y en un entorn del punt a que són contínues en a (de manera que f és diferenciable en a) i es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann en a , aleshores f és $\mathbb{C}$ -derivable en a .

2.4.2 Funcions holomorfes i conformalitat

Comencem aquest apartat repassant el significat geomètric de la diferencial d'una aplicació $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en un obert $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Recordem que la diferencial de f en el punt a , $df(a)$, satisfà

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)|}{|h|} = 0.$$

Si $\gamma: I \rightarrow U$, on I és un interval de $\mathbb{R}$, és una corba diferenciable (amb tangent a tots els punts) que passa per a , posem $a = \gamma(0)$, la composició $f \circ \gamma$ és una corba diferenciable que passa per $f(\gamma(0)) = f(a)$; el seu vector tangent en aquest punt és

$$\left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) \Big|_{t=0} = df(a)(\gamma'(0)).$$

És a dir, $df(a)$ és l'aplicació que a cada vector tangent en a a una corba li assigna el vector tangent en $f(a)$ a la corba imatge.

Definició 2.27. Una aplicació diferenciable $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diu que és conforme en el punt $a \in U$ si $df(a)$ és invertible i preserva els angles orientats.

D'acord amb la definició 1.8 (estesa a $\mathbb{R}^n$), això significa que l'aplicació lineal $df(a)$ és, ella mateixa, conforme. Si tenim en compte el significat geomètric de $df(a)$, el fet que f sigui conforme en a vol dir que si dues corbes γ_1, γ_2 que passen per a es tallen amb un angle α , llavors les corbes imatge $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ es tallen en $f(a)$ també amb angle α (fig. 2.5), entenent, és clar, que l'angle entre

dues corbes en un punt comú és l'angle entre les seves tangents en aquest punt.

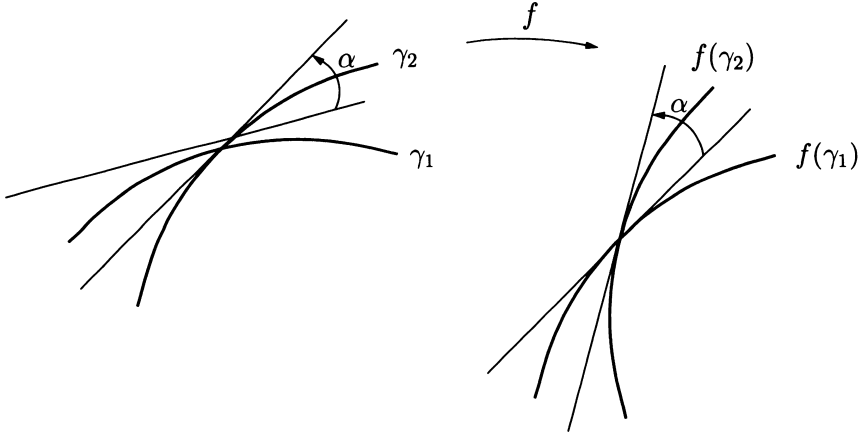


Figura 2.5

En el cas $n = 2$, la proposició 1.9 ens diu ara que f és conforme en a si i només si és $\mathbb{C}$ -derivable en a i $f'(a) \neq 0$. En aquest cas, si la corba γ té vector tangent $\gamma'(0) \in \mathbb{C}$ en $a = \gamma(0)$, el vector tangent de $f \circ \gamma$ en $f(a)$ és

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(a) \cdot \gamma'(0),$$

que s'obté de $\gamma'(0)$ multiplicant per $f'(a) = |f'(a)| \cdot e^{i\theta}$, és a dir, girant un angle θ i dilatant amb un factor $|f'(a)|$. Si tots els vectors tangents giren igual, és evident que es preserven els angles orientats. Analíticament, per a dues corbes γ_1, γ_2 , la igualtat

$$(f \circ \gamma_1)'(0) \overline{(f \circ \gamma_2)'(0)} = |f'(a)|^2 \gamma_1'(0) \overline{\gamma_2'(0)}$$

expressa la invariància dels angles.

Exemple 2.28. Considerem la transformació $f(z) = e^z$; com que $f'(z) = e^z \neq 0$, f és conforme a tots els punts. La recta horitzontal $y = y_0$ es transforma en la semirecta $x \mapsto e^x e^{iy_0}$, la recta vertical $x = x_0$ es transforma en el cercle de centre 0 i radi e^{x_0} . Les rectes horitzontals i verticals es tallen en angle recte, i les seves imatges, també. Una recta amb pendent m , $y = mx$, que talla les rectes horitzontals amb un angle $\alpha = \arctan m$, es transforma en la corba $x \mapsto e^x e^{imx}$, que és una espiral (fig. 2.6). En un punt $P = e^x e^{imx} = f((1 + im)x)$, l'espiral té tangent $(1 + im)e^x e^{imx}$, que amb la semirecta que surt de l'origen i passa per P forma també un angle α . $\square$

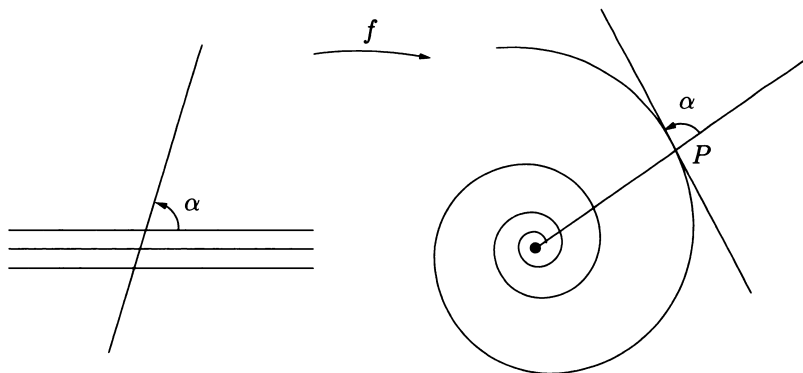


Figura 2.6

Les aplicacions que preserven la magnitud dels angles però en canvien l'orientació s'anomenen *anticonformes*.

D'acord amb la proposició 1.12, podem dir ara que si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ és diferenciable a l'obert U de $\mathbb{R}^n$, llavors f és conforme o anticonforme a U si i només si per a cada $x \in U$, és $df(x) = \lambda(x)O(x)$ amb $O(x)$ matriu ortogonal i $\lambda(x) > 0$. Prenent determinants resulta

$$\det(J_f(x)) = \det df(x) = \lambda(x)^n \det O(x) = \pm \lambda(x)^n$$

i per tant, automàticament, $\lambda(x) = |\det J_f(x)|^{1/n}$.

A més de les transformacions lineals T del tipus λO , amb O una transformació ortogonal, els principals exemples de transformacions conformes o anticonformes a $\mathbb{R}^n$ són les inversions respecte d'esferes de les quals parlarem en el capítol 8 en el cas del pla. En dimensió $n = 2$, hem vist que qualsevol transformació donada per una funció holomorfa, per exemple e^z , $\cos z$, $\sin z$, ... és conforme. Per tant, hi ha una gran quantitat de transformacions conformes si $n = 2$, més enllà de les lineals, les inversions i les seves composicions. En canvi, si $n > 2$, només hi ha aquestes.

Teorema 2.29 (Liouville). *Si U és un domini de $\mathbb{R}^n$ amb $n \geq 3$ i la funció $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ és de classe C^1 i preserva la magnitud dels angles, llavors f és la restricció a U d'una transformació de $\mathbb{R}^n$ en si mateix que consisteix en una composició finita de transformacions ortogonals, dilatacions i inversions.*

Aquest és un teorema difícil de provar. Per a f amb més regularitat, per exemple si f té derivades parcials de tercer ordre contínues, es pot trobar una prova a [2, pàg. 105].

2.4.3 Regles de derivació i antiderivació complexes

Utilitzant tan sols la definició de derivada, exactament igual que en el cas de funcions de variable real, és fàcil comprovar que valen les regles habituals de derivació de sumes, productes i quocients. Així, si f, g tenen derivada complexa en el punt a , també en tenen $f + g$, fg i el quocient f/g sempre que $g(a) \neq 0$ i hom té

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

La *regla de la cadena* també val: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$, quan g és $\mathbb{C}$ -derivable en a i f ho és en $g(a)$. Observem que la regla de la cadena també es dedueix de la regla de la cadena general per a funcions diferenciables en el sentit real, perquè la composició de les aplicacions lineals que consisteixen a multiplicar per $g'(a)$ i $f'(g(a))$ és l'aplicació que consisteix a multiplicar pel producte $f'(g(a))g'(a)$.

Així, tot polinomi $P(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$ en la variable z és una funció entera i $P'(z) = c_1 + 2c_2z + \dots + nc_nz^{n-1}$. Tota funció racional de la variable z , $R(z) = P(z)/Q(z)$ és holomorfa a tots els punts que no són zeros de Q (suposant que l'expressió de R és irreductible).

També, exactament igual que en el cas real, es prova que si f és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt a , bijectiva en un entorn de a amb f^{-1} contínua en el punt $f(a)$ i $f'(a) \neq 0$, aleshores la funció inversa f^{-1} , és $\mathbb{C}$ -derivable a $f(a)$ amb derivada $\frac{1}{f'(a)}$ (més endavant veurem que si f és bijectiva en un entorn de a , automàticament $f'(a) \neq 0$). En particular, resulta que si g és una determinació contínua del logaritme en un entorn del punt b , aleshores g és $\mathbb{C}$ -derivable a b i té derivada $g'(b) = \frac{1}{b}$. Donem la prova per a aquest cas: si $a = g(b)$, z és proper a b , i $w = g(z)$, hom té $b = e^a$, $z = e^w$ i el quocient incremental s'escriu

$$\frac{g(z) - g(b)}{z - b} = \frac{1}{\frac{e^w - e^a}{w - a}},$$

que té límit $\frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}$, quan $z \rightarrow b$ ($w \rightarrow a$).

Com que, localment, tota determinació del logaritme d'una funció f que no s'anul·la en un obert U (vegeu la definició 2.4) s'obté component f amb una determinació del logaritme principal en la imatge de f , es dedueix de la

regla anterior i de la regla de la cadena que si f és holomorfa i sense zeros a U i existeix una determinació h del logaritme de f , aleshores h és també holomorfa a U i té derivada $h' = \frac{f'}{f}$. De la mateixa manera, tota determinació g d'una potència f^α és també holomorfa i té derivada $g' = \alpha f'g/f$ (que és perillós escriure com $\alpha f' f^{\alpha-1}$).

Igual que en el càlcul diferencial real, podem considerar també la noció d'antiderivada o primitiva complexa. Si h és una funció contínua definida en un obert U , una *antiderivada* o *primitiva holomorfa* de h és qualsevol funció f holomorfa a U , tal que $f'(z) = h(z)$, si $z \in U$. Més endavant estudiarem detalladament aquesta relació i veurem, en particular, que només les funcions holomorfes poden tenir primitives holomorfes (és a dir, si $h = f'$ amb f holomorfa, llavors h és holomorfa). De moment ens limitarem a destacar algunes relacions de derivació/antiderivació entre les funcions que fins ara han aparegut. Evidentment, les primeres relacions que cal destacar són

$$f'(z) = 0 \quad \text{si i només si} \quad f(z) = c, \quad c \text{ constant}$$

$$f'(z) = g'(z) \quad \text{si i només si} \quad f(z) = g(z) + c, \quad c \text{ constant}$$

si les igualtats tenen lloc per a tot punt z d'un domini del pla. Això significa que si h té una primitiva holomorfa a U , f , $f(z) + c$ és l'expressió general de totes les primitives holomorfes de h a U .

Donant per sobreentès el domini que estem considerant, posarem

$$\int h \, dz = f(z) + c$$

per a designar la primitiva holomorfa general de h . El perquè de la notació integral $\int$ s'explicarà en les seccions següents. Així, escrivim

$$\int z^n \, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c \iff (z^{n+1})' = (n+1)z^n$$

$$\int e^z \, dz = e^z + c \iff (e^z)' = e^z$$

$$\int \sin z \, dz = -\cos z + c, \quad \int \cos z \, dz = \sin z + c, \quad \text{etc.}$$

Cada regla de derivació es pot reescriure com una regla d'antiderivació. La regla de derivació del producte equival a la *regla d'antiderivació per parts*

$$\int f'g \, dz = fg - \int fg' \, dz.$$

Per exemple,

$$\int \operatorname{Log} z \, dz = z \operatorname{Log} z - \int z(\operatorname{Log} z)' \, dz = z \operatorname{Log} z - z + c.$$

La regla del canvi de variable

$$\int f(z) \, dz = (z = g(w)) = \int f(g(w))g'(w) \, dw$$

correspon a la regla de la cadena. Per exemple,

$$\int we^{w^2} \, dw = (z = w^2) = \int \frac{1}{2} e^z \, dz = \frac{1}{2} e^z + c = \frac{1}{2} e^{w^2} + c.$$

2.4.4 Els operadors ∂ i $\bar{\partial}$

En la secció 2.1 hem preguntat com es pot reconèixer si un polinomi en x , y , amb coeficients complexos, és realment un polinomi en z . Podem utilitzar, ara, les equacions de Cauchy-Riemann per a respondre aquesta qüestió. En primer lloc introduïrem els operadors diferencials $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ i $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ definits per

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

que es poden aplicar a tota funció f que tingui derivades parcials de primer ordre. Observem que $\overline{\partial f} = \bar{\partial} f$ si f és real. Si posem dx , dy en termes de $dz = dx + i \, dy$ i de $d\bar{z} = dx - i \, dy$, aquests operadors són els que apareixen com a coeficients de dz i $d\bar{z}$ en la diferencial d'una funció

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

expressió que s'obté substituint $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$, $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$ a $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. És immediat comprovar que, inversament, els operadors de derivació parcial $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ s'expressen en termes de ∂ i $\bar{\partial}$ mitjançant

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

El motiu principal d'introduir aquests operadors és que les equacions de Cauchy-Riemann es condensen en una única equació (amb coeficients complexos), que és

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.14)$$

Això és immediat de comprovar perquè posant $f = u + iv$ i suposant f diferenciable, les equacions (2.13) són equivalents a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x} \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Així doncs, la funció f , suposada diferenciable, és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt a si i només si satisfà $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ i, en aquest cas, és $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

El formalisme que s'obté utilitzant aquests operadors és com si $z, \bar{z}$ fossin un altre sistema de coordenades. Llavors les funcions holomorfes són les que no depenen de $\bar{z}$ i, en aquest cas, la seva derivada complexa és la derivada respecte de z . Així, per exemple, si componem dues funcions diferenciables $f(z), g(w)$ (no necessàriament holomorfes) i posem $h = g \circ f$, resulta

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

Quan f i g són ambdues holomorfes, aquestes equacions es redueixen, és clar, a la regla de la cadena $h'(z) = f'(z)g'(w)$. Si $\gamma(t)$ és una corba diferenciable i posem $h(t) = f(\gamma(t))$ amb f diferenciable, la regla de la cadena pot expressar-se en la forma

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}.$$

En particular, $h'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ si f és holomorfa. Ara podem enunciar:

Teorema 2.30. *Per a un polinomi $P(x, y)$ són equivalents:*

- a) P és un polinomi en z .
- b) P és una funció entera.
- c) Es compleix l'equació $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = 0$ a $\mathbb{C}$.

Demostració. Només la implicació $c) \Rightarrow a)$ necessita un comentari. Considerem el polinomi auxiliar $Q(z, w)$ de dues variables formals z, w definit per $Q(z, w) = P\left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2i}\right)$. Observem que la substitució $w = \bar{z}$ dona l'expressió de P en termes de $z, \bar{z}$. Per la regla de la cadena, és $\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$. Si es compleix $c)$, llavors Q no depèn de w , i, per tant, P és un polinomi en z . $\square$

Observem que les equacions de Cauchy-Riemann per a P ja han aparegut a (2.1).

2.5 Funcions analítiques de variable complexa

2.5.1 Derivació de sèries de potències

Considerem una sèrie de potències $\sum_n c_n(z-a)^n$ centrada en el punt $a \in \mathbb{C}$ amb radi de convergència $R > 0$. El disc $D(a, R)$ és l'obert més gran en el qual la sèrie és convergent, i la funció $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$ és una funció contínua en aquest disc. Ara veurem que $f(z)$ és holomorfa al disc $D(a, R)$ i que també és la suma d'una sèrie de potències, precisament de la *sèrie de potències derivada* de $\sum_n c_n(z-a)^n$, que és la sèrie que s'obté derivant cadascun dels seus termes, és a dir, la sèrie

$$\sum_n n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Observem que aquesta sèrie derivada també té radi de convergència R perquè

$$\limsup_n (n|c_n|)^{1/n} = \limsup_n |c_n|^{1/n},$$

ja que $\lim_n n^{1/n} = 1$.

Teorema 2.31. *Si la sèrie de potències $\sum_n c_n(z-a)^n$ té radi de convergència $R > 0$, llavors la funció $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$ és holomorfa a $D(a, R)$ i té derivada $f'(z) = \sum_n n c_n(z-a)^{n-1}$ en aquest disc.*

Demostració. Fixem $z \in D(a, R)$. Donat $\varepsilon > 0$, cal veure que

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_n n c_n (z-a)^{n-1} \quad (2.15)$$

té mòdul més petit que ε per a w prou proper a z . Amb un N que ja determinarem, trenquem $f(z) = S_N(z) + R_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n(z-a)^n + \sum_{n>N} c_n(z-a)^n$ i escrivim l'expressió (2.15) com a suma de tres termes, $I + II + III$,

$$\left(\frac{S_N(w) - S_N(z)}{w - z} - \sum_{n=0}^N n c_n (z-a)^{n-1} \right) - \sum_{n>N} n c_n (z-a)^{n-1} + \frac{R_N(w) - R_N(z)}{w - z}.$$

El darrer, III , és

$$\sum_{n>N} c_n ((w-a)^{n-1} + (w-a)^{n-2}(z-a) + \cdots + (w-a)(z-a)^{n-2} + (z-a)^{n-1}).$$

Si $|z - a| < \rho < R$ i ja suposem també que $|w - a| < \rho$, tindrem $|III| \leq \sum_{n>N} n|c_n|\rho^{n-1}$; com que aquesta suma és el residu d'una sèrie convergent, podem triar N de manera que $|III| < \frac{\varepsilon}{3}$ (això, tant si w és a prop de z com si no; només cal que $|w - a| < \rho$). Podem suposar també que N és prou gran per tal que el segon terme, II , compleixi $|II| < \frac{\varepsilon}{3}$, perquè també és el residu d'una sèrie convergent. Finalment, podrem aconseguir $|I| < \frac{\varepsilon}{3}$ per a w prou proper a z , perquè es tracta senzillament de la derivada d'un polinomi. $\square$

Aplicant reiteradament el teorema 2.31, veiem que de fet f és indefinidament holomorfa, és a dir, té derivades complexes de qualsevol ordre, al disc obert $D(a, R)$. Si indiquem per $f^{(n)}$ la n -èsima derivada complexa de f i fem $z = a$ en l'expressió de $f^{(n)}(z)$ que s'obté derivant terme a terme, n vegades, la sèrie $\sum c_n(z - a)^n$, resulta $f^{(n)}(a) = n!c_n$. A *fortiori*, el desenvolupament de f en sèrie de potències és, doncs,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, \quad |z - a| < R,$$

que és, formalment, igual que el desenvolupament de Taylor. Així hem vist:

Proposició 2.32. *Sigui $f: D(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$. Si existeix una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, convergent en aquest disc, de manera que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \quad |z - a| < R,$$

aquesta sèrie és única. De fet, f és indefinidament holomorfa i els coeficients c_n estan determinats per f mitjançant les relacions

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si es compleixen les hipòtesis de la proposició 2.32, direm que f és *desenvolupable en sèrie de potències* al disc $D(a, R)$, respecte del centre a . La proposició 2.32 significa que en una igualtat entre sèries de potències es poden identificar els coeficients, com en el cas dels polinomis: si la igualtat

$$\begin{aligned} c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots + c_n(z - a)^n + \dots = \\ = d_0 + d_1(z - a) + d_2(z - a)^2 + \dots + d_n(z - a)^n + \dots \end{aligned}$$

val per a z en un entorn del punt a , llavors ha de ser $c_n = d_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Si f és desenvolupable en sèrie de potències, $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$, també ho és f' i $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1}$. En el sentit invers, si f és holomorfa a $D(a, R)$ i f' és desenvolupable en sèrie de potències,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R,$$

llavors f admet el desenvolupament

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n+1} (z-a)^{n+1}, \quad |z-a| < R.$$

En efecte: el terme de la dreta d'aquesta darrera igualtat defineix una funció g holomorfa a $D(a, R)$ (perquè la sèrie $\sum \frac{d_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ té el mateix radi de convergència que $\sum d_n (z-a)^n$) que té la mateixa derivada que f , $g' = f'$, i que satisfà $g(a) = f(a)$; per tant, $g(z) = f(z)$, si $z \in D(a, R)$.

Derivant o antiderivant sèries de potències hom pot calcular les sumes d'algunes sèries de potències o bé trobar el desenvolupament en sèrie de potències de determinades funcions.

Exemple 2.33. La sèrie $\sum_{n \geq 1} n^2 z^n$ té radi de convergència 1 i volem calcular-ne la suma. Ho podem fer utilitzant el fet que coneixem la suma de la sèrie geomètrica $\sum z^n$, que és $\frac{1}{1-z}$, i observant senzillament que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} n^2 z^n &= \sum_{n \geq 1} (n(n-1) + n) z^n = z^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1) z^{n-2} + z \sum_{n \geq 1} n z^{n-1} = \\ &= z^2 \left(\frac{1}{1-z} \right)'' + z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

De la mateixa manera podríem calcular la suma de $\sum P(n) z^n$ sempre que $P(n)$ sigui un polinomi en la variable n . $\square$

Exemple 2.34. La funció $\text{Log}(1-z)$ que, com sabem, està ben definida si $1-z$ no és real negatiu, és a dir, si z no és real i més gran o igual que 1, té desenvolupament en sèrie de potències a l'entorn de zero. La seva derivada és $-1/(1-z)$, que té el desenvolupament $-\sum_{n \geq 0} z^n$ per a $|z| < 1$ i, per tant,

resulta

$$\text{Log}(1-z) = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

(fig. 2.7).

$\square$

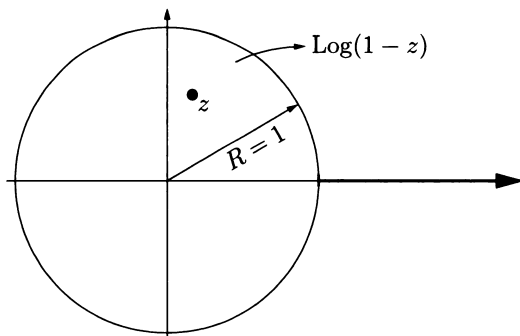


Figura 2.7

Exemple 2.35. Considerem ara la sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$, que convergeix a tot el disc unitat tancat $\overline{\mathbb{D}}$. Si $f(z)$ és la suma d'aquesta sèrie, hom té

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

Si tenim en compte l'exemple 2.34 és, $f'(z) = -\text{Log}(1-z)$. Calculem ara les antiderivades de $-\text{Log}(1-z)$, integrant per parts,

$$\begin{aligned} - \int \text{Log}(1-z) dz &= (w = 1-z) = \int \text{Log } w dw = w \text{Log } w - w + c = \\ &= (1-z) \text{Log}(1-z) + z + c. \end{aligned}$$

Per tant, $f(z) = (1-z) \text{Log}(1-z) + z + c$. Fent $z = 0$ veiem que $c = 0$ i, per tant,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} = (1-z) \text{Log}(1-z) + z, \quad |z| < 1. \quad (2.16)$$

Pel teorema d'Abel (teorema 2.20), com que la sèrie convergeix a tot punt z amb $|z| = 1$, tenim, si posem $z = e^{i\theta}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)\theta}}{n(n+1)} = \lim_{r \rightarrow 1} [(1-re^{i\theta}) \text{Log}(1-re^{i\theta}) + re^{i\theta}].$$

Si $z \neq 1$, aquest límit val $(1-z) \text{Log}(1-z) + z$. Si $z = 1$, $(1-r) \text{Log}(1-r) \rightarrow 0$ quan $r \rightarrow 1$ i el límit val 1. Així doncs, la igualtat (2.16) és certa per a

$|z| \leq 1$, $z \neq 1$. Si $z = 1$ dona $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, igualtat que és evident perquè $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. $\square$

2.5.2 Funcions analítiques

La idea de desenvolupament en sèrie de potències és la base per a la noció de *funció analítica*.

Definició 2.36. Una funció $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, definida a l'obert U del pla, s'anomena *analítica a U* si, localment, és desenvolupable en sèrie de potències, és a dir, si per a cada punt $a \in U$ hi ha un disc $D(a, \delta) \subset U$, $\delta > 0$, i una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ si $z \in D(a, \delta)$.

Observem que tant el radi δ com la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ poden dependre del punt a . Pel teorema 2.31 una funció f analítica a U és indefinidament holomorfa i cadascuna de les derivades $f^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, és també analítica a U . Més endavant (teorema 4.9) veurem que, recíprocament, tota funció holomorfa en un obert U és analítica a U i, per tant, indefinidament holomorfa. En la definició 2.36, el disc $D(a, \delta)$ pot ser en principi arbitràriament petit, però veurem que de fet el desenvolupament en sèrie és vàlid al disc més gran possible centrat en a i inclòs a U , que té per radi $\delta(a) = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus U)$.

Exemple 2.37. Una funció racional $R = P/Q$ és una funció analítica a $U = \mathbb{C} \setminus Z(Q)$, on $Z(Q)$ és el conjunt format pels pols de R (els zeros de Q). En efecte, R és la suma finita d'un polinomi en z i de fraccions simples del tipus $\alpha \cdot (z - b)^{-k}$, on b és un dels pols de R , $k \in \mathbb{N}$ i α és una constant. Per a una prova d'aquest fet vegeu el teorema 5.13. Per tant, és suficient que desenvolupem $(z - b)^{-k}$ al voltant d'un punt $a \notin Z(Q)$. Posem $r = |a - b| > 0$. Si $|z - a| < r$, utilitzem la sèrie geomètrica per a escriure

$$\frac{1}{z - b} = \frac{1}{z - a - (b - a)} = \frac{1}{\left(\frac{z-a}{b-a} - 1\right)(b-a)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

Si derivem successivament aquest desenvolupament i utilitzem el teorema 2.31, obtenim, per a $k > 1$,

$$\frac{1}{(z-b)^k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(z-a)^{n-k}}{(b-a)^{n+1}} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+k+1}}.$$

Si $b_1, \dots, b_M$ són els pols de R , el desenvolupament de R al voltant de a serà vàlid al disc de radi $\delta(a) = \min\{|a - b_j|, j = 1, \dots, M\}$, la distància de a a $\mathbb{C} \setminus U = Z(Q)$. $\square$

Per a desenvolupar una funció determinada en sèrie de potències, de vegades és aconsellable desenvolupar prèviament la seva derivada.

Exemple 2.38. La funció $f(z) = \text{Log}(1 - z)$ és analítica a $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. En efecte, considerem prèviament $f'(z) = \frac{1}{z-1}$, de la qual ja coneixem el seu desenvolupament al voltant de 0. Al voltant d'un punt a qualsevol, $a \notin [1, +\infty)$, tenim

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-a-(1-a)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}, \quad |z-a| < |1-a|. \quad (2.17)$$

Al disc $D(a, |1-a|)$ existeixen determinacions de $\log(1-z)$, tantes com determinacions de $\log w$ a $D(1-a, |1-a|)$; qualsevol d'aquestes determinacions, g , tindrà un desenvolupament que obtenim integrant (2.17)

$$g(z) = g(a) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(z-a)^{n+1}}{(1-a)^{n+1}} = g(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n(1-a)^n}.$$

Considerem la determinació g que en a val $\text{Log}(1-a)$. Tindrem

$$g(z) = \text{Log}(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n(1-a)^n}, \quad |z-a| < |1-a|.$$

Posem ara $\delta(a) = \text{dist}(a, [1, +\infty))$; observem que $\delta(a) = |1-a|$, si $\text{Re } a \leq 1$ i $\delta(a) = |\text{Im } a| \leq |1-a|$ si $\text{Re } a > 1$. Llavors $\text{Log}(1-z)$ i g són determinacions de $\log(1-z)$ a $D(a, \delta(a))$ que coincideixen en a i, per tant, són iguals i

$$\text{Log}(1-z) = \text{Log}(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n(1-a)^n}, \quad |z-a| < \delta(a),$$

és a dir, que $\text{Log}(1-z)$ és desenvolupable en sèrie de potències al voltant de a . Observem que quan $\text{Re } a > 1$ la sèrie que dona el desenvolupament de $\text{Log}(1-z)$ en $|z-a| < \delta(a)$ és convergent en un disc més gran, el de centre a i radi $|1-a|$. Si $|z-a| < |1-a|$, la sèrie $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n(1-a)^n}$ convergeix i té suma $\text{Log}\left(1 - \frac{z-a}{1-a}\right) = \text{Log} \frac{1-z}{1-a}$ (exemple 2.34 canviant z per $\frac{z-a}{1-a}$). Però $\text{Log}(1-a) + \text{Log} \frac{1-z}{1-a}$ no és sempre igual a $\text{Log}(1-z)$ si $\text{Re } a > 1$; per exemple,

si $a = 2 + i$, $z = 2 + \varepsilon i$, tenim $\frac{1-z}{1-a} = \frac{-1-\varepsilon i}{-1-i} = \frac{1+\varepsilon i}{1+i} = \frac{(1+\varepsilon)+i(\varepsilon-1)}{\sqrt{2}}$, que té l'argument principal proper a $-\frac{\pi}{4}$. Com que $\text{Arg}(1-a) = -\frac{3\pi}{4}$, la part imaginària de $\text{Log}(1-a) + \text{Log} \frac{1-z}{1-a}$ és a prop de $-\pi$. En canvi, la part imaginària de $\text{Log}(1-z)$, $\text{Arg}(1-z) = \text{Arg}(-1-\varepsilon i)$, és a prop de $-\pi$ només si $\varepsilon > 0$, ja que per a $\varepsilon < 0$ és a prop de π (fig. 2.8). $\square$

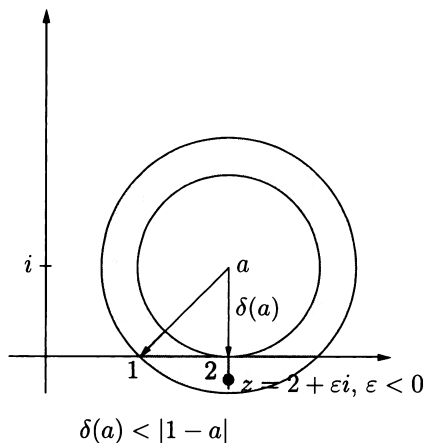


Figura 2.8

Quan tenim un polinomi en z , $P(z) = \sum_{n=0}^N c_n(z-a)^n$, és un fet algebraic trivial que P també és un polinomi en $(z-b)$, per a $b \in \mathbb{C}$; senzillament posem $(z-a)^n = (z-b+b-a)^n$ i ho desenvolupem amb la fórmula del binomi de Newton. No hi ha involucrades qüestions de convergència perquè la suma és finita. En canvi, si tenim una sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ amb radi de convergència $R > 0$ i prenem un punt $b \in D(a, R)$ no és immediat que f sigui desenvolupable a l'entorn de b , és a dir, que f es pugui expressar en la forma $f(z) = \sum_n d_n(z-b)^n$ al voltant del punt b . Dit d'una altra manera, no és evident que la suma d'una sèrie de potències $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$, $z \in D(a, R)$, sigui una funció analítica a $D(a, R)$, el disc de convergència de la sèrie. Aquest resultat és cert i és el contingut del teorema següent:

Teorema 2.39. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ a $D(a, R)$ i $b \in D(a, R)$, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$ té radi de convergència més gran o igual que $R - |a-b|$ i es

complex

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n \quad \text{si } |z-b| < R - |a-b|.$$

Demostració. Tenim

$$f^{(n)}(b) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!} c_{n+m} (b-a)^m, \quad (2.18)$$

$$|f^{(n)}(b)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!} |c_{n+m}| |b-a|^m \quad (2.19)$$

(la sèrie de potències de f és absolutament convergent a $D(a, R)$). Prenem r tal que $|b-a| \leq r < R$. Aleshores, fent servir (2.19) i sumant per blocs (proposició 2.8), resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \right| (r - |b-a|)^n &\leq \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!n!} |c_{n+m}| |b-a|^m (r - |b-a|)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \sum_{m+n=k} \frac{(n+m)!}{m!n!} |b-a|^m (r - |b-a|)^n = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < +\infty. \end{aligned}$$

Això prova que la sèrie centrada a b té radi de convergència $\geq r - |b-a|$; com que r és arbitràriament proper a R , aquest radi és $\geq R - |b-a|$. Prenem ara un punt z tal que $|z-b| \leq r - |b-a|$ amb $r < R$. El mateix càlcul que acabem de fer prova que la sèrie doble

$$\sum_{n,m} c_{n+m} \frac{(n+m)!}{m!n!} (b-a)^m (z-b)^n$$

convergeix absolutament i, per la proposició 2.8, per a calcular-ne la suma podem agrupar els termes arbitràriament. Agrupant en $m+n=k$, com abans, s'obté $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = f(z)$, mentre que sumant primer en m i fent servir (2.18) s'obté la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$. $\square$

Aquest teorema també és conseqüència del resultat, ja enunciat, que diu que tota funció holomorfa en un obert U és analítica a U (teorema 4.9).

2.6 Funcions analítiques de variable real i la seva extensió complexa

El concepte de sèrie de potències i les nocions associades (dominis de convergència, operacions amb sèries de potències, etc.) poden plantejar-se en el context d'una variable real motivat, en aquest cas, per l'aproximació mitjançant els polinomis de Taylor. Recordem, primer, que una funció d'una o de diverses variables reals es diu que és de classe C^r , $1 \leq r \leq +\infty$, en una regió si hi té derivades parcials fins a l'ordre r que són contínues.

Si f és una funció de classe C^N en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ i $a \in I$, la fórmula de Taylor s'escriu

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_N(x)$$

on $R_N(x) = o(|x-a|^N)$ és el residu d'ordre N . Quan f és de classe C^{N+1} , hi ha expressions explícites de $R_N(x)$, com ara la de Lagrange,

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1},$$

amb ξ intermedi entre a i x . El sentit de tot plegat és que $f(x)$ s'aproxima pel polinomi de Taylor $\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ i que l'error, $R_N(x)$, es fa petit a mesura que N creix. De manera natural es planteja llavors, per a f de classe C^∞ , la qüestió de saber si $R_N(x) \rightarrow 0$ quan $N \rightarrow \infty$, és a dir, de saber si val la igualtat

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (2.20)$$

Així és com s'arriba a la consideració de les sèries de potències de la variable real x , $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Per a aquestes sèries valen les definicions i els resultats dels apartats 2.3.3 i 2.3.4 i també la versió corresponent del teorema 2.31. Això vol dir que a la sèrie $\sum_n c_n (x-a)^n$ li correspon un radi de convergència R de manera que la sèrie convergeix a l'interval $\{x: |x-a| < R\}$ i en ell defineix una funció $f(x) = \sum_n c_n (x-a)^n$, que té infinites derivades respecte de la variable

real x . Així mateix, ha de ser $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ i, per tant, l'única manera d'expressar $f(x)$ com a suma d'una sèrie de potències és mitjançant la seva sèrie de Taylor (2.20).

Si la funció f està definida en un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ es diu que f és una *funció analítica de variable real* a I si es verifica la versió real de la definició 2.36. Això significa, després del que hem dit, que per a cada punt $a \in I$ hi ha un $\delta(a) > 0$ de manera que (2.20) val a l'interval $\{x: |x-a| < \delta(a)\}$. En particular, si f és analítica a I , f és de classe C^∞ a I .

En el càlcul infinitesimal, utilitzant precisament l'expressió de Lagrange per al residu $R_N(x)$, es proven les igualtats

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Aquests desenvolupaments són vàlids a tota la recta $\mathbb{R}$. Però la sèrie de Taylor d'una funció f no sempre convergeix a tota la recta, encara que f sigui C^∞ a tot $\mathbb{R}$. Per exemple,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

val només per a $|x| < 1$, tot i que la funció és C^∞ a $\mathbb{R}$.

Totes aquestes consideracions podem fer-les, com dèiem, limitant-nos al context d'una variable real. Ara bé, associar a una sèrie de potències real $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, amb $a \in \mathbb{R}$, $c_n \in \mathbb{R}$, un *interval de convergència* $(a-R, a+R)$ és una limitació innecessària. En efecte, el que hem vist fins ara ja ens assegura que si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ convergeix per a $|x-a| < R$, llavors la sèrie complexa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ convergeix per a $z \in D(a, R)$. Això significa que el *domini natural* de definició de les sèries de potències són els discos, no els intervals. De la mateixa manera, el domini natural de definició de les funcions analítiques de variable real no són els intervals $I \subset \mathbb{R}$, sinó els dominis $U \subset \mathbb{C}$ simètrics respecte de l'eix real. Veurem un enunciat precís d'aquest fet en el teorema 4.28. Aquesta extensió natural de les funcions analítiques de variable real al domini complex ja l'hem vista en alguns exemples. Així, per a la funció exponencial de variable real $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hem definit la seva extensió complexa per

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

si $z = x + iy$ (apartat 2.3.5). Anàlogament, per a les funcions trigonomètriques,

tenim

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

que són funcions analítiques a tot $\mathbb{C}$, segons el teorema 2.39.

Si partim ara, per exemple, d'una funció racional $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ on P i Q són polinomis en x , de manera que $R(x)$ és analítica a $\mathbb{R} \setminus Z_0(Q)$ on $Z_0(Q)$ són els zeros reals de $Q(x)$, la seva extensió complexa és la funció racional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ que és analítica a $\mathbb{C} \setminus Z(Q)$ on $Z(Q)$ és el conjunt de tots els zeros (complexos) de Q en els quals $P(z)$ tingui un zero d'ordre inferior al de Q (o no hi tingui cap zero).

A més a més, el punt de vista complex serveix per a comprendre millor alguns aspectes que des d'una perspectiva real no poden explicar-se satisfactòriament. Per exemple, considerem els dos desenvolupaments

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

vàlids si $|x| < 1$. En el primer cas el fet que el domini de convergència sigui $(-1, 1)$ no ens pot sorprendre perquè la funció, que té una singularitat en $x = 1$, només està definida a l'obert $U = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ i el radi de convergència és la distància del zero a $U^c = \{1\}$. En canvi, en el segon cas la funció està definida a tota la recta $\mathbb{R}$ però el desenvolupament només és vàlid a $(-1, 1)$. Ara bé, si pensem en termes de l'extensió complexa $\frac{1}{1+z^2}$, ho entendrem millor: hi ha singularitats en els punts $z = \pm i$, a distància 1 de 0, i això explica que el radi de convergència sigui 1. Amb aquest punt de vista complex també s'aclareixen immediatament altres qüestions. Per exemple, en quin interval convergeix el desenvolupament en sèrie de potències de $\frac{1}{1+x^2}$ al voltant d'un punt $a \in \mathbb{R}$? La resposta és a l'interval de centre a i radi $\sqrt{1+a^2}$, que és la distància de a als pols $\pm i$ de la funció $\frac{1}{1+z^2}$.

Com a últim exemple, considerem la funció

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(4-x^2)},$$

que és analítica de la variable real x a l'interval $I = (-2, 2)$, però que té el seu desenvolupament al voltant de 0 convergent només a l'interval $(-1, 1)$ i no a tot l'interval $(-2, 2)$. Aquest últim és el màxim interval centrat en 0 contingut al domini d'analicitat I , i la reducció és deguda, una altra vegada, a les singularitats complexes del factor $\frac{1}{1+x^2}$.

El sentit que cal donar a tots aquests comentaris és que l'analicitat és genuïnament un concepte de variable complexa. En el món de la variable real, els conceptes de funció $\mathbb{R}$ -derivable, de funció indefinidament $\mathbb{R}$ -derivable i de funció analítica real són diferents. Hi ha funcions $\mathbb{R}$ -derivables que no ho són indefinidament, per exemple $|x|x$, i hi ha funcions de classe C^∞ que no són analítiques reals, per exemple

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En canvi, en variable complexa, veurem en el capítol 4 que els tres conceptes corresponents: funció $\mathbb{C}$ -derivable (holomorfa), funció indefinidament holomorfa i funció analítica complexa, són exactament el mateix. Per un abús de notació, quan es parla de *funcions de variable complexa*, moltes vegades hom es refereix a les funcions analítiques, i quan es parla d'extensions complexes de funcions $f(x)$, definides per a valors reals de la variable x , hom es refereix a extensions $F(z)$ (és a dir, $F(z) = f(x)$ si $z = x \in \mathbb{R}$) que siguin analítiques. Estendre una funció $f(x)$ a una funció $F(z)$ sense aquest requeriment d'analicitat és una trivialitat, posant senzillament

$$F(x + iy) = f(x).$$

A més, hi ha una infinitat de maneres diferents d'estendre f ; per exemple, també serveix $F(x + iy) = f(x) + iG(y)$ amb G arbitrària. En canvi, si $f(x)$ és analítica real, l'extensió de f a una funció analítica complexa és única.

Hi ha encara una altra noció de funció analítica, que és la de funció analítica de dues variables reals. Una funció f definida en un obert $U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, amb valors reals o complexos, s'anomena *funció analítica de variables reals* a U si per a tot punt $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ hi ha un disc $D(z_0, r) \subset U$ i una sèrie de potències doble $\sum_{n,m} c_{n,m} x^n y^m$ tals que

$$f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} (x - x_0)^n (y - y_0)^m \text{ si } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$

Altra vegada, en aquest cas f és de classe C^∞ i el desenvolupament, que és únic, ha de ser la sèrie de Taylor per a funcions de dues variables; és a dir, necessàriament

$$c_{n,m} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} (x_0, y_0).$$

Evidentment, si f és analítica en la variable $z = x + iy$, aleshores també ho és en les variables x, y . Però, de la mateixa manera que no tot polinomi en x, y

és un polinomi en z , el recíproc no és cert. Per exemple, $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ és una funció analítica de x, y a tot el pla que no és analítica en z a cap obert de $\mathbb{C}$ (perquè en ser una funció real no constant no pot ser holomorfa a cap domini, segons la proposició 2.26).

2.7 Exercicis

1. Proveu la igualtat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ per a tot z complex, a partir de la identitat:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \frac{z^p}{p!}.$$

2. Proveu que la funció $\cos z$ aplica la banda $B = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ sobre el domini $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 1\}$ de manera conforme i injectiva. Expressen la funció inversa en termes de la funció logarítmica.
3. Proveu que els números complexos $z \neq 0$ tals que z^z només pren valors reals estan situats sobre un conjunt numerable de rectes paral·leles a l'eix d'ordenades i que a sobre de cadascuna d'aquestes rectes hi ha infinits números amb aquesta propietat.
4. Si $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$, i $h_w(z) = \operatorname{Log} |z - w|$, proveu la igualtat

$$\int_{\gamma} h_w ds = 2\pi r \operatorname{Log}(\max(r, |w|)).$$

5. Sigui f la funció holomorfa definida al disc unitat $\mathbb{D}$ per $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$. Proveu que f és injectiva a $\mathbb{D}$ i $f(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C}: -\pi/4 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$.
6. Calculeu, per a $t \in [-\pi, \pi]$, la suma de les sèries següents:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2 - 1}$

7. Sigui $I = \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |1 - we^{it}| dt$, amb $w \in \mathbb{C}$. Proveu que $I = 0$, si $|w| \leq 1$, i $I = 2\pi \operatorname{Log} |w|$, si $|w| \geq 1$.
8. Sigui $f(z) = \sum_n c_n z^n$ la suma d'una sèrie de potències de radi de convergència $R > 0$ i $f'(0) = c_1 \neq 0$. Proveu la igualtat

$$|f(z) - f(w)| = |z - w| \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}) \right|$$

per a $z, w \in D(0, R)$ i, com a conseqüència, que f és injectiva al disc $D(0, r)$ si $0 < r < R$, i, a més, es compleix

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |c_n| r^{n-1} < |c_1|.$$

9. Sigui $f(z) = \sum_n c_n z^n$ la suma d'una sèrie de potències de radi de convergència $R > 0$ i $0 < r < R$. Proveu:

a)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_n |c_n|^2 r^{2n}$$

Feu servir aquesta igualtat per a deduir que una funció holomorfa i acotada a tot el pla ha de ser constant (teorema de Liouville).

b)

$$\frac{1}{\pi} \int \int_{D(0,r)} |f'(z)|^2 dx dy = \sum_n n |c_n|^2 r^{2n},$$

on $z = x + iy$. Si, a més, f és injectiva, llavors l'expressió anterior és l'àrea de $f(D(0, r))$.

10. Trobeu l'expressió de les equacions de Cauchy-Riemann en coordenades polars.

11. Si $f(z) = \sum_n c_n z^n$, $|z| < R$ i $0 < r < R$, sigui $L(r)$ la longitud de la corba imatge per f de la circumferència $\{re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Proveu la desigualtat

$$L(r) \geq 2\pi r |c_1|.$$

12. Sigui $f(z) = \sum_n c_n z^n$ amb radi de convergència $R > 1$ i $z = x + iy$. Proveu:

a)

$$\int \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dx dy = \pi \sum_n \frac{|c_n|^2}{n+1}.$$

b)

$$\int \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^4 dx dy = \pi \left(\sum_n |c_n|^2 \right)^2.$$

13. a) Proveu que la funció $\arctan z = \tan^{-1} z$ amb $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ té una determinació holomorfa al disc unitat i trobeu totes les seves determinacions.
 b) Desenvolupeu en sèrie de potències al voltant del zero la funció

$$f(z) = z \arctan z - \operatorname{Log} \sqrt{1 + z^2},$$

indicant el radi de convergència, on $\arctan$ indica una determinació de $\tan^{-1}$ i on es pren la determinació principal de l'arrel quadrada.

- c) Estudieu el comportament de la sèrie anterior a la frontera del disc de convergència i expliqueu quina relació hi ha entre la seva suma i la funció f . Calculeu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$.
14. Per a cada $a \in \mathbb{D}$ definim $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Proveu que f_a és injectiva a $\overline{\mathbb{D}}$, holomorfa en un entorn de $\overline{\mathbb{D}}$ i compleix $f_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $f_a(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$ i $f_a^{-1} = f_{-a}$, a $\mathbb{D}$.
15. Si $f(z) = \sum c_n z^n$ per a $|z| < R$, proveu que per a $0 < r < R$ es compleix

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

on $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\}$ (desigualtats de Cauchy).

Deduïu d'aquestes desigualtats que si $R = +\infty$, llavors hom té $\sum_n |c_n| r^n \leq 2M(2r)$, per a tot $r > 0$.

16. Proveu que la funció $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy$, compleix les equacions de Cauchy-Riemann a l'origen però no és $\mathbb{C}$ -derivable en aquest punt.
17. Proveu que si P és un polinomi, llavors els zeros del polinomi derivada P' estan tots a l'embolcall convex del conjunt de zeros de P . Com a indicació, proveu que si tots els zeros de P estan en un semiplà, aleshores els zeros de P' també estan en el mateix semiplà.
18. Per a tot $\alpha \in \mathbb{C}$ la funció $f(z) = (1+z)^\alpha$ té una determinació holomorfa a $\mathbb{D}$ tal que $f(0) = 1$. Proveu que, per a aquesta determinació, és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1$$

i estudieu el comportament de la sèrie quan $|z| = 1$.

19. Sigui $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ la suma d'una sèrie de potències de radi de convergència $R > 0$ i suposem que hi ha un $k \in \mathbb{N}$ i una funció g definida a $D(0, R^k)$ de manera que $f(z) = g(z^k)$ si $|z| < R$. Proveu que la funció g és la suma d'una sèrie de potències de radi de convergència R^k i que $c_n = 0$ si n no és múltiple de k .

20. Considerem el polinomi $P(z) = 1 - \sum_{n=1}^N \alpha_n z^n$ amb $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ i suposem que la funció $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ té el desenvolupament en sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ al voltant de l'origen. Proveu que els coeficients c_n compleixen les relacions: $c_0 = 1$, $c_n = \sum_{j=1}^N \alpha_j c_{n-j}$ si $n \geq 1$ entenent que $c_k = 0$ si $k < 0$.

Proveu ara que definint la successió (c_n) de forma recurrent mitjançant les relacions anteriors a partir de $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, existeix una constant $M > 0$ tal que $|c_n| \leq M^n$, per a $n \geq 0$. En conseqüència la sèrie de potències $\sum_n c_n z^n$ té un radi de convergència $R > 0$ i defineix una funció $f(z)$ al disc $D(0, R)$. Comproveu que $f(z) \cdot P(z) = 1$ i que $R = \min(|\beta_1|, \dots, |\beta_N|)$ on $\beta_1, \dots, \beta_N$ són els zeros del polinomi P .

21. Proveu que la sèrie de potències $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$ té radi de convergència igual a 1 i que convergeix uniformement al disc tancat $\overline{\mathbb{D}}$. Proveu que la suma $f(z)$ d'aquesta sèrie compleix l'equació

$$f'(z) = -\frac{1}{z} \operatorname{Log}(1-z), \quad |z| < 1.$$

Deduiu d'aquí que en el domini $U = \{z: |z| < 1, |z-1| < 1\}$ hom té

$$f(z) + f(1-z) = c - \operatorname{Log} z \cdot \operatorname{Log}(1-z)$$

amb $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Utilitzeu l'equació anterior per tal de calcular el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$.

22. Siguin $f, g \in H(\mathbb{D})$ amb desenvolupament en sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$, per a $|z| < 1$. Proveu que les sèries $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z^n)$ i

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(z^n)$ són uniformement convergents sobre cada disc compacte $\overline{D}(0, r)$, $0 < r < 1$, i defineixen la mateixa funció holomorfa a $\mathbb{D}$.

Posem ara $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f(z^n)$ i sigui $\sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n$ una tercera sèrie de potències convergent a $\mathbb{D}$. Proveu la igualtat

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n F(z^n) = \sum_{n,m,k} c_n d_m h_k z^{nmk}, \quad |z| < 1.$$

Funcions holomorfes i formes diferencials

En el càlcul amb funcions d'una variable real, un resultat bàsic és el teorema fonamental del càlcul, que estableix un vincle entre el concepte de diferenciació i el d'integració: tota funció contínua té antiderivada, i aquesta, llevat de constants, està donada per la integral indefinida. En aquest capítol estudiarem aquest tipus de qüestions per a funcions de variable complexa. Amb aquesta finalitat és convenient de fer servir el llenguatge dels camps vectorials i de les 1-formes diferencials. El paper de les integrals indefinides el fan ara les integrals de línia de camps o de formes al llarg de camins del pla complex.

Per a desenvolupar la teoria de les funcions holomorfes, un resultat fonamental és el teorema de Cauchy sobre l'anul·lació de la integral de línia d'una funció holomorfa al llarg de camins tancats. Aquest resultat el presentarem com un cas particular d'una versió de la fórmula de Green amb hipòtesis de regularitat molt febles, les quals serveixen també per als teoremes clàssics del càlcul vectorial.

En la segona part del capítol ens situem en un context de variable real en el qual veurem que la noció de funció holomorfa es correspon amb la noció de camp vectorial localment conservatiu i solenoïdal. Apareix llavors de manera natural l'operador de Laplace i el concepte de funció harmònica: els camps localment conservatius i solenoïdals resulten ser els camps que localment són gradients de funcions harmòniques. S'arriba així a la noció que, des d'una perspectiva de variable real, generalitza el concepte de funció holomorfa a funcions definides en oberts de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Integrals de línia complexes

La definició d'integral de línia complexa comporta la integració sobre intervals de $\mathbb{R}$ de funcions que prenen *valors complexos*. Si $f(t) = u(t) + iv(t)$ és una funció contínua per a $t \in [a, b]$, amb u, v reals, es posa per definició

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Amb aquesta definició es compleix la propietat de linealitat

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt,$$

on f, g són contínues i α, β són constants complexes. També es compleix

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad (3.1)$$

Per a provar aquesta desigualtat, considerem un número λ amb $|\lambda|=1$, tal que $\lambda \int_a^b f(t) dt \geq 0$; és a dir, si $\int_a^b f(t) dt = re^{i\theta}$, $r \neq 0$, posem $\lambda = e^{-i\theta}$ (si aquesta integral és zero, no hi ha res per a provar). Llavors,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \lambda \int_a^b f(t) dt = \operatorname{Re} \left[\lambda \int_a^b f(t) dt \right] = \int_a^b \operatorname{Re} \lambda f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Definició 3.1. Si $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, és una corba de classe C^1 en el pla complex i f és una funció contínua a γ^* , amb valors complexos, la integral de línia complexa $\int_\gamma f(z) dz$ de f al llarg de γ , és

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Formalment substituïm z per $\gamma(t)$ i dz per $\gamma'(t) dt$. Observem que la funció que s'integra sobre $[a, b]$ és una funció amb valors complexos, producte de $f(\gamma(t))$ i $\gamma'(t)$, i el resultat serà un número complex. La integral està ben definida perquè per hipòtesi l'integrand és continu a $[a, b]$. Igual que per al cas d'integrals de funcions reals o d'integrals respecte de l'element de longitud ds , $\int_\gamma f(z) dz$ és el límit de les *sumes de Riemann complexes*

$$\sum_i f(z_i)(z_{i+1} - z_i),$$

on $z_i = \gamma(t_i)$ són els vèrtexs d'una poligonal inscrita a γ^* . Si en el lloc de $(z_{i+1} - z_i)$ hi posem $|z_{i+1} - z_i|$, el límit corresponent és $\int_{\gamma} f(z) ds$, tal com s'ha explicat en l'apartat 1.4.3. Per aquest motiu, sovint s'escriu $|dz|$ en lloc de ds ; així

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Amb la definició d'integral de línia complexa hom té, evidentment,

$$\int_{\gamma} dz = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Exemple 3.2. Si $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ i $f(z) = \frac{1}{z}$ és $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$. En canvi, $\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}} = 0$. Si $\gamma(t) = (t, t^2) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$, i $f(z) = \bar{z}^2$, llavors $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (t - it^2)^2 (1 + 2it) dt = \int_0^1 ((3t^4 - t^2) - 2it^5) dt = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}$. $\square$

Mirem ara com es comporta la integral de línia complexa davant dels canvis de parametrització: $t = \Phi(u)$, $c \leq u \leq d$, $\Gamma(u) = \gamma(\Phi(u))$. Si apliquem les definicions, resulta

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_c^d f(\Gamma(u)) \Gamma'(u) du, \quad (3.2)$$

i com que $\Gamma'(u) = \gamma'(\Phi(u))\Phi'(u)$, la integral de (3.2) val

$$\int_c^d f(\gamma(\Phi(u))) \gamma'(\Phi(u)) \Phi'(u) du.$$

Si ara apliquem el canvi de variable $t = \Phi(u)$, obtenim, quan la reparametrització conserva el sentit del recorregut, és a dir, quan Φ és creixent i $\Phi(c) = a$, $\Phi(d) = b$,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Si la reparametrització canvia el sentit del recorregut, s'obté per a $\int_{\Gamma} f(z) dz$ el valor oposat de $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Si γ és una corba de classe C^1 a trossos i $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ són els trossos amb derivada contínua de manera que l'origen de γ_{i+1} és el punt final de γ_i , situació que designarem per $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, llavors posem per definició

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Com que les integrals són independents de les parametritzacions, sempre que conservin el sentit, no hi ha cap necessitat que els paràmetres de les parts γ_i varïn en intervals disjunts i s'acostuma a treballar separatament en cadascuna d'elles.

Exemple 3.3. La integral de la funció z^2 al llarg del camí que consisteix en γ_1 , que és l'arc de la paràbola $y = x^2$ que va de 0 a $(1, 1) = 1 + i$, seguit del segment vertical γ_2 , que va de $1 + i$ a 1, té dues parts: per a calcular $\int_{\gamma_1}$ utilitzem la parametrització $z = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$, $dz = (1 + 2it) dt$ i tenim $\int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it) dt = \int_0^1 (t^2 - 5t^4 + 2it^3(2 - t^2)) dt = \frac{2}{3}(i - 1)$; per a calcular $\int_{\gamma_2}$ utilitzem la parametrització $z = 1 + (1 - t)i$, $dz = -i dt$, $0 \leq t \leq 1$; això és el mateix que utilitzar $z = 1 + ti$, $dz = i dt$, on t va de 1 a 0: trobem, $\int_1^0 (1 - t^2 + 2it)(i dt) = 1 - \frac{2}{3}i$. Així doncs, $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} z^2 dz = \frac{1}{3}$. $\square$

En les estimacions de les integrals de línia complexes utilitzarem sovint la desigualtat

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| ds,$$

que és conseqüència immediata de les definicions i de (3.1). En particular, si f compleix l'acotació $|f(z)| \leq M$ sobre γ^* , hom té

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma). \quad (3.3)$$

Acabem aquesta secció observant que l'índex d'un camí γ respecte d'un punt $z \notin \gamma^*$, donat per (1.6) de l'apartat 1.5.2, s'escriu com una integral de línia complexa

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}. \quad (3.4)$$

Aquesta expressió ens serà força útil d'ara endavant. Per exemple, utilitzant la desigualtat (3.3), trobem

$$|\text{Ind}(\gamma, z)| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi d(z, \gamma^*)},$$

on d indica la distància euclidiana i, per tant, és clar que l'índex tendeix a zero quan z tendeix a infinit i aquest fet implica que necessàriament val zero en la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Si una sèrie $\sum_n f_n(t)$ de funcions contínues en un interval $[a, b]$ amb valors reals o complexos, convergeix uniformement en $[a, b]$, llavors la seva suma és

una funció contínua, la sèrie numèrica $\sum_n \int_a^b f_n(t) dt$ és convergent i

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n(t) \right) dt = \sum_n \int_a^b f_n(t) dt.$$

En combinar aquest fet amb la definició 3.1 resulta la propietat següent:

Proposició 3.4. *Si γ és un camí del pla complex i $\{f_n\}$ és una successió de funcions contínues a γ^* tal que $\sum_n f_n(z)$ convergeix uniformement a γ^* , aleshores $\sum_n \int_\gamma f_n(z) dz$ és convergent i*

$$\int_\gamma \left(\sum_n f_n(z) \right) dz = \sum_n \int_\gamma f_n(z) dz.$$

3.2 Integrals de línia, camps vectorials i 1-formes diferencials

Les integrals de línia complexes són un cas particular de les integrals de línia o circulacions de camps vectorials al llarg de corbes o, equivalentment, de les integrals de 1-formes diferencials (si les admetem amb valors complexos). En aquesta secció farem un repàs d'aquests conceptes en el seu context natural, els dominis de $\mathbb{R}^n$.

Un *camp vectorial* continu $\vec{X}$ en un domini U de $\mathbb{R}^n$ és senzillament una aplicació contínua $\vec{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada punt $x \in U$ un vector $\vec{X}(x)$, que situem amb l'origen en el punt x . Exemples típics de camps vectorials són els camps de velocitats o els camps de forces. Més generalment hom pot considerar camps $\vec{X}(x, t)$ que depenen també del temps, dels quals en veurem exemples en el capítol 7. En les línies següents però, ens limitarem a camps $\vec{X}(x)$ independents del temps, anomenats també *camps estacionaris*.

En el pla complex, amb la identificació habitual, un camp vectorial en un domini U és el mateix que una funció complexa definida a U . De vegades resulta convenient veure les funcions complexes com a camps vectorials.

Exemple 3.5. La funció $f(z) = z$ defineix un camp radial. La funció e^z , que és periòdica de període $2\pi i$, defineix el camp de la figura 3.1. $\square$

Un concepte important associat a un camp $\vec{X}$ és el de les *corbes integrals* o *trajectòries* del camp. Són les corbes γ de classe C^1 que en cada punt $\gamma(t)$

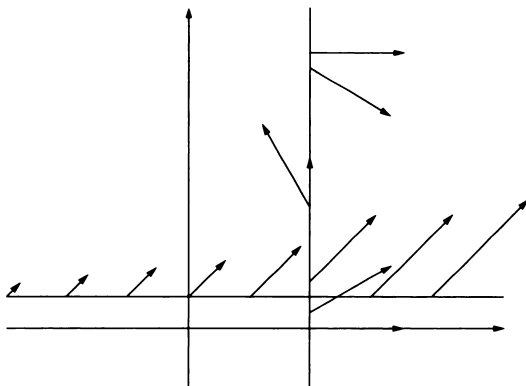


Figura 3.1

tenen vector tangent igual a $\vec{X}(\gamma(t))$. Analíticament, això s'expressa per

$$\gamma'(t) = \vec{X}(\gamma(t)),$$

o en coordenades, si $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ i $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, pel sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemple 3.6. Les trajectòries del camp $f(z) = \bar{z}$ són les solucions de $x' = x$, $y' = -y$, que són $x(t) = c_1 e^t$, $y(t) = c_2 e^{-t}$. Es tracta d'hipèrboles. Les trajectòries de $f(z) = iz$ són les circumferències $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$. Les trajectòries del camp $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$ són les solucions del sistema

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Aquestes equacions impliquen $\frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, és a dir, $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ha de ser constant en cada trajectòria. Les trajectòries són situades, per tant, sobre les semirectes d'origen en 0. Per trobar la parametrització és millor utilitzar coordenades polars $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$. Llavors resulta $r(t) = \sqrt{2t}$, $\theta(t) = \text{constant}$ (fig. 3.2). $\square$

Un camp vectorial continu $\vec{X}$ en un domini U de $\mathbb{R}^n$ dona lloc a dues nocions importants: *circulacions* i *fluxos*. Introduïrem el concepte de flux en la secció

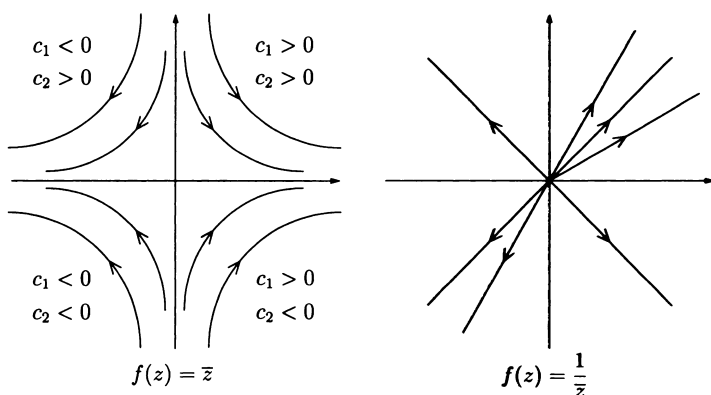


Figura 3.2

següent. La *circulació* de $\vec{X}$ al llarg d'una *corba regular* γ és, per definició, la suma de les components tangencials del camp $\vec{X}$ sobre γ , és a dir, si $\vec{T}$ és el vector tangent unitari a γ , la circulació és

$$\int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds,$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica el producte escalar a $\mathbb{R}^n$. Analíticament, en termes d'una parametrització $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, com que $\vec{T}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ i $ds = |\gamma'(t)|dt$ (secció 1.4.3), hom té com a expressió de la circulació

$$\int_a^b \langle \vec{X}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Aquesta expressió té sentit, més generalment, per a una corba γ de classe C^1 a trossos. Quan $\vec{X}$ és un camp de forces, la circulació és el treball fet pel camp per moure la massa unitat al llarg de la trajectòria. En termes de les components tenim

$$\int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = \int_a^b (X_1(\gamma(t))x'_1(t) + X_2(\gamma(t))x'_2(t) + \cdots + X_n(\gamma(t))x'_n(t)) dt,$$

raó per la qual s'utilitza també la notació

$$\int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = \int_{\gamma} X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n.$$

Observació 3.1. Les nocions de corba regular, camí, vector tangent a una corba o integració respecte de l'element de longitud s'han donat en la secció 1.4 per al cas de corbes en un domini U del pla. És evident que les mateixes nocions tenen sentit de manera idèntica per a corbes en un domini de $\mathbb{R}^n$.

L'expressió $\omega = \omega_{\vec{X}} = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n$, en definitiva allò que s'integra sobre γ per obtenir la circulació, s'anomena *1-forma diferencial*. Les 1-formes diferencials i els camps són, doncs, conceptes equivalents. La circulació del camp $\vec{X}$ al llarg de γ és, per definició, la *integral de línia* de la forma ω al llarg de γ i es representa per $\int_{\gamma} \omega$ ($= \int_{\gamma} \omega_{\vec{X}} = \int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds$).

Considerem ara una integral de línia complexa $\int_{\gamma} f(z) dz$. Si $f = u + iv$ i $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, hom té

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt, \quad (3.5) \end{aligned}$$

que es pot escriure en la forma

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx).$$

En termes del camp vectorial $\vec{f} = (u, -v)$ aquesta última igualtat significa que $\int_{\gamma} f(z) dz$ té com a part real la circulació de $\vec{f}$ al llarg de γ i com a part imaginària la circulació de $i\vec{f}$.

Una manera de manipular simultàniament integrals de línia complexes i circulacions de camps és considerar 1-formes diferencials

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

on P, Q són funcions amb *valors complexos*. Els camps vectorials corresponents a aquestes formes tindran components complexes. Així l'integrand d'una integral de línia complexa s'escriu $\omega = f(z) dz = f(z) dx + i f(z) dy$, és a dir, $\omega = P dx + Q dy$, amb $P = f, Q = if$. Aquest és el punt de vista que tindrem a partir d'ara.

El teorema següent es pot veure com una versió n -dimensional del teorema fonamental del càlcul.

Teorema 3.7. *Sigui $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, un camí a l'obert $U \subset \mathbb{R}^n$ amb origen $A = \gamma(a)$ i final $B = \gamma(b)$, h una funció de classe C^1 a U (real o complexa) i*

sigui $\vec{X} = \vec{\nabla}h$ el camp gradient de h . Aleshores

$$\int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = h(B) - h(A),$$

on $\vec{T}$ és el vector tangent unitari a γ .

Demostració. Si $x_i(t)$ són les components de $\gamma(t)$, la circulació val

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) x'_i(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (h \circ \gamma) dt = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)). \quad \square$$

Així, els camps gradients $\vec{X} = \vec{\nabla}h$, amb $h \in C^1(U)$, tenen la propietat que la circulació al llarg d'una corba només depèn de l'origen i de l'extrem de la corba.

Definició 3.8. Un camp $\vec{X}$ continu en un domini U de $\mathbb{R}^n$ s'anomena *conservatiu* si la circulació al llarg de tota corba γ inclosa a U només depèn del punt origen i del punt final de γ . Més explícitament, si γ_1, γ_2 són dos camins dins de U amb el mateix origen i el mateix final, s'ha de complir

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = \int_{\gamma_2} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds.$$

Es diu també que la circulació del camp $\vec{X}$ és independent del camí a U .

Si γ_1 i γ_2 són dos camins amb el mateix origen i el mateix final i γ és el camí que consisteix en recórrer γ_1 seguit del camí oposat a γ_2 (és a dir, recorregut en sentit contrari), llavors la circulació d'un camp conservatiu al llarg de γ serà zero. Així, un camp té integrals independents del camí a U si i solament si té circulació zero al llarg de tot camí tancat γ dins de U . Observem que es tracta d'un concepte global.

Així, el teorema 3.7 diu que un camp gradient és un camp conservatiu. El recíproc també és cert.

Teorema 3.9. Un camp $\vec{X}$ continu en un domini U de $\mathbb{R}^n$ és conservatiu a U si i només si és un camp gradient.

Demostració. Només falta veure que si $\vec{X}$ és conservatiu, hi ha una funció $h \in C^1(U)$ tal que $\vec{X} = \vec{\nabla}h$. Fixem un punt $x_0 \in U$; donat $x \in U$ considerem

qualsevol camí γ_x que comenci a x_0 i acabi a x dins de U (n'hi ha perquè U és arcconnex) i definim

$$h(x) = \int_{\gamma_x} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds.$$

Per hipòtesi, la integral no depèn del camí escollit i, per tant, h està ben definida. Comprovem ara que $\frac{\partial h}{\partial x_i} = X_i$ si $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Això vol dir que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x + te_i) - h(x)}{t} = X_i(x),$$

on $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Entre els camins que van de x_0 a $x + te_i$ podem considerar γ_x , que va de x_0 a x , seguit del segment σ que uneix x amb $x + te_i$. El quocient incremental és, doncs,

$$\frac{1}{t} \int_{\sigma} \omega = \int_0^1 P_i(x + ste_i) ds,$$

i és evident que el límit quan $t \rightarrow 0$ és $P_i(x)$. □

Observem que el teorema anterior, en el cas $n = 1$, no és altra cosa que el teorema fonamental del càlcul i estableix que tota funció contínua en un interval té una primitiva que és la seva integral indefinida. La funció h , tal que $\vec{X} = \vec{\nabla} h$, s'anomena *funció potencial* del camp $\vec{X}$ i està determinada llevat de constants.

Totes aquestes nocions tenen les seves corresponents quan s'expressen en termes de les 1-formes associades als camps vectorials. Així, si $\omega = \sum_i X_i(x) dx_i$,

on $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ és un camp conservatiu a U amb funció potencial $h \in C^1(U)$, $\vec{X} = \vec{\nabla} h$, llavors es diu que la 1-forma ω és *exacta* a U i s'escriu $\omega = dh$. El teorema 3.9 es reformula dient que una 1-forma contínua a U és exacta si i només si té integral de línia zero al llarg de tota corba tancada a U .

Un domini U s'anomena *estrellat* respecte d'un dels seus punts p si, donat $x \in U$, el segment que uneix p amb x és tot ell dins de U . Evidentment, un domini convex és estrellat respecte qualsevol dels seus punts. Si ens fixem en la demostració del teorema 3.9, veurem sense dificultat que quan U és estrellat, es pot adaptar per a provar el resultat següent:

Teorema 3.10. *En un domini estrellat U de $\mathbb{R}^n$ una 1-forma contínua ω és exacta si i només si $\int_{\partial \Delta} \omega = 0$ per a tot triangle $\Delta \subset U$ i un camp continu és conservatiu si i només si té circulació zero al llarg de la vora de qualsevol triangle contingut a U .*

La prova és la mateixa que la del teorema 3.9, tan sols que ara per a definir la funció potencial h en x triem com a camí γ_x que va de x_0 a x el segment que uneix aquests dos punts.

Definició 3.11. *Diem que una 1-forma ω és localment exacta (o que el camp $\vec{X}$ té localment funció gradient) en un domini U de $\mathbb{R}^n$ si per a tot punt $a \in U$ hi ha una bola $B(a, r) \subset U$, $r > 0$ i una funció $h \in C^1(B(a, r))$ tal que $\omega = dh$ (o bé $\vec{X} = \vec{\nabla}h$) a $B(a, r)$.*

Observem que fem servir la notació habitual $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$, amb $|\cdot|$ per a la norma a $\mathbb{R}^n$. Com que les boles són dominis estrellats, tenim trivialment:

Corol·lari 3.12. *En un domini $U \subset \mathbb{R}^n$ una 1-forma contínua ω és localment exacta si i només si compleix $\int_{\partial\Delta} \omega = 0$ per a tot triangle $\Delta \subset U$. Un camp vectorial continu té localment funció potencial si i només si té circulació zero al llarg de la vora de tot triangle inclòs en U .*

3.3 El teorema fonamental del càlcul complex

Tot seguit particularitzarem aquestes consideracions a la dimensió dos i al cas $\omega = f(z) dz$. Convé primer recordar les notacions

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy.$$

La diferencial dh d'una funció diferenciable h (amb valors reals o complexos) s'expressa com

$$dh = \frac{\partial h}{\partial z} dz + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Una 1-forma $\omega = P dx + Q dy$ s'escriu també $\omega = A dz + B d\bar{z}$, amb $A = \frac{1}{2}(P - iQ)$, $B = \frac{1}{2}(P + iQ)$. És a dir, z i $\bar{z}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, dz i $d\bar{z}$ funcionen com si fossin un sistema de coordenades.

Mirem ara quan una forma del tipus $\omega = f(z) dz$ és exacta en un domini U suposant només que f és contínua a U . Hi ha d'haver una funció $h \in C^1(U)$ tal que $dh = \omega$, és a dir,

$$\frac{\partial h}{\partial z} dz + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = f(z) dz.$$

Això significa que $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$, o sigui, que h és holomorfa i $h' = f$ a U . Així veiem que $f(z) dz$ és exacta a U si i només si f té una primitiva holomorfa h , en el sentit que h té derivada complexa $h'(z) = f(z)$, $z \in U$.

El teorema 3.9 dóna, com a cas particular, el resultat següent. Val la pena, però, repetir la prova per a aquest cas particular.

Teorema 3.13 (Teorema fonamental del càlcul complex). *Sigui f una funció contínua en un domini U del pla complex. Llavors la integral de línia complexa $\int_{\gamma} f(z) dz$ és independent del camí a U si i només si f té una primitiva holomorfa F , $F' = f$, a U . En aquest cas, és*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(B) - F(A),$$

on A, B són, respectivament, l'inici i el final del camí γ .

Demostració. Fixem $z_0 \in U$ i per a cada $z \in U$ escollim qualsevol camí γ_z que vagi de z_0 a z i definim

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw.$$

Observem que $F(z)$ està ben definida si suposem que la integral de línia de f no depèn del camí. Així, F és, per definició, la integral indefinida de f . Si volem provar que $F'(z) = f(z)$, en un punt fixat z tenim, com abans, que el quocient incremental $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ és exactament $\frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w) dw$, on σ és el segment que va de z a $z+h$. Així, cal veure que aquesta quantitat té límit $f(z)$ quan $h \rightarrow 0$, o el que és el mateix, utilitzant que $\int_{\sigma} dw$ val h ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\sigma} (f(w) - f(z)) dw = 0.$$

Ara bé, per (3.3), la integral anterior està acotada en mòdul per

$$\frac{1}{|h|} \sup\{|f(w) - f(z)| : w \in \sigma\} L(\sigma) \leq \sup\{|f(w) - f(z)| : w \in \sigma\},$$

quantitat que tendeix a zero amb h per la continuïtat de f .

En l'altre sentit, si $f = F'$ i γ està donat per $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, llavors $f(\gamma(t))\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$ coincideix amb $(F \circ \gamma)'(t)$ i, per tant, hom té

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a). \quad \square$$

Al teorema 3.10, li correspon:

Teorema 3.14. *Sigui f una funció contínua en un domini estrellat U del pla complex. Llavors f té una primitiva holomorfa F , $F' = f$, a U si i només si*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

per a tot triangle Δ inclòs en U .

És clar, per tant, el paral·lisme amb el teorema fonamental del càlcul real. La diferència és que, en la recta, per anar de x_0 a x només hi ha un camí, llevat de reparametritzacions que conservin el sentit i que no canvien el valor de la integral, mentre que en el pla complex n'hi ha molts. Així, mentre en una variable real tota funció contínua té una primitiva (la integral indefinida), en una variable complexa no tota funció contínua té una primitiva holomorfa. Només en tenen les funcions que tenen ben definida la integral indefinida.

Exemple 3.15. Fixats $a \in \mathbb{C}$ i $m \in \mathbb{N}$, la funció $F(z) = \frac{1}{m}(z-a)^m$ és holomorfa amb derivada $F'(z) = (z-a)^{m-1}$ a tot el pla complex $\mathbb{C}$. Per tant, $\int_{\gamma} (z-a)^k dz = 0$ si k és un enter no negatiu ($k = m-1$) per a tot camí tancat γ , o el que és el mateix, la forma $(z-a)^k dz$ té integrals independents del camí.

Si considerem $F(z) = \frac{1}{m}(z-a)^m$ però ara amb m un enter estrictament negatiu, F és holomorfa a $U = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ i té derivada $F'(z) = (z-a)^{m-1}$. Per tant, també $\int_{\gamma} (z-a)^k dz = 0$ si k és un enter negatiu $k \neq -1$ ($k = m-1$) i $a \notin \gamma^*$. En canvi, si $k = -1$, ja sabem que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, a),$$

que pot ser $\neq 0$. Així doncs, la funció $(z-a)^{-1}$ no té primitiva holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ $\square$

Exemple 3.16. En l'exemple 3.3 hem calculat la integral de z^2 al llarg de l'arc de paràbola de 0 a $1+i$ seguit del segment de $1+i$ a 1, i hem obtingut $\frac{1}{3}$, que és el mateix que la integral al llarg del segment de 0 a 1, més fàcil d'obtenir. $\square$

El teorema fonamental del càlcul complex permet, exactament igual que en el cas real, reduir el càlcul de certes integrals de línia al càlcul de primitives o antiderivades. En variable real, si volem calcular, per exemple, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, hem d'utilitzar la definició com a límit de sumes de Riemann i només podem trobar un valor aproximat de la integral. Però per a funcions de les quals podem

calcular antiderivades utilitzem el teorema fonamental del càlcul. El mateix passa en el cas complex; d'acord amb el teorema 3.13 tenim

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(B) - F(A) \quad (3.6)$$

si γ és un camí que va del punt A fins al punt B , dins d'un obert U en el qual F és una funció holomorfa.

Exemple 3.17. Per a calcular $\int_{\gamma} \sin z dz$ on γ és l'arc de la corba $y = x^3$ que va de $(0, 0)$ a $(1, 1) = 1 + i$ no apliquem pas la definició; tan sols observem que $\sin z$ és la derivada de $-\cos z$, i, per tant, la integral anterior val $-\cos(1+i) + \cos 0 = 1 - \cos(1+i)$. $\square$

Recordem que per a calcular antiderivades complexes podem utilitzar regles anàlogues a les que habitualment utilitzem en el cas real tal com s'ha explicat en l'apartat 2.4.3. Per exemple, la *regla d'integració per parts* estableix la igualtat

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z) dz = f(B)g(B) - f(A)g(A) - \int_{\gamma} f(z)g'(z) dz$$

si γ va de A a B dins de U i $f, g \in H(U)$, i no és altra cosa que una reformulació de la regla de derivació del producte, utilitzant (3.6) per a $F = f \cdot g$.

Exemple 3.18. Si volem calcular $\int_{\gamma} z \sin z dz$, quan γ és un camí que va del punt A al punt B , posem $u = z$, $dv = \sin z dz$; llavors $du = dz$, $v = -\cos z$, i la integral indefinida $I = \int u dv$ és $uv - \int v du = -z \cos z + \int \cos z dz = -z \cos z + \sin z$. La integral definida és, per tant, $\sin B - \sin A - B \cos B + A \sin A$. $\square$

De la mateixa manera, la fórmula del *canvi de variable*, estableix que si en la integral $\int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz$ fem la substitució $w = g(z)$ i $F(w)$ és una antiderivada de $f(w)$, llavors

$$\int_{\gamma} f(g(z))g'(z) dz = \int_{g(\gamma)} f(w) dw = F(g(B)) - F(g(A)),$$

on γ va de A a B i $g(\gamma)$ és el camí definit per l'aplicació $g \circ \gamma$.

Exemple 3.19. Calculem $\int_{\gamma} \frac{z}{1+z^2} dz$, on γ és el segment que va de 0 a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Fem el canvi de variable $w = z^2$ i obtenim $\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{1+w} dw$, on Γ és la imatge d'aquest segment per $g(z) = z^2$; es tracta del segment que va de 0 a i ; en un entorn d'aquest segment $\frac{1}{1+w}$ té la primitiva $F(w) = \text{Log}(1+w)$ (de fet, la determinació de $F(w)$ està definida fora de la semirecta $(-\infty, -1]$); la integral proposada val $\frac{1}{2}(\text{Log}(1+i) - \text{Log } 1) = \frac{1}{4} \text{Log } 2 + i\frac{\pi}{8}$. $\square$

L'existència de primitives holomorfes i l'existència de determinacions del logaritme són dues qüestions molt relacionades.

Proposició 3.20. *Si f és una funció holomorfa i sense zeros en un domini U , llavors hi ha una determinació del logaritme de f a U si i només si la funció f'/f té una primitiva holomorfa a U .*

Demostració. Ja hem observat en l'apartat 2.4.3 que si h és una determinació de $\log f$, llavors h és holomorfa i $h' = f'/f$. Recíprocament, suposem que $h' = f'/f$ i considerem la funció $F = e^{-h}f$, que té per derivada

$$F' = -e^{-h}h'f + e^{-h}f' = 0.$$

Per tant, F és una constant $c \neq 0$, i si $c = e^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, llavors $f = e^{h+\alpha}$ i $h + \alpha$ és una determinació de $\log f$. $\square$

Proposició 3.21. *Sigui K un compacte de $\mathbb{C}$. Hom té*

- a) *Si $\alpha \in V_\infty$, la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, llavors existeix una determinació de $\log(z - \alpha)$ en un entorn de K .*
- b) *Si α, β pertanyen a una mateixa component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, llavors existeix una determinació de $\log \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ en un entorn de K .*

Demostració. Suposem que V és una component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ i que $\alpha, \beta \in V$. Considerem un entorn U de K relativament compacte tal que α, β encara estan en la mateixa component de $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ (per exemple, unim α, β mitjançant una poligonal $\Gamma \subset V$ i si $\varepsilon = d(K, \Gamma)$, posem $U = \{z: d(z, K) < \varepsilon\}$). La funció $f(z) = (z - \alpha)/(z - \beta)$ tindrà una determinació del logaritme si f'/f té primitiva, és a dir, si

$$0 = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} - \int_\gamma \frac{dz}{z - \beta}$$

per a tot camí tancat γ dins de U . Ara bé,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} - \int_\gamma \frac{dz}{z - \beta} = 2\pi i [\text{Ind}(\gamma, \alpha) - \text{Ind}(\gamma, \beta)].$$

Com que $\gamma^* \subset U$, resulta que α, β han d'estar a la mateixa component de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ i, en conseqüència, $\text{Ind}(\gamma, \alpha) = \text{Ind}(\gamma, \beta)$.

En el cas que $\alpha \in V_\infty$, hom té $\int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} = 2\pi i \text{Ind}(\gamma, \alpha) = 0$, per un raonament semblant. $\square$

3.4 La fórmula de Green

En el desenvolupament de la teoria local de Cauchy de les funcions holomorfes hi té un paper fonamental el teorema següent:

Teorema 3.22 (Fórmula de Green). *Sigui U un domini acotat del pla complex amb vora regular a trossos orientada positivament i sigui $\vec{T}$ el vector tangent unitari a ∂U . Sigui $\vec{X} = (P, Q)$ un camp vectorial amb components P, Q funcions diferenciables en un entorn de $\bar{U}$ de manera que la funció $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sigui contínua a $\bar{U}$. Aleshores es compleix*

$$\int_{\partial U} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = \int_{\partial U} P dx + Q dy = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Observem que no es demana que les funcions $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ siguin contínues.

Convé precisar el significat de la integral de la forma $Pdx + Qdy$ al llarg de ∂U . Recordem (secció 1.6) que ∂U està formada per un nombre finit de corbes de Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$. Llavors, per definició, és

$$\int_{\partial U} Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} Pdx + Qdy,$$

entenent que cada corba γ_j està descrita per una parametrització que orienta γ_1 positivament i $\gamma_2, \dots, \gamma_N$ negativament, si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ són com a la proposició 1.37. Intuitivament, en recórrer cada γ_j hem de tenir U a l'esquerra. Així mateix, el vector tangent unitari en el punt $\gamma_i(t) \in \partial U$, $i = 1, \dots, N$ és $\vec{T} = \frac{\gamma'_i(t)}{|\gamma'_i(t)|}$ sempre que $\gamma'_i(t) \neq 0$. Pel que fa a la integral doble sobre U de la funció $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, cal dir que es pren respecte de la mesura de Lebesgue del pla que representem per $dx dy$ o bé per $dm(z)$, si $z = x + iy$.

La demostració del teorema 3.22 la farem en tres etapes. La primera etapa correspon al cas particular que el domini U sigui un rectangle. Volem fer notar que la prova de la fórmula de Green per a un rectangle, posem per cas $\bar{U} = [a, b] \times [c, d]$, és molt fàcil si se suposa que les funcions P, Q són de classe C^1 en un entorn de $\bar{U}$, perquè llavors les funcions P_y, Q_x són contínues i una aplicació del teorema fonamental del càlcul i del teorema de Fubini dona:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} (P dx + Q dy) &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy - \int_a^b P(x, d) dx - \int_c^d Q(a, y) dy = \\ &= \int_a^b (P(x, c) - P(x, d)) dx + \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx = \\
 &= \int_{[a, b] \times [c, d]} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

En el cas general, on no suposem res sobre $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ individualment, cal fer un altre tipus de prova. La que donarem està inspirada en una demostració del fet, bàsic en el càlcul en una variable real, que diu que si f és una funció derivable en un interval obert I i $f'(x) = 0$, per a tot $x \in I$, llavors f és constant a I . És una demostració directa, que només fa servir la definició de derivada, i és la següent:

Podem suposar $[a, b] \subset I$ i provar que $f(a) = f(b)$. Posem $I_0 = [a, b]$. Si c és el punt mitjà de $[a, b]$, és

$$\Delta_{I_0}(f) \stackrel{\text{def}}{=} |f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(c)| + |f(c) - f(a)| \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{[c, b]}(f) + \Delta_{[a, c]}(f).$$

Dels dos intervals $[a, c]$, $[c, b]$, sigui I_1 aquell en el qual la variació de f en valor absolut és més gran, de manera que

$$|f(b) - f(a)| \leq 2\Delta_{I_1}(f).$$

Repetim el procés indefinidament i trobem una successió d'intervals $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$, cadascun d'ells la meitat de l'anterior, amb longitud $|I_n| = 2^{-n}(b-a)$ i

$$|f(b) - f(a)| \leq 2^n \Delta_{I_n}(f).$$

La intersecció de tots els intervals I_n és un punt $x_0 \in [a, b]$. Donat $\varepsilon > 0$, hi ha un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0) = f(x_0) + R(x)(x - x_0)$$

amb $|R(x)| \leq \varepsilon$, si $|x - x_0| \leq \delta$. Si n és prou gran, tot interval I_n és dins de l'interval $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ i llavors

$$\Delta_{I_n}(f) \leq 2\varepsilon |I_n| = 2\varepsilon 2^{-n}(b-a).$$

Amb això $|f(b) - f(a)| \leq 2\varepsilon(b-a)$, per a qualsevol $\varepsilon > 0$ i $f(b) = f(a)$.

La mateixa prova, treballant amb $f(b) - f(a) - \int_a^b f'(x) dx$ com a funcional de l'interval $[a, b]$, permet provar el teorema fonamental del càlcul, és a dir,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt, \quad \text{si } f \in C^1([a, b]).$$

Aquesta és, essencialment, la demostració que ara farem en dimensió dos.

Demostració del teorema 3.22.

Primera etapa. El domini U és un rectangle de costats paral·lels als eixos. Posem

$$I = I(U) = \int_{\partial U} (P dx + Q dy) - \iint_U (Q_x - P_y) dx dy$$

i farem servir aquesta notació per a qualsevol rectangle. Dividim el rectangle U en quatre rectangles iguals (fig. 3.3) U^i , $i = 1, 2, 3, 4$ de manera que hom té $I(U) = \sum_{i=1}^n I(U^i)$ i sigui U_1 , dels quatre rectangles U^i , aquell en el qual $|I(U^i)|$ és màxim. Tenim, així,

$$|I| \leq 4|I(U_1)|.$$

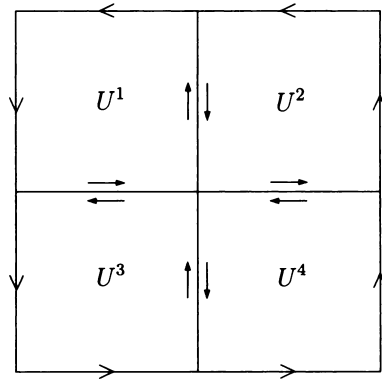


Figura 3.3

Amb $I_1 = I(U_1)$ fem el mateix i així successivament. Trobarem rectangles $\overline{U} \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \dots \supset \overline{U}_n, \dots$, cadascun dels quals és una quarta part de l'anterior, i

$$|I| \leq 4^n |I(U_n)|. \quad (3.7)$$

La intersecció dels rectangles $\overline{U}_n$ és un punt $z_0 \in \overline{U}$. Donat $\varepsilon > 0$ podem posar,

$$P(x, y) = P(z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(z_0)(y - y_0) + R_1(z)$$

$$Q(x, y) = Q(z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)(y - y_0) + R_2(z),$$

on $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$, amb $|R_1(z)|, |R_2(z)| \leq \varepsilon|z - z_0|$, si $|z - z_0| \leq \delta = \delta(\varepsilon)$. Per la continuïtat de $(Q_x - P_y)$ també podem suposar que

$$(Q_x - P_y)(z) = (Q_x - P_y)(z_0) + R_3(z)$$

amb $|R_3(z)| \leq \varepsilon$, si $|z - z_0| \leq \delta$. Per a n prou gran, és $\bar{U}_n \subset D(z_0, \delta)$, i si suposem que $\bar{U}_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$, tenim

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_n} (P dx + Q dy) &= \int_{a_n}^{b_n} P(x, c_n) dx + \int_{c_n}^{d_n} Q(b_n, y) dy - \int_{a_n}^{b_n} P(x, d_n) dx - \\ &\quad - \int_{c_n}^{d_n} Q(a_n, y) dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y}(z_0)(c_n - y_0)(b_n - a_n) + \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)(b_n - x_0)(d_n - c_n) - \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial y}(z_0)(d_n - y_0)(b_n - a_n) - \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)(a_n - x_0)(d_n - c_n) + R_n = \\ &= (b_n - a_n)(d_n - c_n) \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) \right) + R_n. \end{aligned}$$

Ara si $z \in \partial U_n$, és $|z - z_0| \leq L_n$, on L_n és la longitud de la diagonal de U_n . Per tant, si P_n és el perímetre de U_n , resulta

$$|R_n| \leq \varepsilon L_n P_n$$

però si L, P són la diagonal i el perímetre de U és $L_n = 2^{-n}L$, $P_n = 2^{-n}P$, de manera que

$$|R_n| \leq \varepsilon 4^{-n}LP.$$

Així mateix, hom té

$$\iint_{U_n} (Q_x - P_y) dx dy = (Q_x - P_y)(z_0)(b_n - a_n)(d_n - c_n) + \tilde{R}_n$$

amb $|\tilde{R}_n| \leq \varepsilon 4^{-n}A$, on A és l'àrea de U . Tenim, per tant, que les dues integrals anteriors tenen la mateixa *part principal* amb la qual cosa hi ha una cancel·lació i trobem

$$|I(U_n)| \leq \varepsilon 4^{-n}(LP + A).$$

Finalment, per (3.7) resulta $|I| \leq \varepsilon(4LP + A)$, per a tot $\varepsilon > 0$ i, en conseqüència, $I = 0$. Això acaba la demostració de la primera etapa.

- Observació 3.2.* a) El mateix procediment serveix per a un triangle Δ subdividint-lo en els tres triangles determinats pels vèrtexs i el baricentre de Δ .
- b) Els arguments utilitzats també proven que el resultat és cert si $\bar{U}$ és una reunió finita de rectangles amb interiors disjunts dos a dos.
- c) També és vàlida una versió més general del que acabem de provar suposant només que les funcions P i Q són contínues a $\bar{U}$, diferenciables a U i que la funció $Q_x - P_y$ és integrable a U .

Segona etapa. El domini U és del tipus *subgraf*, és a dir,

$$U = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$$

és un domini limitat per tres segments i per la gràfica de la funció $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que se suposa de classe C^1 (fig. 3.4).

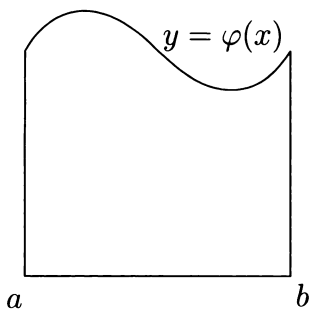


Figura 3.4

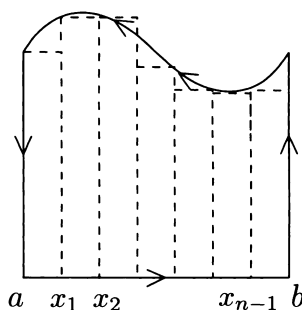


Figura 3.5

La idea en aquest cas és, senzillament, aproximar U per reunions de rectangles, tal com es fa en la definició de la integral amb les sumes de Riemann. Donada una partició $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, posem $m_i = \inf\{\varphi(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$, $i = 1, \dots, n$ i considerem el domini R_n reunió dels rectangles $\{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq m_i\}$, $i = 1 \dots, n$ (fig. 3.5).

És clar que $R_n \subset \bar{U}$ i que

$$\iint_{R_n} (Q_x - P_y) dx dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_U (Q_x - P_y) dx dy$$

perquè la funció $Q_x - P_y$ és contínua i, per tant, integrable a $\bar{U}$. A més a més, en ser R_n unió de rectangles adjacents resulta, d'acord amb la primera etapa,

$$\iint_{R_n} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial R_n} P dx + Q dy.$$

La diferència entre $\int_{\partial U} P dx + Q dy$ i $\int_{\partial R_n} P dx + Q dy$ és, tret del signe,

$$\begin{aligned} & \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)) dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x, \varphi(x_{i-1})) dx - \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\varphi(x_{i-1})}^{\varphi(x_i)} Q(x_i, y) dy = \\ & = \left[\int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x, \varphi(x_{i-1})) dx \right] + \\ & + \left[\int_a^b Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\varphi(x_{i-1})}^{\varphi(x_i)} Q(x_i, y) dy \right] \stackrel{\text{def}}{=} I + II. \end{aligned}$$

És clar que I tendeix a 0 quan $n \rightarrow \infty$, per la continuïtat uniforme de $P(x, \varphi(x))$ a $[a, b]$. Cada una de les integrals del segon terme de II , el canvi de variable $y = \varphi(x)$ les converteix en

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} Q(x_i, \varphi(x))\varphi'(x) dx$$

i llavors $II \rightarrow 0$ amb $n \rightarrow \infty$, per la continuïtat uniforme de $Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)$.

Amb això,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} (P dx + Q dy) &= \lim_n \int_{\partial R_n} (P dx + Q dy) = \\ &= \lim_n \iint_{R_n} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_U (Q_x - P_y) dx dy, \end{aligned}$$

i s'acaba la demostració de la segona etapa.

Naturalment, també tindrem el mateix resultat si permutem els papers de x, y , és a dir, si U és un domini subgraf d'una funció $x = \varphi(y)$.

Tercera etapa. Sigui ara U un domini acotat amb vora regular a trossos i orientada positivament, formada per corbes de Jordan $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, on cada γ_i és regular a trossos.

Per començar fixem un punt $z_0 \in \partial U$ i suposem que $z_0 \in \gamma_1^*$ amb $\gamma_1(t) = (x(t), y(t))$, $\gamma_1(t_0) = z_0$. Si z_0 és un punt regular, és $\gamma_1'(t_0) \neq 0$ i podem suposar, per exemple, $x'(t_0) \neq 0$. Llavors en un entorn de $x_0 = x(t_0)$ podem posar t com a funció de x , $t = t(x)$ i, per tant, $y = y(t) = y(t(x)) = \varphi(x)$, és a dir, γ_1^* és la

gràfica de la funció φ en un entorn de (x_0, y_0) . Si agafem ara un rectangle R prou petit al voltant d'aquest punt, la gràfica de φ separa R en dues regions

$$R^+ = \{(x, y) \in R, y > \varphi(x)\}, \quad R^- = \{(x, y) \in R, y < \varphi(x)\}$$

i necessàriament $R \cap U = R^+$ o bé $R \cap U = R^-$ (fig. 3.6).

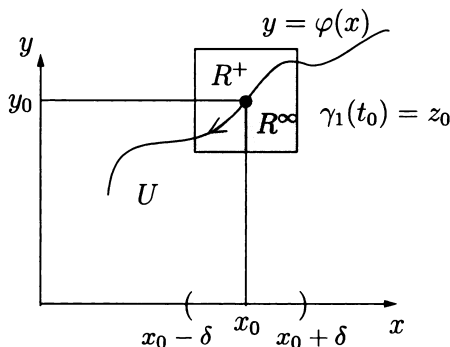


Figura 3.6

Així doncs, existeix un entorn R de z_0 de manera que $R \cap \overline{U}$ és la regió tipus subgraf

$$R \cap \overline{U} = \{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, a \leq y \leq \varphi(x)\} \quad \text{amb} \quad \delta > 0, a \in \mathbb{R},$$

que té la vora orientada positivament, o bé el resultat de girar 180° una regió d'aquest tipus. Si haguéssim partit de $y'(t_0) \neq 0$, trobaríem un entorn R de z_0 de manera que $R \cap \overline{U}$ és una regió tipus subgraf, amb $x = \varphi(y)$. Observem que per a qualsevol d'aquestes regions la fórmula de Green és vàlida, d'acord amb la segona etapa. Si el punt $z_0 \in \partial U$ no fos regular, llavors z_0 té un entorn V tal que, $V \cap \overline{U}$ és la reunió de dues regions subgraf adjuntes perquè $\gamma_1(t)$ és regular per a $t < t_0$ i per a $t > t_0$ i, per tant, la fórmula de Green també val a $V \cap \overline{U}$ (fig. 3.7).

Ara, per la compacitat de la frontera de U , la podem recobrir per un nombre finit de rectangles oberts $R_1, \dots, R_k$ de manera que cada regió $R_i \cap \overline{U}$ sigui de tipus subgraf (com a l'etapa 2). La part de $\overline{U}$ no coberta pels rectangles R_i , és a dir, $\overline{U} \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_k)$, és un compacte contingut a U que podrà ser recobert per una reunió de rectangles de costats paral·lels als eixos, continguts a U , i es pot suposar que aquests rectangles tenen interiors dos a dos disjunts, perquè una reunió finita de rectangles sempre es pot posar com una unió finita de rectangles que només s'encavalquen per les seves vores. Sigui R_0 la reunió

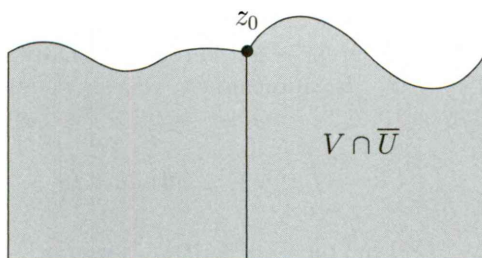


Figura 3.7

d'aquests rectangles de manera que és clar que, per la primera etapa, la fórmula de Green serà vàlida a R_0 . Finalment considerem una partició de la unitat de classe C^1 , $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k\}$ subordinada al recobriment $\{R_0, R_1, \dots, R_k\}$ de $\bar{U}$. Si, per simplificar, posem $\omega = P dx + Q dy$, $\omega_i = \rho_i \omega$, $h_i = (\rho_i Q)_x - (\rho_i P)_y$, $i = 0, 1, \dots, k$, tindrem

$$\omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^k \omega_i,$$

on cada forma ω_i és diferenciable i nul·la fora de R_i i h_i és contínua. Llavors

$$\int_{\partial U} \omega_0 = 0, \quad \iint_U h_0 = \iint_{R_0} h_0 = \int_{\partial R_0} h_0 = 0$$

i per a les formes ω_i , $i = 1, \dots, k$

$$\int_{\partial U} \omega_i = \int_{\partial U \cap R_i} \omega_i = \int_{\partial(R_i \cap \bar{U})} \omega_i = \iint_{R_i \cap \bar{U}} h_i = \iint_U h_i.$$

Ara, sumant, s'acaba la prova de la fórmula de Green. $\square$

La fórmula de Green té un corol·lari important amb relació a les formes exactes.

Un camp $\vec{X} = (P, Q)$ i la 1-forma corresponent $\omega = P dx + Q dy$ els anomenarem *diferenciables* en un domini U si P i Q són funcions diferenciables a U .

Corol·lari 3.23. Una 1-forma $\omega = P dx + Q dy$ diferenciable en un domini U del pla és localment exacta si i només si $P_y = Q_x$ a U . Un camp $\vec{X} = (P, Q)$ diferenciable té localment funció potencial si i només si $P_y = Q_x$. En un domini estrellat els mateixos enuncisats són certs globalment a U .

Demostració. És suficient provar l'afirmació relativa a un domini estrellat. Si $\omega = dh$, h és dues vegades diferenciable i la regla de Schwarz diu aleshores que $h_{xy} = h_{yx}$, és a dir, $P_y = Q_x$. Recíprocament, aquesta condició implica d'acord amb la fórmula de Green

$$\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} (Q_x - P_y) dx dy = 0,$$

per a tot triangle $\Delta \subset U$, i pel teorema 3.10, ω és exacta. $\square$

Amb la hipòtesi addicional que P, Q siguin de classe C^1 es pot provar el corol·lari anterior directament sense utilitzar la fórmula de Green (vegeu l'observació 3.5). Les 1-formes diferenciables en un domini U , $\omega = Pdx + Qdy$, que compleixen la condició $P_y = Q_x$, s'anomenen *formes tancades* a U .

3.5 El teorema de Cauchy i aplicacions

Un cas especial de la fórmula de Green és quan $\omega = Pdx + Qdy$ és una 1-forma diferenciable tancada en un entorn de $\bar{U}$. Llavors la funció $Q_x - P_y = 0$ és automàticament contínua i la fórmula de Green dóna:

$$\int_{\partial U} \omega = 0.$$

Si la funció f és diferenciable, imposar que la 1-forma $\omega = f(z) dz = f(z) dx + i f(z) dy$ sigui una 1-forma tancada vol dir que s'ha de complir

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial i f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial x},$$

igualtat que tradueix les equacions de Cauchy-Riemann. Per tant $\omega = f(z) dz$ és una forma tancada si i només si f compleix les equacions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, és a dir, si f és holomorfa.

Així, hem identificat quan la forma $\omega = f(z) dz$ és tancada: exactament quan f és holomorfa. En particular obtenim un resultat bàsic de l'anàlisi complexa:

Teorema 3.24 (Cauchy). *Si U és un domini acotat del pla amb vora regular a trossos orientada positivament i f és una funció holomorfa en un entorn de $\bar{U}$, llavors*

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0.$$

Observació 3.3. a) El cas particular del teorema 3.24, quan el domini U és un rectangle de costats paral·lels als eixos, es coneix amb el nom de **teorema de Cauchy-Goursat**. Notem que aquest resultat depèn només de la primera etapa de la demostració del teorema 3.22.

b) Tenint en compte l'observació 3.2 c) és fàcil veure que el teorema 3.24 és vàlid suposant només que la funció f és contínua a $\overline{U}$ i holomorfa a U (vegeu l'exercici 22).

Una situació en la qual el teorema de Cauchy s'utilitza sovint és la següent: suposem que U és l'interior d'una corba de Jordan orientada positivament i que aquesta corba està formada per corbes regulars $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, de manera que el punt final de γ_i sigui el punt inicial de γ_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, N-1$, i el punt final de γ_N sigui el punt inicial de γ_1 . Llavors, si f és holomorfa en un entorn de $\overline{U}$, hom té

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \sum_{i=2}^N \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

i pot donar-se el cas que les integrals $\int_{\gamma_i} f(z) dz$ resultin més fàcilment computables que la integral $\int_{\gamma_1} f(z) dz$. Això ho il·lustrem amb l'exemple següent.

Exemple 3.25. Calcular les integrals $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$, $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$. El que farem demostra l'existència dels límits següents:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \cos(t^2) dt, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \sin(t^2) dt$$

és a dir, que les integrals considerades existeixen com a integrals de Riemann impròpies (no són, però, absolutament convergents). Farem servir la funció entera $f(z) = e^{iz^2}$ i els camins Γ_1, Γ_2 i Γ_3 de la figura 3.8. Pel teorema de Cauchy és

$$\begin{aligned} \int_0^R \cos t^2 dt + i \int_0^R \sin t^2 dt &= \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz - \int_{\Gamma_3} f(z) dz = \\ &= \int_0^R e^{i(te^{i\frac{\pi}{4}})^2} d(te^{i\frac{\pi}{4}}) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i(Re^{it})^2} d(Re^{it}) = \\ &= \int_0^R e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} Rie^{it} dt. \end{aligned}$$

Ara prenem límits quan $R \rightarrow \infty$. La primera d'aquestes dues últimes integrals

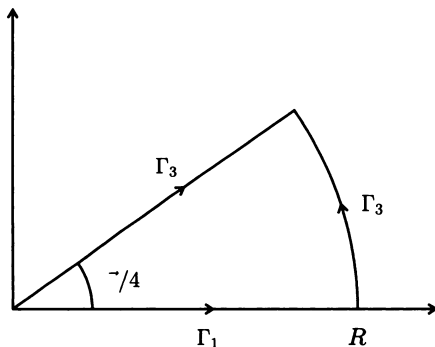


Figura 3.8

convergeix cap a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i).$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2it}} R i e^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} |e^{iR^2 e^{2it}}| dt = R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t} dt \leq \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 t} dt = \frac{1}{R} (1 - e^{-\pi/4 R^2}) < \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Per tant, s'obté, finalment,

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

Exemple 3.26. Farem servir ara el teorema 3.24 per a provar que la integral

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\alpha)^2} dx$$

és independent de $\alpha \in \mathbb{R}$. Suposant això cert i com que $I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ i $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 - \alpha^2 + 2x\alpha i)} dx$, s'obté

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2x\alpha i} dx = e^{-\alpha^2} \sqrt{\pi}$$

i, prenent parts reals,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2x\alpha \, dx = e^{-\alpha^2} \sqrt{\pi}.$$

Per a provar que $I(\alpha)$ és independent de α considerem la funció $f(z) = e^{-z^2}$ i el rectangle de vèrtexs $-R$, $+R$, $R + \alpha i$, $-R + \alpha i$. El teorema de Cauchy-Goursat dona

$$\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} \, dx - \int_{-R}^{+R} e^{-(x+\alpha i)^2} \, dx = \left(\int_{S_1} + \int_{S_2} \right) e^{-z^2} \, dz,$$

on S_1 , S_2 indiquen els costats verticals del rectangle. Ara bé, si $z = \pm R + it$, hom té

$$|e^{-z^2}| = e^{-\operatorname{Re}(z^2)} = e^{-(R^2 - t^2)} = e^{-R^2} e^{t^2} \leq e^{-R^2} e^{\alpha^2}.$$

Per tant, les dues integrals sobre els costats verticals estan acotades per $|\alpha| e^{\alpha^2} e^{-R^2}$, quantitat que tendeix a zero quan $R \nearrow +\infty$ i resulta $I(\alpha) = I(0)$, per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemple 3.27. Calcularem ara la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$; aquesta integral no és absolutament convergent, però és convergent i, per tant,

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

(vegeu la secció 5.8 per a un repàs dels tipus de convergència de les integrals impròpies). Considerem

$$f(z) = \frac{e^{iz} - 1}{z} = \sum_{n \geq 1} \frac{i^n z^{n-1}}{n!},$$

que és una funció entera. Observem que, atès que la part real de la integral següent és senar, hom té

$$\int_{-R}^{+R} f(x) \, dx = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x - 1 + i \sin x}{x} \, dx = i \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Considerem el semicercle superior C_R de centre 0 i radi R , és a dir, $C_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Pel teorema de Cauchy, tenim

$$\int_{-R}^{+R} f(x) \, dx + \int_{C_R} f(z) \, dz = 0.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = -\frac{1}{i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}} - 1}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \\ &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi (e^{iRe^{i\theta}} - 1) d\theta = \pi - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Ara bé, $|e^{iRe^{i\theta}}| = e^{-R \sin \theta}$ i $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ per a $0 \leq \theta \leq \pi$, de manera que

$$\left| \int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| \leq \int_0^\pi e^{-\frac{2}{\pi} R\theta} d\theta \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

d'on $I = \pi$. □

Una conseqüència important del teorema de Cauchy és amb relació a l'existència de primitives holomorfes i de determinacions del logaritme de funcions. Els corol·laris següents són conseqüència del corol·lari 3.23, de la proposició 3.20 i de l'observació que la forma $f(z) dz$ és tancada exactament quan f és holomorfa. En el capítol 6 veurem que els enuncisats relatius a dominis estrellats valen també en els dominis simplement connexos.

Corol·lari 3.28. *Si f és una funció holomorfa en un domini U del pla, llavors f té localment una primitiva holomorfa a U . Si U és estrellat, f té globalment una primitiva holomorfa.*

Corol·lari 3.29. *Si f és una funció holomorfa sense zeros en un domini U del pla, llavors f té localment una determinació del logaritme a U . Si U és estrellat, f té globalment una determinació del logaritme.*

Exemple 3.30. La forma $(z - a)^{-1} dz$ és tancada a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ perquè $(z - a)^{-1}$ és holomorfa, però no és exacta. Una funció h amb $dh = (z - a)^{-1} dz$ seria una determinació holomorfa del logaritme de $z - a$ a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, que no existeix. Això passa a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$; ara bé, en qualsevol obert més petit en el qual existeixi una determinació F del logaritme de $z - a$ (per exemple, el complementari d'una semirecta o d'un arc que surt de a i va a ∞) ja sabem que $F' = (z - a)^{-1}$. □

La forma $\frac{dz}{z}$ és un exemple de forma tancada no exacta a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Separant la part real i la part imaginària, resulta

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \frac{d(x + iy)}{x + iy} = \frac{dx + i dy}{x + iy} = \\ &= \frac{(x - iy)(dx + i dy)}{x^2 + y^2} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Observem que la part real sí que té funció potencial:

$$d\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 + y^2)\right) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Per tant, si $\frac{dz}{z}$ no és exacta, ha de ser a causa de la part imaginària, que és la forma de l'exemple 3.40.

3.6 Els teoremes clàssics

La finalitat d'aquesta secció és introduir els conceptes necessaris per a poder fer una aproximació al concepte d'holomorfia des d'un punt de vista de variable real, en dimensió arbitrària.

3.6.1 Subvarietats regulars orientables

Ens situem a l'espai euclidià de dimensió n , $\mathbb{R}^n$. Comencem per recordar el concepte de *subvarietat regular amb vora* de dimensió k o també *k-subvarietat amb vora*, el qual generalitza el concepte de corba regular ($k = 1$).

Un conjunt M tancat i connex a $\mathbb{R}^n$ s'anomena *subvarietat regular de dimensió k amb vora* si per a tot punt $p \in M$ hi ha un entorn U del punt p a $\mathbb{R}^n$, una bola $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^k$ i una aplicació $\sigma: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (és a dir, les components de σ són de classe C^1), amb $\sigma(0) = p$ i amb diferencial $d\sigma(t)$ de rang k a tot punt $t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in B$ de manera que σ^{-1} és un homeomorfisme de $U \cap M$ sobre $B(0, r)$ o bé sobre $B^-(0, r) = \{t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in B(0, r): t_k \leq 0\}$. En el primer cas es diu que p és un punt *interior* de M , i en el segon cas p s'anomena punt de la *vora* de M , designada per ∂M . Si ∂M és buit, hom diu que M és una *subvarietat regular de dimensió k sense vora*. El parell (V, σ) on $V = B(0, r)$ s'anomena *parametrització o carta local* de M i $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ són els paràmetres o coordenades del punt $\sigma(t)$; $\sigma(t)$ és l'anàleg de l'aplicació $\gamma(t)$ que parametritza una corba ($k = 1$). En general caldrà una col·lecció $(V_i, \sigma_i)_{i \in I}$ de cartes per cobrir tot M , $M = \bigcup_i \sigma_i(V_i)$, col·lecció que s'anomena *atles* de M . En aquesta situació, *l'espai tangent a M en el punt p* és la varietat k -lineal $T_p(M)$ de $\mathbb{R}^n$ que conté tots els vectors tangents a les corbes regulars que passen per p i estan contingudes a M . Analíticament i utilitzant les notacions anteriors, $T_p(M)$ és la imatge de $\mathbb{R}^k$ per l'aplicació lineal $d\sigma(0)$ i està, per tant, generat pels vectors $\frac{\partial \sigma}{\partial t_j}, j = 1, 2, \dots, k$ (fig 3.9).

La definició de subvarietat regular amb vora implica que ∂M és la frontera topològica de $M \setminus \partial M$ i és en si mateixa una varietat regular de dimensió $k - 1$:

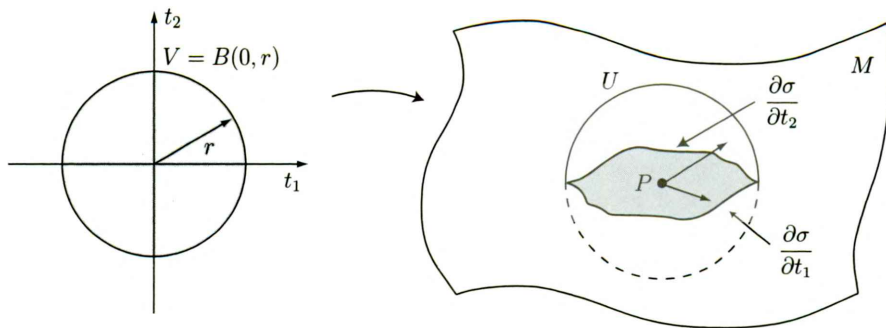


Figura 3.9

si $p \in \partial M$ i σ és com abans, llavors la restricció σ^+ de σ a $\{t \in V : t_k = 0\}$ és una carta local de ∂M . La $(k-1)$ -varietat ∂M no té vora i simbòlicament posem $\partial^2 M = \emptyset$.

Anàlogament al teorema 1.31, tota 1-subvarietat regular amb vora Γ és parametritzable globalment per un interval tancat, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$, i llavors $\partial\Gamma$ consta dels punts $\gamma(a), \gamma(b)$ o bé, quan no té vora, pel tor $\mathbb{T}$, $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow \Gamma$. En el primer cas tenim una corba regular simple en el sentit de l'apartat 1.4.1, i en el segon cas tenim una corba regular simple i tancada amb vora buida. Dit d'una altra manera, les corbes regulars simples es corresponen amb les 1-varietats regulars amb vora (eventualment buida). L'altre cas extrem és quan $k = n$; llavors $M \setminus \partial M$ és un obert de $\mathbb{R}^n$, i M , la seva adherència.

En tota k -subvarietat regular amb vora M hi ha definida una mesura de Lebesgue k -dimensional, dm_k , que permet integrar funcions contínues a M i parlar del volum k -dimensional dels subconjunts mesurables de M . En notació clàssica i treballant a $\mathbb{R}^3$, s'acostuma a posar $dm_1 = ds$, $dm_2 = dA$ i $dm_3 = dV$. Nosaltres, situats a l'espai $\mathbb{R}^n$, també farem servir la notació $dm_n = dV$, $dm_{n-1} = dA$ i $V(X)$, $A(X)$ per a la mesura d'un conjunt X , respecte de dV , dA .

Si (V, σ) és una carta local de M i f és una funció contínua a M nul·la fora de $\sigma(V)$, hom té

$$\int_M f dm_k = \int_V f(\sigma(t)) |\det G_\sigma(t)|^{\frac{1}{2}} dt_1 dt_2 \dots dt_k,$$

on $\det G_\sigma(t)$ és el determinant de la matriu de Gram dels vectors columna de la matriu de $d\sigma(t)$, és a dir, la que té per entrades $\langle \frac{\partial \sigma}{\partial t_i}, \frac{\partial \sigma}{\partial t_j} \rangle$, $i, j = 1, \dots, k$. La quantitat $|\det G_\sigma(t)|^{1/2}$ és el volum k -dimensional del paral·lelepípede generat pels vectors $\frac{\partial \sigma}{\partial t_i}$, vectors columna de $d\sigma(t)$.

Quan $k = n - 1$, parlem d'*hipersuperfícies regulars amb vora*, i quan $k = 2$, de *superfícies*. Si M és una hipersuperfície regular amb vora i $p \in M$, hi ha dos vectors unitaris perpendiculars a $T_p(M)$, oposats. Quan és possible triar en cada punt un d'aquestes dos vectors normals unitaris d'una forma contínua sobre M , hom diu que M és *orientable*. Així com tota corba regular sempre és orientable, no tota hipersuperfície ho és; per exemple, la banda de Möbius no és orientable. Quan M és orientable, llavors ho és de dues maneres de la mateixa forma que una corba pot ser recorreguda en dos sentits. Escollir un vector tangent unitari ($k = 1$) o un vector normal unitari ($k = n - 1$) es pot interpretar com una forma d'orientar l'espai tangent $T_p(M)$.

Per a formular el concepte d'orientabilitat en general és necessari definir què significa orientar un subespai vectorial F de $\mathbb{R}^n$, de dimensió k . Això es fa separant les bases de F en dues classes, agrupant en una mateixa classe totes les bases de F per a les quals les matrius de canvi de base tenen determinant positiu. Quan $k = n - 1$, és a dir, quan F és un hiperplà, una orientació de F correspon a una tria $\vec{N}$ d'un dels dos vectors unitaris perpendiculars a F , declarant que una base $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ de F és positiva si $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}, \vec{N}$ és una base positiva de $\mathbb{R}^n$ quan aquest espai està orientat amb la base canònica. Aleshores una k -*subvarietat regular amb vora* M s'anomena *orientable* si és possible orientar els espais tangents $T_p(M)$ de forma contínua, fet que en termes de cartes locals s'expressa dient que existeix un atlas (V_i, σ_i) que cobreix M , $M = \bigcup \sigma_i(V_i)$, de manera que les aplicacions $\sigma_i \sigma_j^{-1}$ de canvis de coordenades tinguin totes jacobians positius. En aquest cas, les aplicacions $\sigma_i^+(\sigma_j^+)^{-1}$ també tenen jacobians positius; és a dir, si M és orientable, llavors ∂M també és orientable.

Una orientació de M i una orientació de ∂M es diu que són *compatibles* si la base $\frac{\partial \sigma_i}{\partial t_j}(0), j = 1, \dots, k$ de $T_p(M)$ correspon a l'orientació de M , i la base $\frac{\partial \sigma_i^+}{\partial t_j}(0), j = 1, \dots, k - 1$, a la de ∂M . Hi ha dos casos particulars que s'intepreten fàcilment. Quan $n = 3$ i $k = 2$, M és una superfície de $\mathbb{R}^3$ limitada per ∂M , que és una corba simple i tancada. Un sentit de recorregut de ∂M i una tria de vector normal $\vec{N}$ a M són compatibles si es compleix la *regla del llevataps* o de la mà dreta: si posem un llevataps sobre M a prop d'un punt $p \in \partial M$ i el fem girar en el sentit del recorregut de ∂M , la punxa es desplaça en el sentit de $\vec{N}$. L'altre cas és quan M és una n -varietat amb vora de $\mathbb{R}^n$; llavors $M \setminus \partial M$ és un obert, i ∂M la seva frontera, una hipersuperfície. Tal com hem dit abans, una orientació de ∂M correspon a la tria d'un camp unitari normal a ∂U . Quan M té l'orientació donada per la base canònica de $\mathbb{R}^n$, l'orientació compatible de ∂M que acabem de definir correspon a un camp normal unitari $\vec{N}$ que per definició s'anomena *camp normal exterior* a ∂M .

Una base $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ de $T_p(\partial M)$ és positiva si $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}, \vec{N}$ és positiva a $\mathbb{R}^n$.

3.6.2 Flux d'un camp a través d'una hipersuperfície

Sigui M una hipersuperfície regular orientada per la tria contínua d'un vector normal unitari $\vec{N}$ a cada punt de M . Si $\vec{X}$ és un camp vectorial continu definit a M , el *flux de $\vec{X}$ a través de M* es defineix com la suma de les components normals de $\vec{X}$, això és,

$$\int_M \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA$$

on recordem que $dA = dm_{n-1}$ indica l'element de volum $(n-1)$ -dimensional de M .

Quan $n = 2$, tant les circulacions com els fluxos es calculen sobre corbes de classe C^1 orientades, i de fet els dos conceptes són equivalents degut a l'observació següent. Designem per J l'aplicació lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ donada per $Jv = (-y, x)$ si $v = (x, y)$, que en termes de $z = x + iy$ s'escriu $Jz = iz$; J és, per tant, la multiplicació per i . Evidentment, Jv és perpendicular a v i per a dos vectors qualsevol v_1, v_2 hom té $\langle Jv_1, Jv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$. Aleshores el flux d'un camp $\vec{X}$ a través de la corba γ s'escriu com

$$\int_\gamma \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle ds = \int_\gamma \langle J\vec{X}, J\vec{N} \rangle ds$$

i, com que $J\vec{N}$ és un vector $\vec{T}$ tangent a γ , hom veu que el flux de $\vec{X}$ és el mateix que la circulació de $J\vec{X}$ (sempre que la tria del vector normal $\vec{N}$ i la del tangent $\vec{T}$ estiguin relacionades per $\vec{T} = J\vec{N}$).

D'aquesta manera, la fórmula de Green aplicada al camp $J\vec{X}$ dona el resultat següent:

Teorema 3.31. *Sigui U un domini acotat del pla amb vora regular a trossos orientada positivament i sigui $\vec{N}$ el vector normal unitari exterior a ∂U . Sigui $\vec{X} = (P, Q)$ un camp diferenciable en un entorn de $\bar{U}$ tal que la funció $P_x + Q_y$ sigui contínua a $\bar{U}$. Aleshores per al flux de $\vec{X}$ a través de ∂U val la igualtat*

$$\int_{\partial U} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle ds = \iint_U (P_x + Q_y) dx dy.$$

En dimensió $n > 2$ els fluxos s'expressen fàcilment en termes d'una parametrització de la hipersuperfície, tal com passa amb les circulacions. Ho farem

primer per a una superfície S de $\mathbb{R}^3$. En aquest cas, una parametrització de S és una aplicació $\sigma: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , on V és un obert de $\mathbb{R}^2$, que és un homeomorfisme entre V i $\sigma(V)$, de manera que la diferencial $d\sigma(s, t)$ en qualsevol punt $(s, t) \in V$ té rang 2. La imatge de $d\sigma(s, t)$, com a aplicació lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, és aleshores el pla tangent a S en el punt $\sigma(s, t)$. Típicament $\sigma(V)$ és tot S llevat de conjunts d'àrea zero, i hom pot pensar que a efectes pràctics és una parametrització global. En aquest cas els vectors $\vec{\sigma}_s = \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \vec{\sigma}_t = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ són vectors tangents a S , el seu producte vectorial $\vec{\sigma}_s \wedge \vec{\sigma}_t$ és, per tant, normal a S , i $\vec{N}(\sigma(s, t)) = \vec{\sigma}_s \wedge \vec{\sigma}_t / |\vec{\sigma}_s \wedge \vec{\sigma}_t|$ és un vector normal unitari. D'altra banda, donats dos vectors de $\mathbb{R}^3$, l'àrea del paral·lelogram que determinen és també la longitud del seu producte vectorial, i per tant l'element d'àrea dA de S s'expressa, en termes de la parametrització, en la forma $dA = |\vec{\sigma}_s \wedge \vec{\sigma}_t| ds dt$. Amb tot això resulta que si l'orientació és la donada per $\vec{N}$, el flux d'un camp continu $\vec{X}$ a través de S és

$$\int_S \langle \vec{X}(\sigma(s, t)), \vec{\sigma}_s \wedge \vec{\sigma}_t \rangle ds dt.$$

Si $\sigma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, és $\vec{\sigma}_s = (x_s, y_s, z_s), \vec{\sigma}_t = (x_t, y_t, z_t)$, amb la qual cosa $\vec{\sigma}_s \wedge \vec{\sigma}_t$ té components $(y_s z_t - z_s y_t, z_s x_t - z_t x_s, x_s y_t - x_t y_s)$ i el flux s'escriu, si $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, com

$$\int_S (X_1 \cdot (y_s z_t - z_s y_t) + X_2 \cdot (z_s x_t - z_t x_s) + X_3 \cdot (x_s y_t - x_t y_s)) ds dt,$$

on les funcions X_i estan avaluades a $\sigma(s, t)$. Observem que l'integrand és formalment el resultat de calcular el determinant de la matriu que té $\vec{X}$ a la primera fila, $\vec{\sigma}_s$ a la segona i $\vec{\sigma}_t$ a la tercera.

Per al flux anterior s'utilitza també la notació

$$\int_S (X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy),$$

interpretant que, per exemple, $dy \wedge dz$ s'integra sobre S fent la substitució $dy = y_s ds + y_t dt$, $dz = z_s ds + z_t dt$ i que $ds \wedge ds = dt \wedge dt = 0$, $ds \wedge dt = -dt \wedge ds = ds dt$.

L'expressió $\eta_{\vec{X}} = X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy$ associada al camp $\vec{X}$ –que és allò que s'integra sobre S per a obtenir el flux de $\vec{X}$ – s'anomena *2-forma diferencial*.

El mateix càlcul en dimensió n dona per al flux del camp $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

a través de la hipersuperfície M l'expressió

$$\int_M \sum_{i=1}^n X_i dx_1 \wedge \cdots \wedge (dx_i)^* \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

on $(dx_i)^*$ indica que aquest terme no hi és. L'expressió de dins de la integral s'anomena $(n-1)$ -forma diferencial.

La noció de k -forma diferencial, que no necessitem, sorgeix quan es volen generalitzar aquests conceptes a k -subvarietats de $\mathbb{R}^n$.

3.6.3 El teorema de la divergència, el teorema del rotacional i el teorema de Stokes per a 1-formes

En aquest apartat veurem quines són les versions dels teoremes 3.22 i 3.31 en dimensió $n > 2$. Posarem de manifest com el mateix mètode de demostració de la fórmula de Green condueix al *teorema del rotacional* i al *teorema de la divergència* amb hipòtesis més febles que en les versions tradicionals. Aquests teoremes ens permetran més endavant interpretar les funcions holomorfes des d'una perspectiva de variable real i definir-ne una generalització a $\mathbb{R}^n$.

En dimensió $n > 2$ no hi ha correspondència entre les nocions de circulació i de flux d'un camp vectorial i és necessari un resultat diferent per a cada una d'aquestes magnituds.

Comencem amb l'estudi dels fluxos d'un camp $\vec{X}$. En aquest cas partim d'un domini U acotat de $\mathbb{R}^n$ tal que la seva frontera topològica ∂U és una hipersuperfície regular i es tracta d'avaluar el flux de $\vec{X}$ a través de ∂U . Necessitem el concepte de divergència d'un camp vectorial diferenciable.

Suposem que $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ és un camp vectorial que té components X_i diferenciables (*camp diferenciable*) a l'entorn d'un punt $p \in \mathbb{R}^n$. Designem per B_ε la bola $B(p, \varepsilon)$ de centre p i radi $\varepsilon > 0$ i calculem aproximadament el flux de $\vec{X}$ a través de ∂B_ε orientada amb la normal exterior $\vec{N}(x) = \frac{1}{\varepsilon}x$. Per la fórmula de Taylor podem posar, si $x \in \partial B_\varepsilon$,

$$\vec{X}(x) = \vec{X}(p) + \sum_i \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_i}(p) x_i + o(\varepsilon).$$

Ara hem de considerar la component normal de $\vec{X}$ i integrar-la sobre ∂B_ε . La contribució del camp constant $\vec{X}(p)$ és zero, perquè aquesta component normal és una funció senar sobre ∂B_ε ; dit d'una altra forma, és clar que el flux de tot

camp constant és zero. La contribució del camp $\frac{\partial \vec{X}}{\partial x_i}(p)x_i$ és

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_i}(p)x_i, \frac{1}{\varepsilon}x \right\rangle dA.$$

Ara bé, com que la funció $x_i x_j$ té integral zero si $i \neq j$ i $\frac{c_n}{n}\varepsilon^{n+1}$ si $i = j$ (on c_n és la mesura $(n-1)$ -dimensional de l'esfera unitat), hom té que la integral anterior val exactament $\frac{c_n}{n}\varepsilon^n \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(p)$; és a dir,

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA = \frac{c_n}{n}\varepsilon^n \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(p) + o(\varepsilon^n).$$

Atès que $\frac{c_n}{n}\varepsilon^n$ és el volum n -dimensional de B_ε , trobem que a tot punt x a l'entorn del qual el camp $\vec{X}$ sigui diferenciable, és

$$\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(B(x, \varepsilon))} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA$$

La funció $\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$ és, doncs, una *densitat de flux* per unitat de volum

tancat i s'anomena *divergència* del camp $\vec{X}$, designada per $\operatorname{div}(\vec{X})$ o també per $\langle \vec{\nabla}, \vec{X} \rangle$. S'arriba a la mateixa expressió si hom utilitza, per exemple, cubs en lloc d'esferes que es contreuen cap a x . Aquesta definició de $\operatorname{div}(\vec{X})$ és *equivalent* al teorema següent:

Teorema 3.32 (Teorema de la divergència). *Sigui U un domini acotat de $\mathbb{R}^n$ de manera que ∂U sigui una hipersuperfície regular i orientem ∂U amb el camp normal unitari exterior $\vec{N}$. Sigui $\vec{X}$ un camp diferenciable en un entorn de $\bar{U}$ amb la funció $\operatorname{div} \vec{X}$ contínua a $\bar{U}$. Llavors el flux de $\vec{X}$ a través de ∂U és igual a la integral de la divergència en el domini U , és a dir,*

$$\int_{\partial U} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA = \int_U (\operatorname{div} \vec{X}) dV.$$

Aquest teorema es demostra amb el mateix mètode que la fórmula de Green i és també vàlid si ∂U és una *hipersuperfície regular a trossos*, és a dir, una reunió finita de hipersuperfícies regulars amb vora, enganxades al llarg de les vores (un cub, per exemple). Per a la demostració comencem observant que, tal com hem vist abans, si Q és un cub de mida ε centrat a p , llavors

$$\int_{\partial Q} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA - A(Q) \operatorname{div}(\vec{X})(p) = o(A(Q)).$$

Sigui $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ amb $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$. Sigui D_ε el disc de centre $p \in \mathbb{R}^3$ i radi ε situat en el pla perpendicular a $\vec{v}_3$ que passa per p , i orientem la seva vora amb el recorregut $\gamma(t) = p + \varepsilon \cos t \vec{v}_1 + \varepsilon \sin t \vec{v}_2$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Aquesta orientació de ∂D_ε és la que s'il·lustra amb la *regla del llevataps*, segons la qual si el llevataps gira en el sentit que recorre ∂D_ε , la punxa avança en la direcció de $\vec{v}_3$ (fig. 3.10). Sigui $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un camp diferenciable en un entorn del punt p i calculem la circulació de $\vec{X}$ al llarg de ∂D_ε utilitzant altre cop la fórmula de Taylor. Si $\vec{v}_k = (v_k^1, v_k^2, v_k^3)$, $k = 1, 2$ i $x \in \partial D_\varepsilon$, és

$$\vec{X}(x) = \vec{X}(p) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{X}}{\partial x_i}(p) \varepsilon (\cos t v_1^i + \sin t v_2^i) + o(\varepsilon).$$

Ara hem de fer el producte escalar de $\vec{X}$ amb el vector tangent a ∂D_ε , $\vec{T} = \varepsilon(-\sin t \vec{v}_1 + \cos t \vec{v}_2)$, i integrar sobre ∂D_ε . La contribució del camp constant $\vec{X}(p)$ és zero, la corresponent al terme lineal és

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^3 (\cos t v_2^j - \sin t v_1^j) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) (\cos t v_1^i + \sin t v_2^i) \right) dt,$$

i la del terme residual és $o(\varepsilon^2)$. Cada integral

$$\int_0^{2\pi} (\cos t v_2^j - \sin t v_1^j) (\cos t v_1^i + \sin t v_2^i) dt$$

val $\pi(v_2^j v_1^i - v_1^j v_2^i)$, en particular 0 si $i = j$. Així, tenim

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\varepsilon} \langle X, \vec{T} \rangle ds &= \pi \varepsilon^2 \sum_{i,j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) (v_2^j v_1^i - v_1^j v_2^i) + o(\varepsilon^2) = \\ &= \pi \varepsilon^2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(p) \right) (v_2^j v_1^i - v_1^j v_2^i) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Ara fixem-nos que les components de $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ són precisament les quantitats $v_2^j v_1^i - v_1^j v_2^i$ de manera que en l'expressió anterior hi apareix el producte escalar de $\vec{v}_3$ amb el vector

$$\text{rot } \vec{X} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right),$$

també designat per $\vec{\nabla} \times \vec{X}$ i que s'anomena *rotacional* de $\vec{X}$. Hem vist, doncs, que si D_ε és un petit disc centrat a p , situat en el pla perpendicular a una

direcció $\vec{v}$ i orientat segons la regla del llevataps, hom té

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\partial D_\varepsilon} \langle X, \vec{T} \rangle ds = \langle \text{rot } \vec{X}(p), \vec{v} \rangle.$$

Això significa que la quantitat $\langle \text{rot } \vec{X}(p), \vec{v} \rangle$ és una densitat de circulació per unitat d'àrea tancada i que la direcció del vector $\text{rot } \vec{X}(p)$ és la de l'eix al voltant del qual les trajectòries del camp $\vec{X}$ tenen la màxima tendència a girar. L'última igualtat és *equivalent* al teorema del rotacional que s'enuncia a continuació i que es demostra amb el mateix mètode que hem indicat en el cas del teorema de la divergència, basat en la prova del teorema 3.22.

Teorema 3.34 (Teorema del rotacional). *Sigui S una superfície regular amb vora de $\mathbb{R}^3$ i sigui γ una corba regular que parametritza ∂S de manera que S i γ tinguin orientacions compatibles. Aleshores, si $\vec{X}$ és un camp diferenciable en un entorn de $\bar{S}$ amb rotacional continu a $\bar{S}$, la circulació de $\vec{X}$ al llarg de γ coincideix amb el flux del rotacional de $\vec{X}$ a través de S , és a dir,*

$$\int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = \int_S \langle \text{rot } \vec{X}, \vec{N} \rangle dA.$$

Exemple 3.35. Sigui γ la corba intersecció de l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$ amb el pla d'equació $x + y + z = 0$, orientada segons la regla del llevataps quan aquest pla està orientat pel vector normal $(1, 1, 1)$. Calculem la circulació del camp $\vec{X} = (z, x, xy)$ al llarg de γ . El camp $\vec{X}$ té rotacional donat per $(x, 1 - y, 1)$, la component normal del qual en els punts del pla és $\frac{1}{\sqrt{3}}(2 + x - y)$. Si observem que x, y són senars al disc limitat per γ , trobem que el flux de $\vec{X}$ a través d'aquest disc i, per tant, la circulació al llarg de γ val $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. $\square$

Les consideracions que hem fet abans del teorema 3.34 ens indiquen també com s'ha de procedir en dimensió $n > 3$; en aquest cas, per a un camp $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, el càlcul és exactament igual fins a arribar a l'expressió

$$\sum_{i < j} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) (v_2^j v_1^i - v_1^j v_2^i)$$

com a densitat que cal integrar sobre una superfície S amb vora $\gamma = \partial S$ per tal d'obtenir la circulació al llarg de γ , on $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ són ara vectors que generen l'espai tangent a S . En termes d'una parametrització de S donada per $\sigma(s, t)$ amb domini de paràmetres V , serà $\vec{v}_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}$, $\vec{v}_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$, i, en integrar sobre V la

densitat anterior, s'obté

$$\iint_V \sum_{i < j} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) (\sigma(s, t)) \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial t} \frac{\partial \sigma_i}{\partial s} - \frac{\partial \sigma_j}{\partial s} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} \right) ds dt$$

si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Intrínsecament aquesta quantitat es denota per

$$\int_S \sum_{i < j} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j, \quad (3.8)$$

on l'integrand és una 2-forma diferencial en n -variables. Ara $dx_i \wedge dx_j$ s'integra sobre S fent la substitució $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial s} ds + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$ i utilitzant el fet que $ds \wedge ds = dt \wedge dt = 0$, $ds \wedge dt = -dt \wedge ds = ds dt$.

Recordem que el camp $\vec{X}$ de components $X_1, X_2, \dots, X_n$ és equivalent a la 1-forma diferencial $\omega = \sum_{i=1}^N X_i dx_i$. La 2-forma que ha aparegut a (3.8) s'anomena *diferencial exterior* de ω i es representa per $d\omega$. Així doncs,

$$d \left(\sum_i X_i dx_i \right) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Amb aquestes notacions la versió del teorema del rotacional per a $n > 3$ és la següent:

Teorema 3.36 (Teorema de Stokes per a 1-formes). *Sigui S una superfície regular amb vora de $\mathbb{R}^n$ i sigui γ una corba regular que parametriza ∂S de manera que S i γ tinguin orientacions compatibles. Sigui $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un camp diferenciable en un entorn de $\bar{S}$ que té la 1-forma associada $\omega = \sum_i X_i dx_i$ tal que els coeficients de la 2-forma $d\omega$ siguin funcions contínues a $\bar{S}$. Aleshores*

$$\int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds = \int_S d\omega.$$

Observació 3.4. El teorema 3.31 és un cas particular del teorema de la divergència i la fórmula de Green (teorema 3.22) es pot veure com un cas particular del teorema del rotacional (teorema 3.34). Interpretant que el domini U del pla és una superfície de $\mathbb{R}^3$ orientada amb el vector $\vec{N} = (0, 0, 1)$ i que el camp $\vec{X} = (P, Q)$ és un camp en $\mathbb{R}^3$ amb la tercera component nul·la, hom té $\text{rot } \vec{X} = (0, 0, Q_x - P_y)$ i $\langle \text{rot } \vec{X}, \vec{N} \rangle = Q_x - P_y$.

3.6.4 1-formes tancades i 1-formes exactes

En el teorema 3.9 hem vist que un camp vectorial té una funció potencial si i només si és conservatiu. Ambdues condicions són de tipus global. En aquest apartat estudiarem, per a camps o formes diferenciables, un concepte local que, en general, és més feble que el fet que el camp sigui conservatiu o que la forma sigui exacta, però que, per a dominis particulars, hi és equivalent.

Sigui $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un camp vectorial diferenciable en un domini U de $\mathbb{R}^n$ amb 1-forma associada $\omega = \sum_{i=1}^n X_i dx_i$. Si ω és localment exacta amb $\omega = dh$ en una certa regió, llavors h és dues vegades diferenciable, i per la regla de Schwarz hom té $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}$. En conseqüència, $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$. En termes de la diferencial exterior $d\omega$ resulta, doncs,

$$d\omega = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Les 1-formes diferencials ω a U , amb coeficients diferenciables, que compleixen la condició $d\omega = 0$ s'anomenen *tancades* a U . Aquest és un concepte local. Així, tota 1-forma amb coeficients diferenciables, localment exacta és tancada i les components d'un camp $\vec{X}$ diferenciable i localment conservatiu han de complir les equacions $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$. Ens proposem de veure el recíproc; primerament donem un resultat de tipus global.

Teorema 3.37. *En un domini estrellat de $\mathbb{R}^n$, una 1-forma diferencial amb coeficients diferenciables és exacta si i només si és tancada i un camp $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ diferenciable és conservatiu si i només si compleix $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (equacions que per a $n = 3$ signifiquen $\text{rot } \vec{X} = 0$).*

Demostració. Farem la prova en termes de 1-formes. Tan sols ens falta veure que tota forma ω tancada és exacta; pel teorema 3.10 això equival a

$$\int_{\partial \Delta} \omega = 0$$

per a tot triangle Δ inclòs en el domini de ω , fet que és conseqüència del teorema de Stokes (teorema 3.36). $\square$

En el capítol 6 provarem que aquest resultat és cert també per a dominis simplement connexos del pla.

Observació 3.5. Si el domini U del teorema 3.37 és estrellat respecte de l'origen, l'expressió general de la funció potencial del camp $\vec{X}$ és

$$h(x) = \int_{\gamma} \langle \vec{X}, \vec{T} \rangle ds + c,$$

on γ és el segment que va de 0 a x i c una constant. Hom pot provar directament que h és una funció potencial amb la hipòtesi addicional que $\vec{X}$ és de classe C^1 (és a dir, les components de $\vec{X}$ són de classe C^1): parametritzant el segment resulta

$$h(x) = \int_0^1 \sum_i (X_i(tx) x_i) dt$$

Per tant,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \int_0^1 (X_j(tx) + t \sum_i x_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(tx)) dt,$$

i utilitzant ara la hipòtesi trobem

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \int_0^1 (X_j(tx) + t \sum_i x_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(tx)) dt.$$

Ara bé, l'expressió que hi ha dins la integral és $f'(t)$ amb $f(t) = X_j(tx)t$, i pel teorema fonamental del càlcul la integral val $f(1) - f(0) = X_j(x)$.

La mateixa observació és del cas utilitzant altres camins per a definir la funció potencial. Per exemple, si $\vec{X} = (P, Q)$ és un camp vectorial en el pla que compleix $Q_x = P_y$ i volem trobar la funció potencial $h(x, y)$, triem $(0, 0)$ com a punt base, i com a camí que va de $(0, 0)$ a (x, y) el segment que va de $(0, 0)$ a $(x, 0)$ seguit del segment que va de $(x, 0)$ a (x, y) ; llavors

$$h(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt.$$

És clar que $h_y = Q$, pel teorema fonamental del càlcul, i, a més,

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= P(x, 0) + \int_0^y Q_x(x, t) dt = P(x, 0) + \int_0^y P_y(x, t) dt = \\ &= P(x, 0) + P(x, y) - P(x, 0) = P(x, y). \end{aligned}$$

A la pràctica, però, s'acostuma a procedir de la manera equivalent següent: volem resoldre les equacions $\frac{\partial h}{\partial x_i} = X_i$, $i = 1, \dots, n$; integrem la primera equació en x_1 , i obtenim una constant d'integració $C(x_2, \dots, x_n)$ que depèn de $x_2, \dots, x_n$; després utilitzem la segona equació per a determinar $C(x_2, \dots, x_n)$ i així successivament.

Exemple 3.38. La forma $\omega = (\sin xy + xy \cos xy) dx + (x^2 \cos xy + y) dy$ és tancada a tot el pla. Integrant $h_x = \sin xy + xy \cos xy$ en x resulta $h(x, y) = x \sin xy + C(y)$, i utilitzant que $h_y = x^2 \cos xy + y$ obtenim $C'(y) = y$ i $h(x, y) = x \sin xy + \frac{y^2}{2} + C$ que és l'expressió general d'una funció potencial de ω . $\square$

És clar que el teorema 3.37 implica:

Teorema 3.39. Una 1-forma diferencial amb coeficients diferenciables en un domini de $\mathbb{R}^n$ és localment exacta si i només si és tancada. Per a un camp vectorial $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ diferenciable en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$, són equivalents les propietats següents:

- a) $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ($\text{rot } \vec{X} = 0$ si $n = 3$) a U .
- b) $\vec{X}$ és localment conservatiu a U .
- c) $\vec{X}$ té, localment, una funció potencial a U .

En general, però, una forma tancada no és exacta.

Exemple 3.40. Un exemple típic és la forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

a $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Un càlcul demostra que $d\omega = 0$, però si γ és el cercle unitat recorregut en sentit positiu –un camí tancat a U – la integral de línia $\int_\gamma \omega$ val 2π . Per tant, ω no és exacta a U . A l'obert més petit $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ la forma ω sí que és exacta perquè la funció $\theta(x, y)$ que dona l'angle en radians que forma la semirecta d'origen zero que passa per (x, y) amb el semieix positiu n'és una funció potencial. Analíticament, $\theta(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ si $x > 0$, $\theta(x, y) = \arctg \frac{y}{x} + \pi$ si $x < 0, y > 0$, $\theta(x, y) = \arctg \frac{y}{x} - \pi$ si $x < 0, y < 0$. $\square$

En aquest apartat hem tractat les formes en dominis del pla complex ($n = 2$ i $\omega = f(z) dz$) com un cas particular de les formes en dominis de $\mathbb{R}^n$ (dimensió n arbitrària i formes diferencials complexes). Tanmateix, més endavant, veurem que hi ha una diferència molt important entre el cas real i el cas complex. En el cas real, hi ha funcions h que són de classe C^1 exactament, és a dir, que són de classe C^1 però que no tenen derivades d'ordre dos. La primitiva ϕ d'una funció contínua no derivable a la recta n'és un exemple en una variable i $h(x, y) = \phi(xy)$ és un exemple en dues variables. Llavors la forma $\omega = dh$ té coeficients continus i, per definició, té funció potencial, és a dir, és exacta i, per tant, té integrals independents del camí; com que no és diferenciable,

no té sentit plantejar-se si és tancada. Per tant, en el cas real hi ha formes contínues localment exactes que no són diferenciables. En els capítols següents veurem que aquesta situació en el cas complex no es pot donar, perquè provarem que si la funció f té una primitiva holomorfa, llavors f també és holomorfa. Per tant, tota forma contínua del tipus $f(z)dz$ que sigui localment exacta és automàticament diferenciable i tancada.

3.7 Funcions holomorfes com a camps vectorials i funcions harmòniques

3.7.1 Camps solenoïdals

En aquest apartat comencem fent consideracions anàlogues a les de la secció 3.2 però fent intervenir els fluxos d'un camp en lloc de les seves circulacions.

Definició 3.41. *Un camp continu en un domini U de $\mathbb{R}^n$ s'anomena solenoïdal si té flux zero a través de tota hipersuperfície continguda a U compacta i sense vora.*

Equivalentment, un camp vectorial $\vec{X}$ és solenoïdal a U si sempre que M_1, M_2 siguin hipersuperfícies a U amb la mateixa vora el flux de $\vec{X}$ a través de M_1 i de M_2 és el mateix. Així com els camps conservatius coincideixen amb els camps gradients, en dimensió $n = 3$ els camps solenoïdals coincideixen amb els camps rotacionals:

Teorema 3.42. *Un camp continu $\vec{X}$ en un domini U de $\mathbb{R}^3$ és solenoïdal si i només si hi ha un camp $\vec{Y}$ de classe C^1 a U tal que $\vec{X} = \text{rot } \vec{Y}$.*

Demostració. El fet que tot camp rotacional és solenoïdal és una conseqüència immediata del teorema del rotacional, puix que el flux de $\text{rot } \vec{Y}$ a través d'una hipersuperfície $M \subset U$ és igual a la circulació al llarg de la vora. La demostració del recíproc és força més complicada i no la farem aquí. $\square$

El camp $\vec{Y}$ tal que $\vec{X} = \text{rot } \vec{Y}$ s'anomena *potencial vector* de $\vec{X}$ i està determinat llevat de camps amb rotacional zero.

Per formular l'anàleg del teorema 3.42 en dimensió $n > 3$ cal fer-ho en termes de formes diferencials: una 2-forma $\omega = \sum_{i < j} A_{ij} dx_i \wedge dx_j$ contínua en un domini U de $\mathbb{R}^n$ és exacta a U , és a dir, hi ha una 1-forma η de classe C^1 a U tal que $d\eta = \omega$, si i només si ω té integral zero sobre tota superfície compacta sense vora continguda a U . Aquest resultat és cert per a k -formes diferencials

arbitràries i és conseqüència d'un teorema profund, el teorema de de Rham (vegeu [13, pàg. 154]).

El concepte de camp solenoïdal és un concepte global, però podem considerar-ne també la versió local: un camp $\vec{X}$ és localment solenoïdal en un domini U si tot punt $p \in U$ té un entorn $V \subset U$ tal que $\vec{X}$ té flux zero a través de tota hipersuperfície regular continguda a V compacta i sense vora. Tenim ara el resultat corresponent al teorema 3.39.

Teorema 3.43. *Per a un camp $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, diferenciable en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$, són equivalents les propietats següents:*

$$a) \operatorname{div} \vec{X} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \text{ a } U.$$

b) $\vec{X}$ és localment solenoïdal a U .

c) Si $n = 3$, a) i b) són equivalents al fet que $\vec{X}$ tingui localment un potencial vector a U .

Demostració. Que b) implica a) és conseqüència de la definició mateixa de divergència (apartat 3.6.3). Recíprocament, si $\vec{X}$ té divergència zero i S és una hipersuperfície regular compacta i sense vora dins d'una bola continguda a U , llavors S és la frontera d'un obert $G \subset U$, i pel teorema de la divergència hom té

$$\int_S \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA = \int_G \operatorname{div} \vec{X} dV = 0.$$

Finalment, l'equivalència amb c) és conseqüència del teorema 3.42. □

Un domini $U \subset \mathbb{R}^n$ s'anomena *k-simplement connex* si tota k -subvarietat continguda a U sense vora és la frontera d'una $(k+1)$ -subvarietat de U . És un concepte topològic, equivalent a l'anul·lació d'un determinat grup d'homologia. Quan $n = 2$, $k = 1$, veurem en el capítol 6 que es tracta dels dominis simplement connexos introduïts en el capítol 1; quan $k = n - 1$, es diu que U *no té cavitats*. En el teorema 3.43 hem utilitzat el fet intuïtiu que les boles no tenen cavitats. En un domini sense cavitats, pel teorema de la divergència, un camp diferenciable $\vec{X}$ és solenoïdal si i només si $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$. L'exemple típic d'un domini amb cavitats és $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. El camp newtonià $\vec{X} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, amb $\vec{r} = (x, y, z)$ i $r = |\vec{r}|$, té $\operatorname{div} \vec{X} = 0$ en aquest domini U , però evidentment té flux 4π a través de tota esfera centrada a l'origen.

En dimensió $n = 3$, hom pot demostrar la implicació a) $\Rightarrow$ c) del teorema 3.43 directament, amb la hipòtesi addicional que $\vec{X}$ sigui de classe C^1 . El càlcul

d'un potencial vector $\vec{Y}$ d'un camp $\vec{X}$ diferenciable i amb divergència zero en una bola es pot fer resolent les equacions

$$X_1 = (Y_3)_y - (Y_2)_z, X_2 = (Y_1)_z - (Y_3)_x, X_3 = (Y_2)_x - (Y_1)_y.$$

Trobarem una solució amb $Y_3 = 0$ que anomenarem $\vec{Y}_0$. De la primera equació resulta

$$Y_2(x, y, z) = - \int_0^z X_1(x, y, t) dt + A(x, y),$$

i de la segona,

$$Y_1(x, y, z) = \int_0^z X_2(x, y, t) dt + B(x, y).$$

Es tracta, llavors, de trobar les funcions A, B de manera que

$$(Y_2)_x - (Y_1)_y = - \int_0^z (X_1)_x(x, y, t) dt + A_x - \int_0^z (X_2)_y(x, y, t) dt - B_y = X_3(x, y, z).$$

Com que $\text{div } \vec{X} = 0$, les dues integrals anteriors sumen $\int_0^z (X_3)_z(x, y, t) dt = X_3(x, y, z) - X_3(x, y, 0)$ i es tracta, per tant, de trobar A, B tals que $A_x(x, y) - B_y(x, y) = -X_3(x, y, 0)$. Serveixen $A = 0$ i $B(x, y) = \int X_3(x, t, 0) dt$. Un cop hem trobat la solució $\vec{Y}_0$, la solució general és $\vec{Y} = \vec{Y}_0 + \vec{Z}$, on $\vec{Z}$ té rotacional zero, és a dir, que pel teorema 3.37 és un gradient.

3.7.2 Camps vectorials holomorfs. Funcions harmòniques

En la secció 3.2 hem vist com la idea d'integral de línia complexa porta de manera natural a associar el camp vectorial $\vec{f} = (u, -v)$ a la funció $f(z) = u(z) + iv(z)$. Llavors si γ és un camí del pla, la part real i la part imaginària de $\int_\gamma f(z) dz$ són, respectivament, la circulació del camp $\vec{f}$ i la circulació del camp $i\vec{f}$ al llarg de γ ; és a dir, la circulació de $\vec{f}$ i el flux de $\vec{f}$ sobre γ .

D'una manera natural hi ha una relació entre funcions holomorfs i camps conservatius o solenoïdals. En efecte, suposem que $f = u + iv$ és diferenciable com a funció de dues variables reals. Segons el teorema 3.39, el camp $\vec{f} = (u, v)$ és localment conservatiu si i només si

$$u_y = v_x$$

i, segons el teorema 3.43, és localment solenoïdal si i només si

$$u_x = -v_y,$$

que equival a dir que $Jf = (-v, u)$ és localment conservatiu. Si comparem amb les equacions de Cauchy-Riemann, trobem el resultat següent:

Teorema 3.44. *Una funció $f = u + iv$ diferenciable en un domini $U \subset \mathbb{C}$ és holomorfa si i només si el camp $\vec{f} = (u, -v)$ és simultàniament localment conservatiu i localment solenoïdal.*

Aquest teorema és el que permet donar una definició d'holomorfia des d'un punt de vista de variable real.

Definició 3.45. *Un camp $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, diferenciable en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$, s'anomena holomorf si és localment conservatiu i localment solenoïdal, és a dir, si compleix*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, n; \quad \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0, \quad a \ U.$$

Si $\vec{X}$ és un camp holomorf, llavors $\vec{X}$ és localment el gradient d'una funció ϕ . Com que $\vec{X}$ és diferenciable, ϕ és dues vegades diferenciable i ha de complir

$$\operatorname{div} \vec{X} = \operatorname{div}(\vec{\nabla} \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} = 0.$$

Definició 3.46. *Una funció ϕ , dues vegades diferenciable en un obert U de $\mathbb{R}^n$, s'anomena harmònica si $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} = 0$ a U .*

Així, hem vist:

Teorema 3.47. *Els camps holomorfs són exactament els camps que, localment, són el gradient d'una funció harmònica. Les funcions holomorfes són exactament les funcions f que, localment, compleixen $\bar{f} = \phi_x + i\phi_y$ amb ϕ harmònica.*

L'operador Δ de la definició 3.46, anomenat *laplaciana* o *operador de Laplace*, és el més important de la física matemàtica. En el capítol 7 estudiarem les seves propietats, així com les de les funcions harmòniques.

3.7.3 Funcions harmòniques conjugades

Situem-nos de nou en el pla complex i analitzem més detalladament, la relació que hi ha entre funcions holomorfes i funcions harmòniques.

Sigui f una funció holomorfa en un domini U . Pel teorema 3.47, localment hi ha una funció harmònica real ϕ tal que $f = \overline{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}$, i aquesta és l'expressió general local d'una funció holomorfa.

D'altra banda, pel corollari 3.28, f té localment una primitiva holomorfa F , i si U és estrellat, la té globalment. Quina relació hi ha entre F i ϕ ? Escrivim la forma $f(z) dz$ en termes de ϕ

$$f(z) dz = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) (dx + i dy) = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + i \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} dx + \frac{\partial\phi}{\partial x} dy \right).$$

La part real d'aquesta forma és $d\phi$; la part imaginària,

$$d^*\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial y} dx + \frac{\partial\phi}{\partial x} dy,$$

s'anomena *forma conjugada* de $d\phi$. Les primitives holomorfes F de f estan definides per la igualtat $dF = f(z) dz$, que, si $F = u + iv$, s'escriu

$$du + i dv = dF = f(z) dz = d\phi + i d^*\phi.$$

Per tant,

$$du = d\phi, \quad dv = d^*\phi. \quad (3.9)$$

Recíprocament, si $F = u + iv$ i u, v compleixen (3.9), podem suposar $u = \phi$ (tret d'una constant); ara F té part real $u = \phi$ i la part imaginària v ha de complir $dv = d^*u$, és a dir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned}$$

que són les equacions de Cauchy-Riemann. Per tant, F és holomorfa i $F' = f$. Observem que v també és harmònica.

Definició 3.48. Donada una funció u harmònica real en un domini U del pla, es diu que una funció $\tilde{u}$, diferenciable a U , és una funció harmònica conjugada de u a U si $d\tilde{u} = d^*u$, és a dir, si la funció $F = u + i\tilde{u}$ és holomorfa a U .

Les consideracions anteriors proven:

Teorema 3.49. Si u és harmònica real en el domini $U \subset \mathbb{C}$ i $f = \overline{\nabla}u$, llavors la funció u té una funció harmònica conjugada a U , $\tilde{u}$, si i només si f té a U una primitiva holomorfa F i, en aquest cas, és $F = u + i\tilde{u}$.

En el capítol següent veurem que tota funció holomorfa és de classe C^∞ . Si $f = u + iv$ és holomorfa, hom té $u, v \in C^\infty$, i derivant les equacions de Cauchy-Riemann s'obté $\Delta u = \Delta v = 0$, és a dir, $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ són harmòniques i, per tant, f també ho és. El fet que una funció holomorfa f sigui harmònica, amb la hipòtesi que f és de classe C^2 , és conseqüència també de la relació

$$\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (3.10)$$

entre l'operador Δ i els operadors $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ i del fet que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ si f és holomorfa. Com que tota funció harmònica té, localment, una funció harmònica conjugada (perquè tota funció holomorfa té localment una primitiva), se'n segueix que tota funció harmònica (en dimensió $n = 2$) és de classe C^∞ . En el capítol 7 veurem que això és cert en qualsevol dimensió. En particular, un camp holomorf és de classe C^∞ .

Observem que una funció harmònica v conjugada de u està determinada llevat d'una constant imaginària pura. Notem també que la condició $dv = d^*u$ implica $\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \rangle = 0$, és a dir, els gradients de u, v i, per tant, les seves corbes de nivell, són perpendiculars (fig. 3.11). Totes les consideracions anteriors proven:

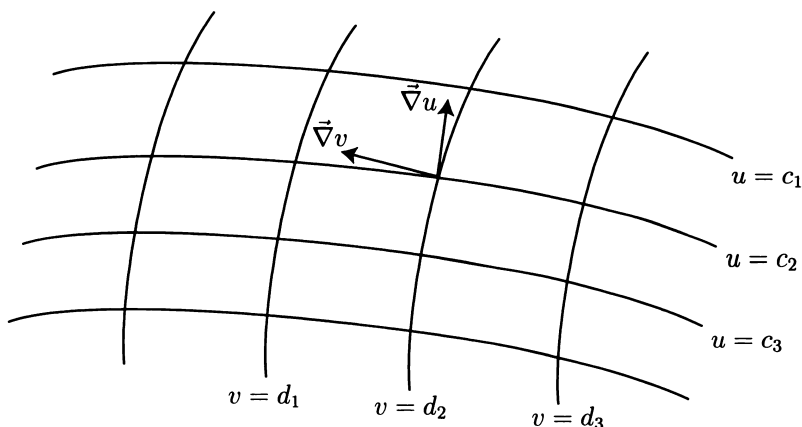


Figura 3.11

Proposició 3.50. *Una funció u harmònica en un domini U té una funció harmònica conjugada si i solament si la forma tancada d^*u és exacta a U , és a dir, si $\int_\gamma d^*u = 0$ per a tot camí tancat γ dins de U , condició que sempre*

es compleix localment. Quan U és estrellat, tota funció harmònica a U té una funció harmònica conjugada a U .

Tal com hem dit, l'afirmació de la proposició 3.50 és equivalent al fet que la funció holomorfa $f = u_x - iu_y$ tingui una primitiva holomorfa F a U i, en aquest cas, és $u = \operatorname{Re} F$.

En general, no sempre hi ha una funció harmònica conjugada de u , és a dir, no sempre una funció harmònica a U és la part real d'una funció holomorfa a U . Per exemple, si $u(z) = \operatorname{Log} |z| = \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^2}$ a $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hom té $f = u_x - iu_y = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$, que no té primitiva a U ; per tant, u no té funció harmònica conjugada.

D'altra banda, la integral $\int_{\gamma} d^*u$ admet una interpretació que és interessant: si $\vec{N}$ és el vector normal unitari exterior a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\vec{N} = \frac{1}{|\gamma'|}(y', -x')$, llavors

$$\int_{\gamma} d^*u = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int_{\gamma} \langle \vec{\nabla} u, \vec{N} \rangle ds = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} ds.$$

La condició $\int_{\gamma} d^*u = 0$ equival, doncs, a $\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} ds = 0$ per a tot camí tancat $\gamma \subset U$, és a dir, la integral al llarg de γ de la derivada de u respecte de la normal a γ és nul·la, si γ és tancat. En l'exemple anterior ($u(z) = \operatorname{Log} |z|$) agafant coordenades polars, és $u = \operatorname{Log} r$ i, si γ és una circumferència centrada a l'origen de radi R , $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \frac{1}{R}$ i resulta $\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} ds = 2\pi \neq 0$.

El càlcul de la funció harmònica conjugada v d'una funció harmònica donada u equival al càlcul de la funció potencial de la forma d^*u . Tal com hem vist en l'apartat 3.6.4, a l'entorn de $z_0 = (x_0, y_0)$ podem prendre

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) dt,$$

o bé procedir a integrar el sistema $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$ per etapes. També podem determinar v calculant la primitiva holomorfa de $f = u_x - iu_y$.

Exemple 3.51. La funció $u = x^2 - y^2$ és harmònica. El sistema que s'ha de resoldre per trobar la seva funció harmònica conjugada és $v_x = 2y$, $v_y = 2x$. De la primera equació surt $v = 2xy + C(y)$, i substituint a la segona, $C'(y) = 0$; per tant, $v = 2xy + C$ és la solució general. La funció $u + iv = x^2 - y^2 + (2xy + C)i = z^2 + Ci$ és, efectivament, holomorfa. O també: $f = u_x - iu_y = 2x + 2iy = 2z$, que té per primitiva z^2 . $\square$

Per acabar, estudiarem quan un polinomi en les variables x, y és una funció harmònica. Un polinomi $P(x, y)$ també és un polinomi en $z, \bar{z}$,

$$P(x, y) = \sum_{n,m} a_{n,m} z^n \bar{z}^m,$$

i els coeficients $a_{n,m}$ estan unívocament determinats per $a_{n,m} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} P(0,0)}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}$. El polinomi pren valors reals si i només si $P(x, y) = \overline{P(x, y)}$, i això vol dir, identificant coeficients, $a_{n,m} = \overline{a_{m,n}}$. Per (3.10) aquest polinomi serà harmònic si i només si $\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}}$ és idènticament zero, la qual cosa significa $nma_{n,m} = 0$, és a dir, $a_{n,m} = 0$ si $n, m \neq 0$. En conclusió, si P és real i harmònic, P és de la forma

$$P(x, y) = a_0 + \sum_n (a_n z^n + \overline{a_n} \bar{z}^n) = a_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_n a_n z^n,$$

que expressa P com la part real de la funció holomorfa $F(z) = a_0 + 2 \sum_n a_n z^n$.

Ara bé, si en l'expressió formal

$$P(x, y) = a_0 + \sum_n a_n (x + iy)^n + \overline{a_n} (x - iy)^n,$$

substituïm x per $\frac{z}{2}$ i y per $\frac{z}{2i}$ trobem $P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = a_0 + \sum_n a_n z^n$ i, per tant,

$$F(z) = 2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - a_0.$$

D'aquesta manera podem trobar, algebraicament, el polinomi holomorf F que té a P com a part real i, per tant, també el polinomi conjugat de P , que serà la part imaginària de F .

Exemple 3.52. Considerem $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$, que és, efectivament, harmònic. Tindrem $F(z) = 2\left(\left(\frac{z}{2}\right)^3 - 3\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2i}\right)^2\right) = z^3$; el polinomi conjugat és $\operatorname{Im} F = 3x^2y - y^3$. $\square$

Com a comentari final a aquesta secció, observem que hi ha tres propietats d'un domini U , cadascuna de les quals implica la següent: a) tota forma tancada a U és exacta, b) tota funció holomorfa a U té una primitiva holomorfa a U , c) tota funció harmònica a U té una funció harmònica conjugada. Hem vist que els dominis estrellats tenen aquestes tres propietats. Veurem més endavant que, de fet, aquestes tres propietats són equivalents entre si i caracteritzen els dominis simplement connexos del pla.

3.8 Exercicis

1. a) Sigui $f \in C^2(U)$, on U és un domini del pla. Proveu que f és holomorfa a U si les funcions $f(z)$ i $zf(z)$ són harmòniques a U .
 b) Suposem ara que u és harmònica a U . Proveu que si la funció $u(x+iy) \cdot x$ és harmònica a U llavors u és de la forma $u(x+iy) = ay+b$, amb $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Sigui f una funció diferenciable en un entorn del punt $z_0 \in \mathbb{C}$. Proveu que f és $\mathbb{C}$ -derivable a z_0 si i només si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{C_r} f(z) dz = 0,$$

on $C_r \equiv C_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Sigui f holomorfa en un entorn d'un rectangle tancat R tret d'un nombre finit de punts $z_1, z_2, \dots, z_N \in \overset{\circ}{R}$ en els quals es compleix $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = 0$ $j = 1, 2, \dots, N$. Proveu que es compleix $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$.

4. Calculeu les integrals

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(n\theta - \sin \theta) d\theta; \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta.$$

5. Proveu que si f és contínua en un obert convex U i holomorfa a $U \setminus \{z_0\}$, on $z_0 \in U$, llavors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per a tot camí tancat γ amb $\gamma^* \subset U$.
6. Sigui U un domini estrellat del pla i $f \in H(U)$. Proveu que existeix una funció $F \in H(U)$, única tret d'una constant additiva, tal que per a tot disc $\overline{D}(a, r) \subset U$ hom té

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{F(w)}{(w - z)^2} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f^2(w)}{(w - z)^2} dw, \quad z \in D(a, r).$$

7. Proveu que si u_1, u_2 són funcions harmòniques en un domini U i coincideixen en un subconjunt obert de U , llavors u_1 i u_2 són idèntiques a U .
8. Escriviu l'operador de Laplace en el pla en coordenades polars. Com a aplicació, proveu que si u és harmònica i radial a $\mathbb{C}$, llavors $u(z) = a \operatorname{Log} |z| + b$, amb a, b constants. També que, si u és harmònica i de la forma $u(re^{i\theta}) = \varphi(r)\psi(\theta)$, amb φ, ψ funcions d'una variable real, llavors o bé $u(re^{i\theta}) = a \operatorname{Log} r + b$, o bé $u(re^{i\theta}) = r^n(a \cos n\theta + b \sin n\theta)$ amb a, b constants i $n \in \mathbb{N}$.

9. Sigui U un obert convex del pla, u_1, u_2 dues funcions harmòniques a U i γ un camí tancat a U amb vector normal exterior $\vec{N}$. Proveu que es compleix

$$\int_{\gamma} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{N}} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{N}} \right) ds = 0.$$

10. Si $\gamma = C(0, 1)$ i $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| < 1$, calculeu $\int_{\gamma} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$ i proveu la igualtat

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)dt}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} = 2\pi, \quad \text{per a } 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

11. Proveu la desigualtat

$$\left| \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} dx - \pi \right| \leq \frac{\pi}{r}, \quad r > 0$$

integrant la funció $\frac{e^{iz} - 1}{z}$ al llarg del camí $[-r, r]$ seguit de $t \rightarrow re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

12. Sigui f una funció de classe C^2 al disc $D(z_0, R)$ i $0 < r < R$. Proveu que es compleix la igualtat

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) r d\theta = \int \int_{D(z_0, r)} \Delta f(z) dx dy$$

amb $z = x + iy$. Deduï-ne la propietat de la mitjana per a les funcions harmòniques: si u és harmònica a $D(z_0, R)$ i $0 < r < R$, llavors

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

13. Una funció u contínua en un obert U es diu que és *subharmònica* a U si compleix

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

per a $z_0 \in U$ i $r > 0$ tals que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Proveu que una funció u de classe C^2 a U és subharmònica a U si i només si $\Delta u(z) \geq 0$, $z \in U$.

14. Sigui f holomorfa en un obert U de manera que $|f(z) - 1| < 1$, $z \in U$. Proveu que es compleix

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

per a tot camí tancat γ contingut a U .

15. Si C_r és la circumferència de centre 0 i radi $r > 0$ recorreguda una vegada en sentit positiu, calculeu

$$\text{a) } \int_{C_r} \frac{dz}{|z-a|^2}, \quad a \in \mathbb{C}$$

$$\text{b) } \int_{C_r} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{En particular en resulta la igualtat } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

16. Proveu la igualtat

$$\frac{1}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{1}{1 - r^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \right) \quad \text{per a } 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}$$

i feu-la servir per a calcular

$$\int_{C_r} \frac{|z|}{|1-z|^2} dz \quad 0 \leq r < 1,$$

on C_r és la circumferència de centre 0 i radi $r > 0$ orientada positivament.

17. Considerem a $\mathbb{R}^3$ el camp $\vec{X} = (x^2 - xe^{xz}, xy \cos xyz - 2xy, ze^{xz} - xz \cos xyz + 3x^2)$. Proveu que $\vec{X}$ és solenoïdal i que té un potencial vector de la forma $\vec{Y} = (\sin yz, B, C)$, amb B, C funcions de x, y, z . Trobeu el flux de $\vec{X}$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}$ quan S està orientada amb la normal exterior.
18. Considerem a $\mathbb{R}^3$ el camp $\vec{X} = (x^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} z, y^2 \sin \frac{\pi}{2} z, z + x)$. Calculeu el flux de $\vec{X}$ a través de la superfície $S = \{(x, y, z): z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$, orientada amb la normal exterior a S . Com canvia el resultat si en lloc de $\sin \frac{\pi}{2} z$ hi posem una funció de z arbitrària?
19. Trobeu totes les funcions harmòniques de la forma $u(x, y) = g(y/x)$ on g té dues derivades contínues. Determineu també les funcions holomorfes f tals que $u = \operatorname{Re} f$.

20. Si γ és un camí tancat del pla que no passa pel punt z_0 , proveu directament (sense recórrer a l'apartat 1.5.2) que el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0},$$

és un número enter.

21. Trobeu una funció entera f tal que $\operatorname{Re} f = u$ quan

$$\text{a) } u(x, y) = e^{x^2 y^2} \sin 2xy \qquad \text{b) } u(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}.$$

22. Proveu que si U és un domini acotat del pla amb vora regular a trossos orientada positivament i f és una funció contínua a $\overline{U}$ i holomorfa a U , aleshores $\int_{\partial U} f(z) dz = 0$.

Propietats locals de les funcions holomorfes

La finalitat d'aquest capítol és establir les propietats bàsiques de les funcions holomorfes que són de caràcter local, és a dir, que no depenen de les propietats topològiques del domini de definició de la funció. Entre aquestes propietats, destaca el fet que tota funció holomorfa es desenvolupa localment en sèrie de potències, el qual porta a la identitat fonamental entre funcions holomorfes i funcions analítiques de variable complexa. En la teoria local hi té un paper central una fórmula reproductora, la fórmula integral de Cauchy, que deduïm directament d'una versió general de la fórmula de Cauchy-Green.

Un cop se sap que les funcions holomorfes són funcions analítiques, es pot estudiar l'estructura dels seus conjunts de zeros i donar el principi de prolongació analítica. La resta del capítol està dedicat a altres propietats de les funcions holomorfes que són conseqüència de la fórmula integral de Cauchy o bé del fet que tota funció holomorfa és una aplicació oberta.

4.1 La fórmula integral de Cauchy

En primer lloc necessitem recordar alguns fets bàsics amb relació a les integrals, en el sentit de Lebesgue, de funcions definides sobre conjunts del pla. Designarem per dm la mesura de Lebesgue en el pla i considerarem integrals de Lebesgue del tipus $\int_A h(z) dm(z)$ amb $A \subset \mathbb{C}$ mesurable-Lebesgue i h definida a A .

Recordem que aquesta integral està definida si:

- h està definida gairebé a tot punt de A i és una funció mesurable-Lebesgue.
- $\int_A |h(z)| dm(z) < +\infty$.

En tots els casos, manipularem funcions h que estan definides i són contínues a A llevat d'un nombre finit o numerable de punts de A , de manera que la primera condició es complirà automàticament. La segona condició és la que assegura que si partim A en conjunts de mesura cada cop més petita, $A = \bigcup_j A_j$, i triem punts $z_j \in A_j$, les sumes de Lebesgue

$$\sum h(z_j)m(A_j)$$

convergeixen cap a $\int_A h(z) dm(z)$.

Utilitzarem sovint el fet que la funció gh és integrable si h ho és i g és mesurable i acotada.

El resultat següent té una gran importància en la teoria de funcions de variable complexa.

Lema 4.1. *Si $a \in \mathbb{C}$ està fixat, la funció $\frac{1}{z-a}$ és integrable sobre tot subconjunt de $\mathbb{C}$ de mesura finita.*

Demostració. Hem de veure que $\int_A \frac{dm(z)}{|z-a|} < +\infty$ si $m(A) < +\infty$. Si $B = \{z \in A: |z-a| \geq 1\}$, hom té

$$\int_B \frac{dm(z)}{|z-a|} \leq \int_B dm(z) = m(B) \leq m(A) < +\infty.$$

D'altra banda, passant a coordenades polars centrades en el punt a , $z = a + re^{i\theta}$, és $dm(z) = r dr d\theta$ i resulta

$$\int_{A \setminus B} \frac{dm(z)}{|z-a|} \leq \int_{|z-a| \leq 1} \frac{dm(z)}{|z-a|} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{r} = 2\pi. \quad \square$$

Recordem que si f és una funció diferenciable (en el sentit real), l'operador $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ actua sobre f i dóna la funció $\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ i f és holomorfa quan $\bar{\partial}f = 0$.

Teorema 4.2 (Fórmula de Cauchy-Green). *Segui U un domini acotat del pla amb frontera regular a trossos, orientada positivament, i sigui f una funció diferenciable en un entorn de $\bar{U}$ de manera que $\bar{\partial}f$ sigui contínua a $\bar{U}$. Llavors, per a tot $z \in U$, es compleix*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial}f(w)}{w-z} dm(w). \quad (4.1)$$

Aquest resultat, que demostrarem tot seguit, té dues conseqüències evidents:

Corol·lari 4.3 (Fórmula integral de Cauchy). *Si U és un domini acotat del pla amb frontera regular a trossos, orientada positivament, i f és holomorfa en un entorn de $\overline{U}$, llavors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in U. \quad (4.2)$$

Recordem que si f és una funció, posem definida a $\mathbb{R}^n$, el suport de f és el conjunt tancat $\text{spt}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

Corol·lari 4.4. *Si f és una funció diferenciable a $\mathbb{C}$ amb suport compacte i $\overline{\partial}f$ és contínua a $\mathbb{C}$, llavors*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\partial}f(w)}{w-z} dm(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Fixem-nos que la dependència en z és a través del nucli $\frac{1}{w-z}$. El nucli $C(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w-z}$ s'anomena *nucli de Cauchy*.

Demostració del teorema 4.2. Fixat $z \in U$, considerem $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D}(z, \varepsilon) \subset U$ i sigui U_ε el domini, $U_\varepsilon = U \setminus \overline{D}(z, \varepsilon)$. La frontera de U_ε està formada per la frontera de U i la circumferència $C(z, \varepsilon)$, que la considerem recorreguda en sentit negatiu (fig. 4.1).

Així, U_ε és un domini acotat amb vora regular a trossos, orientada positivament. Ara apliquem la fórmula de Green (teorema 3.22) a la 1-forma $\rho = \frac{f(w)}{w-z} dw$ i al domini U_ε . Si posem $w = \sigma + i\tau$, és $\rho = \frac{f(w)}{w-z} d\sigma + i \frac{d(w)}{w-z} d\tau$ i

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(i \frac{f(w)}{w-z} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f(w)}{w-z} \right) = 2i \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \frac{f(w)}{w-z} = 2i \frac{\partial f}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z},$$

que és una funció contínua a $\overline{U}_\varepsilon$. Per tant, la fórmula de Green dona

$$\int_{\partial U_\varepsilon} \rho = 2i \int_{U_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z} d\sigma d\tau. \quad (4.3)$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_\varepsilon} \rho &= \int_{\partial U} \rho + \int_{C(z, \varepsilon)} \rho = \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C(z, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \\ &= \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw - i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

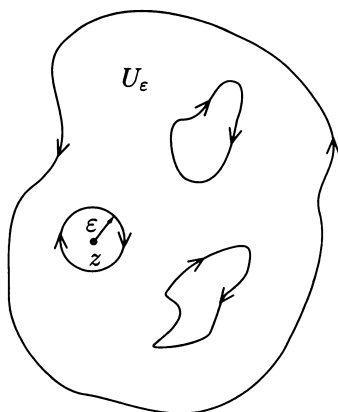


Figura 4.1

Finalment, pel lema 4.1, la funció $w \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z}$ és integrable a U , de manera que la integral del terme de la dreta de (4.3) tendeix, quan $\epsilon \rightarrow 0$, a la mateixa integral sobre el domini U , i així s'obté (4.1). $\square$

És important fixar-se en l'estructura de la fórmula (4.1): descompon una funció diferenciable f en suma de dues, una que és holomorfa i que tan sols depèn dels valors de f a ∂U , i una altra que només depèn de $\bar{\partial}f$. La fórmula (4.2)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in U,$$

vàlida quan f és holomorfa, s'anomena *fórmula reproductora* perquè dóna els valors de f dins de U en termes només dels valors de f sobre ∂U . Això és radicalment nou en el sentit que no passa res de semblant amb funcions diferenciables de variable real. Per exemple, una conseqüència de (4.2) és que si dues funcions holomorfes en un entorn de $\bar{U}$ coincideixen en els punts de ∂U , aleshores coincideixen a tot el domini U .

Corol·lari 4.5. *Si f és una funció entera i f té suport compacte, llavors f és idènticament nul·la.*

Demostració. Si $D(0, R)$ és un disc prou gran perquè contingui en el seu interior el suport de f , tindrem $f \equiv 0$ a $\partial D(0, R)$; per tant, $f \equiv 0$ a $D(0, R)$. Ara fem $R \rightarrow +\infty$. $\square$

En canvi, de funcions diferenciables, fins i tot de classe C^∞ , amb suport compacte no idènticament nul·les, n'hi ha moltíssimes. Per exemple si K és un compacte de $\mathbb{R}^n$ i U un entorn obert de K , sempre podem construir una funció φ de classe C^∞ , $0 \leq \varphi \leq 1$, amb suport compacte dins de U i tal que $\varphi \equiv 1$ a K .

Exemple 4.6. Sigui f una funció holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$, tal que $\int_{\mathbb{D}} |f(z)| dm(z) < +\infty$. Fixem $0 \leq r < 1$ i sigui φ una funció C^∞ , amb suport compacte contingut a $D(0, r')$, $r < r' < 1$, i que valgui 1 en un entorn de $\overline{D}(0, r)$. La fórmula (4.1) aplicada a la funció $\varphi \cdot f$ i al disc $D(0, r')$ dóna

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \bar{\partial}\varphi(w) \cdot f(w) \frac{1}{w-z} dm(w), \quad |z| \leq r.$$

Si ara posem $M_r = \sup \left\{ |\bar{\partial}\varphi(w)| \frac{1}{|w-z|} : |z| \leq r, w \in \text{spt}(\bar{\partial}\varphi) \right\}$, resulta $M_r < +\infty$ (perquè $\text{spt}(\bar{\partial}\varphi)$ no talla $\overline{D}(0, r)$), i d'aquí obtenim la desigualtat

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq M_r \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)| dm(z).$$

Per exemple, si (f_n) és una successió de funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ que compleix $\lim_n \int_{\mathbb{D}} |f_n(z)| dm(z) = 0$, llavors les funcions (f_n) tendeixen a zero uniformement sobre cada disc compacte $\overline{D}(0, r) \subset \mathbb{D}$. $\square$

També és interessant destacar el cas particular de (4.2) en el qual $U = D(a, r)$ i $z = a$. La parametrització de $\partial U = C(a, r)$ és $w = a + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de manera que $dw = ire^{i\theta} d\theta = i(w-a) d\theta$ i obtenim

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

que expressa que $f(a)$ és el valor mitjà de f sobre la circumferència $C(a, r)$, quan f és holomorfa en un entorn de $\overline{D}(a, r)$.

Definició 4.7. Una funció φ contínua en un domini U (amb valors reals o complexos) es diu que té la propietat de la mitjana a U si, per a qualsevol disc tancat $\overline{D}(a, r) \subset U$, hom té

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.4)$$

Si φ és contínua a U i $\overline{D}(a, R) \subseteq U$ i per a $0 \leq r \leq R$ multipliquem (4.4) per r i integrem de 0 a R , resulta

$$\int_0^R \varphi(a) \cdot r dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) r d\theta dr = \frac{1}{2\pi} \int_{D(a, R)} \varphi(z) dm(z).$$

És a dir:

$$\varphi(a) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{D(a, R)} \varphi(z) dm(z),$$

que és la versió bidimensional de la mitjana.

Tal com acabem de veure, les funcions holomorfes a U i, per tant, també les seves parts reals i imaginàries que són funcions harmòniques tenen la propietat de la mitjana. Més endavant veurem que totes les funcions harmòniques tenen aquesta propietat i que, de fet, la propietat de la mitjana les caracteritza (teorema 7.7).

4.2 Funcions analítiques i funcions holomorfes

En el capítol segon (definició 2.36) hem introduït la noció de funció analítica de la variable complexa z com una funció que, localment, s'expressa com a suma d'una sèrie de potències de z . Hem vist que aquestes funcions són *indefinidament holomorfes*, és a dir, són holomorfes i totes les seves derivades també ho són. A continuació provarem el recíproc d'aquest resultat, que dóna, en particular, l'equivalència entre funcions holomorfes i funcions analítiques.

Teorema 4.8. *Si la funció f és holomorfa en un disc $D(a, R)$, llavors hi ha una sèrie de potències $\sum_n c_n(z-a)^n$, centrada en a i amb radi de convergència més gran o igual que R , tal que $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$ si $z \in D(a, R)$.*

Demostració. Per a $r < R$, apliquem la fórmula integral de Cauchy (4.2) al disc $D(a, r)$ i obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad |z-a| < r.$$

Com que volem veure que hi ha una sèrie de potències que defineix f , la idea és desenvolupar en sèrie de potències el nucli de Cauchy.

Fix w , amb $|w - a| = r$, ens preguntem si $\frac{1}{w-z}$ és la suma d'una sèrie de potències en z , centrada en a , al disc $D(a, r)$. Això és fàcil de veure, escrivint

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)(1-\frac{z-a}{w-a})}$$

i utilitzant la sèrie geomètrica de raó $\xi = \frac{z-a}{w-a}$. Com que $|\xi| = \frac{|z-a|}{|w-a|} = \frac{|z-a|}{r} < 1$,

tenim $(1-\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n$ i

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Si ara fixem z amb $|z-a| < r$, pel criteri M de Weierstrass (teorema 2.10) la sèrie anterior és uniformement convergent per a $w \in C(a, r)$ i podem commutar la integració complexa amb la suma infinita (proposició 3.4) i obtenim

$$f(z) = \sum_n c_n(r)(z-a)^n, \quad |z-a| < r,$$

amb $c_n(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(w)(w-a)^{-n-1} dw$. En principi, per a cada r , $0 < r < R$, tenim una sèrie de potències amb coeficients $c_n(r)$ que depenen de r i amb radi de convergència més gran o igual que r (atès que és convergent i suma $f(z)$). Ara bé, si $r_1 < r_2$, la unicitat del desenvolupament de f (proposició 2.32) dóna que $c_n(r)$ és, de fet, independent de r ; podem posar, doncs,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(w)(w-a)^{-n-1} dw, \quad 0 < r < R.$$

Ara, per a cada $z \in D(a, R)$, tan sols cal considerar un número $r > 0$ tal que $|z-a| < r < R$, per a concloure que $f(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$. $\square$

D'aquest resultat es deriva immediatament:

Teorema 4.9 (Identitat entre funcions holomorfes i funcions analítiques). *Si U és un obert del pla complex, una funció és holomorfa a U si i només si és analítica a U . Més precisament, tota funció f holomorfa a U és indefinidament holomorfa a U , i per a tot punt $a \in U$ el desenvolupament de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (4.5)$$

és vàlid al disc més gran centrat en a i inclòs a U , que és $D(a, \delta(a))$, on $\delta(a)$ és la distància del punt a al tancat $\mathbb{C} \setminus U$, és a dir, $\delta(a) = \inf\{|a-w|, w \notin U\}$.

Observem que, tal com s'havia enunciat, aquest resultat, juntament amb el teorema 2.31, dóna una altra prova del teorema 2.39. D'altra banda, l'exemple 2.38 mostra que la sèrie (4.5) pot tenir un radi de convergència més gran que $\delta(a)$. Així mateix, sabem ara que si f és holomorfa a U , llavors f és de classe C^∞ respecte de les variables reals a U i, per tant, f és harmònica a U (vegeu l'apartat 3.7.3).

Novament cal posar èmfasi en el contrast que hi ha entre el teorema 4.9 i la situació corresponent en variable real. En el context de la variable real, evidentment, no tota funció derivable és infinitament derivable; així, per exemple, $x|x|$ és derivable en tots els punts i la seva derivada $|x|$ no ho és en $x = 0$. Si volem un exemple més extrem, podem considerar la integral indefinida, F , d'una funció contínua f que no és derivable en cap punt. Llavors F és una funció derivable tal que $F' = f$ no és derivable enlloc. Tampoc és cert que una funció infinitament derivable sigui analítica de variable real; en efecte, les funcions analítiques compleixen el principi de la prolongació analítica (vegeu l'apartat 4.4.2) i, en particular, no pot haver-hi funcions analítiques amb suport compacte, no idènticament nul·les. Per tant, qualsevol funció de classe C^∞ amb suport compacte, no idènticament nul·la, és no analítica. Un altre exemple, en aquest cas amb suport no compacte, és la funció

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f(0) = 0.$$

Aquesta funció és de classe C^∞ , analítica a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, però no és analítica a $\mathbb{R}$, perquè $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (ja que $f(x) = O(x^n)$, per a tot n) i f no pot ser igual a la suma de la seva sèrie de Taylor al voltant del punt 0. La funció f és la que s'acostuma a utilitzar en la construcció de funcions de classe C^∞ amb suport compacte.

El resultat següent és el cas $R = +\infty$ del teorema 4.9.

Teorema 4.10. *L'assignació $f \mapsto \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n=0}^\infty$ és una bijecció entre l'espai de les funcions enteres i l'espai format per les successions $(c_n)_{n=0}^\infty$ tals que la sèrie $\sum c_n z^n$ té radi de convergència infinit, és a dir, $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$.*

El resultat que exposem a continuació pot ser considerat com una caracterització de les funcions holomorfes dins de la classe de les funcions contínues.

Teorema 4.11 (Teorema de Morera). *Sigui U un obert de $\mathbb{C}$. Llavors una funció $f \in C(U)$ és holomorfa a U si i només si $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ per a tot triangle $\Delta \subset U$.*

Demostració. Si $f \in H(U)$, sabem que $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ quan Δ és un triangle contingut a U , pel teorema de Cauchy (teorema 3.24). Recíprocament, si es

compleix $\int_{\partial\Delta} f(z) dz$, per a tot $\Delta \subset U$, el teorema 3.14 ens assegura que f té, localment (per exemple a cada disc contingut a U), una primitiva holomorfa. Ara pel teorema 4.9 la derivada d'una funció holomorfa també ho és i, per tant, f és holomorfa a cada disc de U , és a dir, $f \in H(U)$. $\square$

El teorema 4.11 permet provar que una funció és holomorfa sense fer cap hipòtesi de regularitat.

Exemple 4.12. Si suposem que (f_n) és una successió de funcions holomorfes en un domini U i $\lim_n f_n(z) = f(z)$, uniformement sobre qualsevol subconjunt de U que sigui compacte, llavors es pot deduir que f també és holomorfa a U (vegeu el teorema 9.3). En efecte f serà contínua (límit uniforme de funcions contínues a cada disc $\overline{D}(a, r) \subset U$) i si Δ és un triangle de U , tindrem $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta} \lim_n f_n(z) dz = \lim_n \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0$, per la convergència uniforme sobre $\partial\Delta$ i pel fet de ser f_n holomorfa. $\square$

El teorema de Morera permet provar també que a l'hora de mirar si una funció contínua és holomorfa es pot prescindir d'uns quants punts i d'unes quantes rectes.

Teorema 4.13. Si f és una funció contínua en un obert U i holomorfa a $U \setminus E$, on E és una reunió finita de punts i rectes, llavors f és holomorfa a U .

Demostració. Cal veure que $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ per a tot triangle $\Delta \subset U$. Si Δ no conté cap punt ni cap recta de E , ens ho diu el teorema de Cauchy. Suposem ara que Δ conté un punt a de E . Llavors, donat $\varepsilon > 0$, Δ es pot descompondre en una reunió de triangles $\Delta = \Delta_a \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m$ de manera que $a \in \Delta_a$ i $L(\partial\Delta_a) < \varepsilon$ (fig. 4.2) i hom té

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_a} f(z) dz + \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Delta_j} f(z) dz.$$

Com que $a \notin \Delta_j$ és $\int_{\partial\Delta_j} f(z) dz = 0$ i, d'altra banda, com que f és acotada a Δ per ser contínua a $\overline{U}$, hom té

$$\left| \int_{\partial\Delta_a} f(z) dz \right| \leq (\sup_{z \in \Delta_a} |f(z)|) L(\partial\Delta_a) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Si una recta, r , de E passa per Δ , és fàcil veure que la integral sobre $\partial\Delta$ es pot descompondre en integrals al llarg de triangles que tenen un costat sobre r i cadascun d'aquests s'aproxima per triangles que no tallen r (fig. 4.2). $\square$

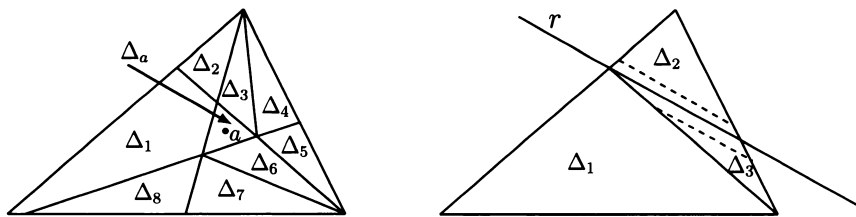


Figura 4.2

En la prova del teorema 4.8 s'ha vist que si $f \in H(D(a, R))$, llavors

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad 0 < r < R. \quad (4.6)$$

Aquesta fórmula és un cas particular de la proposició següent:

Proposició 4.14. Si U és un domini acotat del pla amb vora regular a trossos, orientada positivament, i f és holomorfa en un entorn de $\bar{U}$, llavors

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad z \in U, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

Demostració. És suficient derivar (4.2), n vegades, respecte de z . El lector pot justificar que la derivació sota el signe integral és correcta. $\square$

Exemple 4.15. Per tal de calcular el valor de la integral $I = \int_{|z|=2} \frac{z^2 e^z}{(z-1)^3} dz$, apliquem (4.6), per a $n = 2$, a la funció $f(z) = z^2 e^z$. Resulta $I = \pi i f''(1) = 6\pi e i$. $\square$

Exemple 4.16. Calculem ara $I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2(1+z^2)} dz$. Descomponent en fraccions simples $\frac{1}{z^2(1+z^2)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i} \frac{1}{z+i}$ i aplicant (4.7) hom té

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{2i} \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-i} + \frac{1}{2i} \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} = \\ &= 2\pi i \cos(0) - \pi \sin(i) + \pi \sin(-i) = \pi i(2 - e - e^{-1}). \end{aligned} \quad \square$$

Observem que, d'altra banda, aplicant directament (4.2) a la funció derivada n -èsima de f , $f^{(n)}$, resulta

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f^{(n)}(w)}{w-z} dw, \quad z \in U, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

La igualtat entre (4.7) i (4.8) també és conseqüència de la regla d'integració per parts, aplicada successivament.

4.3 Analicitat de les funcions harmòniques. Sèries de Fourier

Suposem que u és una funció harmònica real en un domini $U \subset \mathbb{C}$ i per $a \in U$, fixat, sigui $D(a, \delta(a))$ el disc més gran centrat en a i inclòs a U . Per la proposició 3.50, u és, en aquest disc, la part real d'una funció holomorfa, f . Considerem el desenvolupament en sèrie de potències de f donat pel teorema 4.8,

$$f(z) = \sum_n c_n (z - a)^n, \quad |z - a| < \delta(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $a = 0$. Si prenem parts reals en l'expressió de $f(z)$ com a suma de potències de z^n , amb $z = x + iy$, tenim

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(c_n z^n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}[c_n (x + iy)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_n)(\operatorname{Re} z^n) - (\operatorname{Im} c_n)(\operatorname{Im} z^n). \end{aligned}$$

Si calculem $\operatorname{Re} z^n$, $\operatorname{Im} z^n$ en termes de x , y , arribarem formalment a una expressió del tipus $u(x, y) = \sum_{m,l=0}^{\infty} b_{m,l} x^m y^l$, on $b_{m,l} = (-1)^k \binom{m+l}{m} \operatorname{Re} c_{m+l}$

si $l = 2k$ i $b_{m,l} = (-1)^{k+1} \binom{m+l}{m} \operatorname{Im} c_{m+l}$ si $l = 2k + 1$. Tanmateix, per a justificar el càlcul cal veure que la sèrie doble resultant és absolutament convergent i que, per tant, podem sumar per blocs. Prenent $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ amb $\delta = \delta(0)$ i suposant $|x|, |y| < \varepsilon$, hom té $|x| + |y| < \delta$ i

$$\begin{aligned} \sum_{m,l=0}^{\infty} |b_{m,l}| |x|^m |y|^l &\leq \sum_{m,l=0}^{\infty} \binom{m+l}{m} |c_{m+l}| |x|^m |y|^l = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \sum_{m+l=k} \binom{m+l}{m} |x|^m |y|^l = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| (|x| + |y|)^k < +\infty. \end{aligned}$$

La suma per blocs està llavors justificada (proposició 2.8) i arribem a

$$u(x, y) = \sum_{m,l=0}^{\infty} b_{m,l} x^m y^l, \quad |x|, |y| < \varepsilon. \quad (4.9)$$

Hem demostrat, doncs, el resultat següent:

Teorema 4.17. *Tota funció harmònica en un domini del pla és una funció analítica de dues variables reals.*

En l'apartat 3.7.3 hem vist que si $P(x, y)$ és un polinomi harmònic real, el polinomi en z que el té com a part real i que té part imaginària nul·la a l'origen és $2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - P(0, 0)$. El teorema anterior, que diu que tota funció harmònica és un polinomi en x, y de grau infinit, permet enunciar quelcom de semblant:

Si u està donada per (4.9) quan $|x|, |y| < \varepsilon = \frac{\delta}{2}$, la sèrie doble

$$2 \sum_{m,l=0}^{\infty} b_{m,l} \left(\frac{z}{2}\right)^m \left(\frac{z}{2i}\right)^l - b_{0,0}$$

convergeix absolutament per a $|z| < \delta$ i defineix una funció holomorfa f que té la funció harmònica u com a part real i que té part imaginària nul·la a l'origen. Formalment, és

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0).$$

Exemple 4.18. La funció $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$ és harmònica. En aquest cas, si posem $f(z) = 2 \sin \frac{z}{2} \operatorname{ch} \frac{z}{2i} = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2} = \sin z$, és $u = \operatorname{Re} f$ i $f(0) = 0$. $\square$

De les consideracions que hem fet es desprèn que si u és harmònica real al disc $D(0, R)$, el desenvolupament (4.9) de u , al voltant de l'origen, en sèrie de potències de x, y és vàlid per a $|x|, |y| < \frac{R}{2}$. Tanmateix, hi ha un altre desenvolupament de u més interessant, vàlid a tot el disc $D(0, R)$, relacionat amb les *sèries de Fourier*. Senzillament agafem coordenades polars, $z = x + iy = re^{i\theta}$ i posem $u = \operatorname{Re} f$, amb f holomorfa a $D(0, R)$, $f(z) = \sum_n c_n z^n$, de manera que

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} \overline{z}^n \right) = \\ &= \operatorname{Re} c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} r^n e^{-in\theta}. \end{aligned}$$

Obtenim un desenvolupament del tipus

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (4.10)$$

vàlid per a $|z| < R$, amb $\overline{d_n} = d_{-n}$, $d_0 \in \mathbb{R}$. Si u és harmònica amb valors complexos, posem $u = u_1 + iu_2$, on u_1, u_2 són harmòniques reals. Desenvolupant en la forma anterior cada u_i , $i = 1, 2$ obtindrem un desenvolupament com el de (4.10) per a u , sense la restricció $\overline{d_n} = d_{-n}$. Així, hem vist el resultat següent:

Teorema 4.19. *Tota funció u harmònica en un disc $D(0, R)$, té un desenvolupament, vàlid en aquest disc, de la forma*

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n r^{|n|} e^{in\theta} = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \bar{z}^n, \quad \text{si } z = ze^{i\theta}.$$

La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ s'anomena *part holomorfa* de u , i $\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \bar{z}^n$ és la seva *part antiholomorfa*. Totes dues sèries convergeixen absolutament en cada punt $z \in D(0, R)$ i uniformement sobre cada compacte contingut a $D(0, R)$. Observem que

$$d_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial z^n}(0), \quad d_{-n} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n}(0).$$

Una funció holomorfa a $D(0, R)$ és harmònica; en aquest cas, només tenim en el desenvolupament donat pel teorema 4.19 els termes en z^n amb $n \geq 0$ i cap terme en $\bar{z}^n$, $n \geq 1$.

Suposem, altra vegada, que u és harmònica al disc $D(0, R)$ i fixem $0 < r < R$. La funció $u_r(\theta) = u(re^{i\theta})$ és una funció contínua de θ i 2π -periòdica. La igualtat (4.10) ens dóna el desenvolupament de u_r ,

$$u_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (4.11)$$

que, com que $C(0, r)$ és compacte, és uniformement convergent respecte de θ . La sèrie (4.11) és la *sèrie de Fourier* de la funció 2π -periòdica $u_r(\theta)$. Multipliant (4.11) per $e^{-im\theta}$ i integrant tenim les igualtats

$$d_m r^{|m|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta = \widehat{u_r}(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Aquestes igualtats, en el cas que u sigui real i $u = \operatorname{Re} f$ relacionen els coeficients de Fourier de u_r , $\widehat{u_r}(m)$, amb els coeficients de Taylor de f , c_m , atès que $d_m = \frac{1}{2} c_m$ si $m \geq 1$, $d_m = \frac{1}{2} \overline{c_{-m}}$ si $m \leq -1$ i $d_0 = \operatorname{Re}(c_0)$.

En el cas d'una funció holomorfa f amb desenvolupament $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, el desenvolupament de Fourier de la funció $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ és

$$f_r(\theta) = \sum_0^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

i les igualtats entre coeficients s'escriuen

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{r^n} \widehat{f}_r(n), \quad n \geq 0,$$

que són també les que s'obtenen de (4.6) en parametritzar $C(0, r)$ per $w = re^{i\theta}$.

Exemple 4.20. Si $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ és holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$ i contínua a $\overline{\mathbb{D}}$, f mirada com a funció sobre $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ té un desenvolupament en sèrie de Fourier: $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta}$. El que acabem de veure, aplicat al disc $D(0, r)$, $0 \leq r < 1$ i fent $r \rightarrow 1$, dóna $\widehat{f}(n) = c_n$ si $n \geq 0$, $\widehat{f}(n) = 0$ si $n < 0$. Així cap funció contínua a $\mathbb{T}$ es pot estendre contínuament a una funció holomorfa a $\mathbb{D}$ si els seus coeficients de Fourier no compleixen $\widehat{f}(n) = 0$, $n < 0$. Per exemple, la funció $\bar{z} = e^{-i\theta}$ a $\mathbb{T}$ no té cap extensió holomorfa i contínua a $\overline{\mathbb{D}}$. $\square$

4.4 Zeros de funcions analítiques. Principi de prolongació analítica

4.4.1 Estructura del conjunt de zeros de les funcions holomorfes

S'ha vist en el teorema 4.9 que la classe de les funcions holomorfes en un domini U del pla és exactament la classe de les funcions analítiques de la variable z a U . Tot el que direm en aquesta secció per a les funcions analítiques en z s'aplica també a les funcions analítiques de variable real en un interval $I \subset \mathbb{R}$. Donarem els enuncisats, però, per al cas complex.

Lema 4.21. *Segui U un domini de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$ i $a \in U$. Les afirmacions següents són equivalents:*

- a) $f^{(n)}(a) = 0$ per a $n = 0, 1, 2, \dots$
- b) $f(z) = 0$ per a z en un entorn del punt a .

c) f és idènticament nul·la a U .

Demostració. Òbviament c) implica a) i b). El fet que a) implica b) és clar tenint en compte que, per l'analiticitat de f , hom té $f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ en un entorn de a . Tan sols falta provar que b) implica c). Posem

$$A = \{z \in U : f \text{ s'anul·la en un entorn de } z\}.$$

Si val b), $A \neq \emptyset$ i, clarament, A és obert. Si veiem que A és tancat a U , llavors obtindrem $U = A$ per ser U connex i ja hauréu provat c). Suposem que $z_0 \in U$ és adherent a A i triem punts $z_m \in A$ de manera que $\lim_m (z_m) = z_0$. Com que f val zero en un entorn de cada punt z_m , és $f^{(n)}(z_m) = 0$, per a tot n , m , i llavors $f^{(n)}(z_0) = \lim_m f^{(n)}(z_m) = 0$. Així $f^{(n)}(z_0) = 0$, per a tot n , i ja hem vist que aquest fet implica que f és nul·la en un entorn de z_0 , és a dir, $z_0 \in A$. $\square$

Si f és holomorfa al domini U , designem per $\mathcal{Z}(f)$ el conjunt dels zeros de f a U ,

$$\mathcal{Z}(f) = \{a \in U : f(a) = 0\}.$$

Pel lema 4.21, si $a \in \mathcal{Z}(f)$ i $f \not\equiv 0$ a U , no pot ser $f^{(n)}(a) = 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. En conseqüència, podem considerar el número natural $m > 0$ definit per

$$m = m(f, a) = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

Així, $f^{(m)}(a) \neq 0$ mentre que $f^{(i)}(a) = 0$ per a $i = 0, 1, \dots, m-1$. El número $m(f, a)$ s'anomena *multiplicitat o ordre del punt a com a zero de f*. Al voltant del punt a el desenvolupament de f comença amb el terme en $(z-a)^m$:

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m + \dots = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad |z-a| < \delta.$$

Si treiem $(z-a)^m$ factor comú en el desenvolupament anterior, podem escriure

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad (4.12)$$

on $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z-a)^n$; és evident que aquesta darrera

sèrie té el mateix radi de convergència que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ i defineix g com a

funció analítica a $D(a, \delta)$ amb $g(a) = c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$ i $g(z) = f(z)(z-a)^{-m}$ si $z \neq a$. Com que $g(a) \neq 0$, serà també $g(z) \neq 0$ en algun disc $D(a, \varepsilon) \subset U$,

$\varepsilon > 0$, per continuïtat. En aquest disc, l'únic zero de f és a , a causa de l'equació (4.12). Així, hem vist que tots els punts de $\mathcal{Z}(f)$, si $f \not\equiv 0$, són punts aïllats. L'estructura dels conjunts discrets en oberts de $\mathbb{C}$ permet enunciar el resultat següent:

Teorema 4.22. *Si f és una funció holomorfa en un domini U , $f \not\equiv 0$, llavors $\mathcal{Z}(f)$ és un conjunt tancat de U sense punts d'acumulació a U . En particular, $\mathcal{Z}(f)$ és un conjunt finit o numerable i sobre cada compacte de U hi ha un nombre finit de zeros de f .*

Exemple 4.23. Un polinomi en z té un nombre finit de zeros a $\mathbb{C}$. La funció $f(z) = e^z$ no té zeros. La funció $f(z) = e^z - 1$ té com a zeros a $\mathbb{C}$ els punts $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. La funció $f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ té els mateixos zeros que $e^{2iz} - 1$, és a dir, $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La funció $\text{Log } z$ a $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ té un únic zero en el punt 1. $\square$

Exemple 4.24. Considerem la funció $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}} - 1$ definida a $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Els zeros (z_k) de f estan donats per $\frac{1+z_k}{1-z_k} = 2\pi ki$, és a dir, $z_k = \frac{2\pi ki - 1}{2\pi ki + 1} = 1 - \frac{2}{2\pi ki + 1}$, que és un conjunt que té 1 $\notin U$ com a punt d'acumulació. $\square$

Si a és un zero d'una funció analítica f , $f \not\equiv 0$, en un domini U acabem de veure que el punt a té multiplicitat finita $m = m(f, a)$. En particular $f(z)$ es comporta com $\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m$ quan $z \rightarrow a$,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m} = 1, \quad f(z) \sim \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m.$$

Això significa que per a una funció analítica no és possible un ordre d'anul·lació al voltant d'un zero a que no sigui una potència entera de $z - a$. Per exemple, no pot haver-hi cap funció holomorfa f definida en un entorn de 0 tal que $|f(z)| \sim |z| \log |z|$, perquè $|z| \log |z|$ és un infinitèsim quan $|z| \rightarrow 0$, que no és equivalent a $|z|^m$ per a cap valor de m . La funció $f(z) = z \log z$, que sí que compleix $|f(z)| \sim |z| \log |z|$ ($|z| \rightarrow 0$), no és analítica a cap entorn de l'origen.

Si $f \in H(U)$, on U és un domini de $\mathbb{C}$ i f no és idènticament nul·la, cada punt $z_k \in \mathcal{Z}(f)$ té associada la seva multiplicitat $m_k = m(f, z_k)$, com a zero de f . En lloc de considerar separatament la successió (z_k) i la de les respectives multiplicitats (m_k), habitualment s'inclou en la llista de zeros cadascun d'ells tantes vegades com indiqui la seva multiplicitat de manera que en la successió resultant

$$(z_1, z_2, z_3, \dots, z_k, \dots)$$

hi poden aparèixer repeticions. S'obté així la llista de zeros de f *comptant multiplicitats*.

Evidentment, tot el que hem dit sobre els zeros de f , que són les arrels de l'equació $f(z) = 0$, s'aplica a les arrels de l'equació $f(z) = b$, on b és un valor complex fixat. Així, $f^{-1}\{b\} = \mathcal{Z}(f - b)$, és un conjunt discret de U si f és holomorfa i no constant a U .

Si $\mathcal{Z}(f)$ no és finit, té punts d'acumulació a $\mathbb{C}^*$. Com que no els pot tenir a U , els punts d'acumulació han de ser de ∂U ; si U no és acotat, ∞ és a la frontera de U dins $\mathbb{C}^*$ i ∞ pot ser eventualment un punt d'acumulació de $\mathcal{Z}(f)$. Per exemple, els zeros $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$ de $e^z - 1$ a $\mathbb{C}$ s'acumulen a ∞ ; el domini $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ té per frontera $\partial U = \{1, \infty\}$ a $\mathbb{C}^*$, i els zeros de $f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}} - 1$ a U s'acumulen a 1.

Si $z_1, \dots, z_N$ són els zeros de f en un compacte $K \subset U$ (comptant multiplicitats), podem reiterar la factorització (4.12) i obtenir

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)g(z),$$

on la funció g és holomorfa a U i no té cap zero dins de K . En efecte, si z_i té multiplicitat m_i , és a dir, apareix m_i vegades a la llista $z_1, z_2, \dots, z_N$, llavors $g(z_i) = \frac{f^{(m_i)}(z_i)}{m_i!} \neq 0$; en els altres punts $g(z) \neq 0$ perquè $f(z) \neq 0$. D'aquest procés se'n diu *treure els zeros de f en el compacte K* .

4.4.2 El principi de prolongació analítica

El resultat següent és una conseqüència directa del lema 4.21 i del teorema 4.22 aplicat a la diferència de dues funcions holomorfes. Ara bé, tal com s'ha dit en parlar dels zeros de les funcions holomorfes, s'ha de pensar que el principi de prolongació analítica tant és vàlid per a funcions analítiques de variable complexa (és a dir, holomorfes) en un domini del pla, com per a funcions analítiques de variable real en un interval de la recta.

Teorema 4.25 (Principi de prolongació analítica). *Siguin f, g funcions holomorfes en un domini U . Llavors $f(z) = g(z)$ per a tot $z \in U$ si i només si es compleix alguna de les condicions equivalents següents:*

- Hi ha un punt $a \in U$ de manera que $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$, per a tot n , és a dir, $|f(z) - g(z)| = o(|z - a|^n)$, $z \rightarrow a$, $n = 0, 1, 2, \dots$*
- Hi ha un conjunt $A \subset U$ que té algun punt d'acumulació a U i $f(z) = g(z)$ per a tot $z \in A$.*
- Hi ha un obert $V \subset U$ tal que $f(z) = g(z)$ per a tot $z \in V$.*

Entre els exemples més senzills de conjunts $A \subset U$ amb un punt d'acumulació a U tenim, el conjunt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ format pels termes d'una successió (a_n) que sigui convergent cap a un punt de U .

Exemple 4.26. Si una funció f , holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$, compleix $nf\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $n = 2, 3, \dots$, aleshores $f(z) = z$, per a tot $z \in \mathbb{D}$. En efecte, $f(z)$ i $g(z) = z$ coincideixen en $A = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 2\right\}$. En canvi, la funció $f(z) = z\left(1 - \sin \frac{\pi}{z}\right)$ també compleix $nf\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ i no és pas idènticament z . En aquest cas, f és holomorfa a $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i A no té punts d'acumulació dins de U . $\square$

Tot seguit donem una aplicació del principi de prolongació analítica. Direm que un domini U del pla és *simètric* si per a cada punt $z \in U$ també és $\bar{z} \in U$. Com que U és connex, és evident que, si és simètric, aleshores $U \cap \mathbb{R}$ és un obert no buit de $\mathbb{R}$ i, per tant, és una reunió numerable d'interval·ls oberts de $\mathbb{R}$.

Teorema 4.27 (Principi de reflexió de Schwarz). *Suposem que U és un domini simètric del pla, $f \in H(U)$ i que $f(x)$ és real per a $x \in U \cap \mathbb{R}$. Llavors es compleix $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ per a tot $z \in U$.*

Demostració. Considerem $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ que és una funció ben definida a U . Si al disc $D(\bar{a}, r) \subset U$, $f(z)$ és la suma de la sèrie $\sum_n c_n(z - \bar{a})^n$ llavors $g(z)$ és, a $D(a, r)$, la suma de $\sum_n \bar{c}_n(z - a)^n$. Per tant, g també és analítica a U . També es pot veure, alternativament, que g compleix les equacions de Cauchy-Riemann. Ara bé, si $x \in U \cap \mathbb{R}$ hom té $g(x) = \overline{f(x)} = f(x)$. Com que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ és un obert (i, per tant, té punts d'acumulació dins de U) es conclou que $g(z) = f(z)$, $z \in U$. $\square$

Observació 4.1. Una altra manera de veure el principi de reflexió és la següent. Designem per $U^+ = U \cap \{z : \text{Im } z > 0\}$ la part del domini simètric U situada en el semiplà superior. Suposem que tenim la funció $g \in H(U^+)$ i que en els punts $x \in U \cap \mathbb{R}$ la funció g té un límit real que també designem per g : $g(x) = \lim_{z \rightarrow x, z \in U^+} g(z)$. Aleshores la funció f definida a U mitjançant “reflexió”

$$f(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in U^+ \\ g(x) & \text{si } x \in U \cap \mathbb{R} \\ \overline{g(\bar{z})} & \text{si } z \in U^- \end{cases}$$

és holomorfa a U (és l'única extensió possible de g a U que sigui holomorfa). En efecte: és clar que $f \in C(U)$ i que és holomorfa a tots els punts de $U \setminus \mathbb{R}$; llavors, pel teorema 4.13, és $f \in H(U)$.

El principi de prolongació analítica permet entendre bé moltes identitats en el camp real. Suposem, per exemple, que $f_1, \dots, f_N$ són funcions enteres que compleixen una identitat de l'estil $P(f_1, \dots, f_N) = 0$, només per a valors reals de la variable, on P és un polinomi en N variables. El principi de prolongació analítica assegura aleshores que $P(f_1, \dots, f_N)(z) = 0$ es compleix idènticament en z . Així, del fet que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ per a $x \in \mathbb{R}$ s'obté automàticament $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ per a $z \in \mathbb{C}$ i, especificant a $z = ix$ amb $x \in \mathbb{R}$, resulta $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Ja hem assenyalat abans que tot el que hem dit fins ara s'aplica a les funcions analítiques de variable real. Justament, amb l'ajut del principi de prolongació analítica podem entendre millor la relació entre les funcions analítiques de variable real i les funcions analítiques de variable complexa, és a dir, les funcions holomorfes.

Teorema 4.28. *Tota funció analítica de variable real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ és la restricció a $\mathbb{R}$ d'una funció holomorfa $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ definida en un domini simètric U del pla complex, és a dir, $\mathbb{R} \subset U$ i $f = F|_{\mathbb{R}}$.*

Demostració. Per a cada punt $a \in \mathbb{R}$ sabem, per hipòtesi, que existeix un interval $I(a, R(a))$, de radi $R(a) > 0$, de manera que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad |x-a| < R(a).$$

La sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ té un radi de convergència ρ que ha de complir $\rho \geq R(a)$ i defineix una funció holomorfa, F_a , a $D(a, \rho)$. La restricció de F_a a $I(a - \rho, a + \rho)$ és una funció analítica en aquest interval que coincideix amb f a $I(a - R(a), a + R(a))$ i, per tant, pel principi de prolongació analítica, $F_a = f$ a tot l'interval $I(a - \rho, a + \rho)$. Això vol dir que $\rho = R(a)$. Suposem ara que dos dels discos $D(a, R(a))$ s'intersequen, $D(a_1, R(a_1)) \cap D(a_2, R(a_2)) \neq \emptyset$, de manera que a la intersecció hi tenim definides tant F_{a_1} com F_{a_2} ; com que en la part d'aquesta intersecció que està sobre $\mathbb{R}$ ambdues funcions coincideixen amb f , novament pel principi de prolongació analítica, serà $F_{a_1} = F_{a_2}$ a $D(a_1, R(a_1)) \cap D(a_2, R(a_2))$. Això significa que al domini

$$U = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} D(a, R(a)),$$

que és simètric, les funcions F_a permeten definir una funció $F: U \rightarrow \mathbb{C}$, igual a F_a a cada disc $D(a, R(a))$. Per construcció F és holomorfa a U i $F|_{\mathbb{R}} = f$. $\square$

Enunciem, finalment, sense donar-ne la demostració, el principi de prolongació analítica per a funcions analítiques de variables reals, que s'aplica, en particular, a les funcions harmòniques.

Teorema 4.29. *Siguin f, g funcions analítiques de variables reals en un domini $U \subset \mathbb{R}^2$. Llavors $f(x, y) = g(x, y)$, per a tot $(x, y) \in U$, si i només si es compleix alguna de les condicions equivalents següents:*

a) *Hi ha un punt $(x_0, y_0) \in U$ tal que $\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}(x_0, y_0) = \frac{\partial^{n+m} g}{\partial x^n \partial y^m}(x_0, y_0)$, per a tot n, m , és a dir, $|f(x, y) - g(x, y)| = o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^n$, si $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

b) *Hi ha un obert $V \subset U$ tal que $f(x, y) = g(x, y)$ per a tot $(x, y) \in V$.*

En aquest cas, pot ser $f(x, y) = g(x, y)$ per a $(x, y) \in A$, on A té punts d'acumulació dins de U , sense ser $f \equiv g$. Això és pel fet que el conjunt de zeros d'una funció analítica de les variables x, y no és necessàriament discret. Per exemple, la funció harmònica x s'anul·la a l'eix imaginari, sense ser idènticament nul·la.

4.5 Estudi local d'una funció holomorfa. Teorema de l'aplicació oberta

Considerem una funció f holomorfa en un domini $U \subset \mathbb{C}$. Suposem que f no té zeros a U i volem saber si hi ha una determinació contínua del logaritme de f a U . Ja hem vist en la proposició 3.20 que això passa si i només si la funció f'/f té una primitiva holomorfa a U . Però ara sabem que f' és una funció holomorfa, i, per tant, també ho és f'/f , de manera que aplicant el corollari 3.28 que ens diu que, en un obert convex, tota funció holomorfa té una primitiva, resulta:

Proposició 4.30. *En un obert convex, tota funció holomorfa i sense zeros, admet una determinació del logaritme i de l'arrel n -èsima, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Tota funció holomorfa i sense zeros en un domini, admet, localment, una determinació del logaritme i de l'arrel n -èsima, per a tot $n \in \mathbb{N}$.*

Corollari 4.31. *Si $f \in H(U)$ i $f(z) \neq 0$, per a tot $z \in U$, llavors la funció $\text{Log } |f(z)|$ és harmònica a U .*

Demostració. Hom pot calcular directament $\Delta \text{Log } |f|$ i utilitzar les equacions de Cauchy-Riemann per a veure que val zero. També és conseqüència de la

proposició 4.30 perquè a cada disc $D \subset U$ hi haurà una funció $h \in H(D)$ tal que $e^h = f$ i aleshores $\operatorname{Log} |f| = \operatorname{Re} h$ és harmònica a D . $\square$

Sigui U un domini del pla, $a \in U$, $f \in H(U)$ i $b = f(a)$. Si $f(z) - b$ té un zero de multiplicitat m en el punt a , és a dir, $f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0$ i $f^{(m)}(a) \neq 0$, diem que f pren m vegades el valor b en el punt a . Tot seguit explicarem el perquè d'aquesta definició. Tindrem, en aquest cas,

$$f(z) - b = (z - a)^m g(z),$$

on $g \in H(U)$ i $g(a) \neq 0$. Fixem un disc $D(a, R)$ en el qual g no tingui zeros; per la proposició 4.30, hi ha una funció $h \in H(D(a, R))$ tal que $g = h^m$. Això significa que a $D(a, R)$ és

$$f(z) - b = [(z - a)h(z)]^m \stackrel{\text{def}}{=} f_1(z)^m. \quad (4.13)$$

Observem que $f_1(z) = (z - a)h(z)$ compleix $f_1(a) = 0$, $f_1'(a) = h(a) \neq 0$, és a dir, f_1 pren el valor 0 en a una vegada. És clar, d'acord amb (4.13), que entendrem el comportament local de f si entenem el de f_1 .

La funció f_1 és holomorfa a $D(a, R)$, $f_1(a) = 0$ i $f_1'(a) = \lambda \neq 0$. Afirmem ara que f_1 és un homeomorfisme d'un entorn del punt a en un entorn de 0. Aquest fet és una conseqüència del teorema de la funció inversa, però podem donar-ne una prova directa de la manera següent. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $a = 0$ i $\lambda = 1$, és a dir, $f_1(z) = z + f_2(z)$ amb $f_2'(0) = 0$. Fixem un número $0 < \varepsilon < 1$ i determinem $r < R$ tal que $|f_2'(z)| < \varepsilon$ si $z \in D(0, r)$. Pel teorema fonamental del càlcul (per exemple, integrant f_2' en el segment que va de z a w) tindrem

$$|f_2(z) - f_2(w)| \leq \varepsilon |z - w|, \quad z, w \in D(0, r),$$

i aquesta desigualtat implica

$$(1 - \varepsilon)|z - w| \leq |f_1(z) - f_1(w)| \leq (1 + \varepsilon)|z - w|, \quad z, w \in D(0, r). \quad (4.14)$$

Provem ara que si $|\xi|$ és prou petit, diguem $|\xi| < s$, l'equació $f_1(z) = \xi$ té una solució a $D(0, R)$ que, per (4.14), serà única i dependrà contínuament de ξ . Fixem-nos que $f_1(z) = \xi$ significa que z és un punt fix de $\xi - f_2(z)$. Definim, com és habitual, una successió recurrent (z_n) , posant $z_0 = 0$ i $z_{n+1} = \xi - f_2(z_n)$. Com que $|z_{n+1} - z_n| = |f_2(z_n) - f_2(z_{n-1})| \leq \varepsilon |z_n - z_{n-1}|$, serà

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \varepsilon^n |z_1 - z_0| = \varepsilon^n |\xi|.$$

Per tant, $|z_n| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - z_{i-1}| \leq |\xi| \frac{1}{1-\varepsilon}$; si $|\xi| \leq s = r(1-\varepsilon)$, tots els punts z_n són efectivament a $D(0, r)$ i convergeixen a una solució de $f_1(z) = \xi$.

Així f_1 és un homeomorfisme local. En aquesta situació ja sabem (apartat 2.4.3) que f_1^{-1} també és holomorfa i $(f_1^{-1})'(w) = (f_1'(z))^{-1}$ si $w = f_1(z)$.

Tornant a la notació general, sigui V un entorn del punt a tal que f_1 sigui un homeomorfisme de V en un disc $D(0, s)$. Per (4.13), la imatge de V per f serà exactament el disc $D(b, s^m)$ i hem provat:

Teorema 4.32. *Sigui f una funció holomorfa en un entorn d'un punt $a \in \mathbb{C}$ de manera que prengui el valor $b = f(a)$, m vegades en a . Aleshores hi ha un entorn V de a i un disc $D(b, \delta)$ tal que $f(V) = D(b, \delta)$ i tot valor $\xi \in D(b, \delta)$, $\xi \neq b$, té exactament m -antiimatges per f a V (mentre que per a $\xi = b$ les m -antiimatges es confonen totes amb a).*

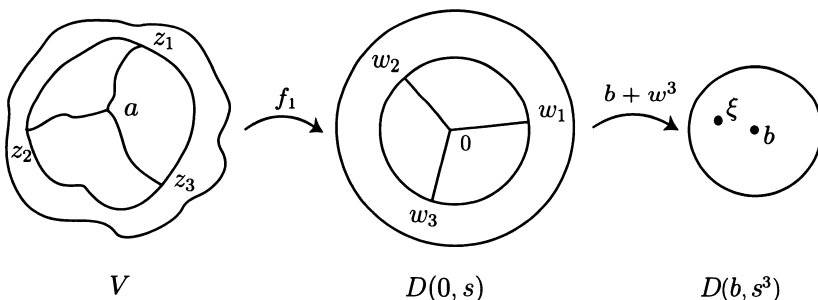


Figura 4.3

Fins i tot podem precisar més la situació descrita per aquest teorema si en reprenem la prova: donat $\xi \in D(b, s^m)$ considerem les m -arrels de $\xi - b$ a $D(0, s)$

$$\xi = b + w_i^m, \quad i = 1, \dots, m, \quad w_i \in D(0, s).$$

Per a cadascun dels punts w_i hi ha un únic punt $z_i \in V$ tal que $f_1(z_i) = w_i$, i aquests valors $z_1, \dots, z_m$ són les m -arrels diferents de $f(z) = \xi$ a V . Com que f_1^{-1} és holomorfa a $D(0, s)$, $f_1^{-1}(0) = a$ i $(f_1^{-1})'(0) = \lambda^{-1}$, podem escriure

$$z_i = a + \lambda^{-1}w_i + o(|w_i|).$$

Els punts $w_1, \dots, w_m$ estan uniformement repartits sobre els angles $\frac{2\pi}{m}k$, $k = 0, \dots, m-1$ i els punts $z_1, \dots, z_m$ ho estan també, llevat d'un petit error,

al voltant de a i girats segons $\arg(\lambda^{-1})$ (fig 4.3). Quan $\xi \rightarrow b$, òbviament

$$\max_{i=1,\dots,m} |z_i - a| \longrightarrow 0,$$

és a dir, els punts $z_1, \dots, z_m$ es fonen en a .

Teorema 4.33 (Aplicació oberta). *Si U és un domini del pla i f és holomorfa a U i no constant, llavors $f(U)$ és un obert de $\mathbb{C}$. Si $V \subset U$ és obert, $f(V)$ també és obert.*

Demostració. Si f no és constant, la hipòtesi del teorema 4.32 es compleix a tots els punts $a \in U$, pel principi de prolongació analítica. Llavors, tot punt de $f(V)$ té un entorn format per punts que tenen antiimatges a V . $\square$

Observem que el teorema 4.32 té com a conseqüència que f és localment injectiva en el punt a si i només si $f'(a) \neq 0$. En el cas de funcions de variable real, tan sols és vàlida una implicació, gràcies al teorema de la funció inversa: si $df(a)$ és invertible, f és localment injectiva en a , però el recíproc és fals. D'altra banda, quan $f'(z) \neq 0$, per a tot $z \in U$, f és localment injectiva a tots els punts, però no és necessàriament injectiva a U . L'exemple més clar és $f(z) = e^z$.

Observem també que, com a conseqüència del teorema de l'aplicació oberta, no pot haver-hi funcions holomorfes no constants en un domini U que prenguin valors en conjunts sense interior (rectes, corbes regulars, etc.). Per exemple, cap funció holomorfa no constant f pot satisfer una equació del tipus

$$u(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)) = 0 \quad \text{o bé} \quad v(f(z), \overline{f(z)}) = 0$$

amb u, v funcions analítiques de dues variables reals (no constants).

4.6 Principi del màxim. Desigualtats de Cauchy. Teorema de Liouville

En aquesta secció obtindrem desigualtats que limiten el valor absolut d'una funció holomorfa i de les seves derivades.

Teorema 4.34 (Principi del màxim). *Si f és holomorfa en un domini U del pla i no és constant, llavors la funció $|f|$ no pot tenir cap màxim local a U .*

Demostració. Suposem que $|f|$ té un màxim local en $a \in U$, és a dir, hi ha un disc $D(a, R) \subset U$ tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ si $z \in D(a, R)$. Això impedeix que $f(D(a, R))$ sigui un obert que conté $f(a)$ i contradiu el teorema 4.33. $\square$

Corol·lari 4.35. *Sigui U un domini acotat de $\mathbb{C}$ i f una funció holomorfa en un entorn de $\overline{U}$ o, més generalment, $f \in C(\overline{U}) \cap H(U)$. Sigui M el màxim de $|f|$ a ∂U . Aleshores hom té*

$$|f(z)| \leq M \quad \text{per a tot } z \in U.$$

Dit d'una altra manera, $\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f|$.

Demostració. Per ser $\overline{U}$ compacte, $|f|$ té un màxim absolut a $\overline{U}$ que s'agafa en un punt $a \in \overline{U}$. Si $a \in U$, aleshores tenim un màxim local, i pel teorema anterior f és constant i l'enunciat és obvi. Si $a \in \partial U$, llavors $|f(a)|$ també és el màxim absolut a ∂U , $|f(a)| = M$ i, en conseqüència, $|f(z)| \leq M$, $z \in U$. $\square$

Exemple 4.36. La quantitat $\sup_{z \in D(1,1)} |e^z|$ coincideix amb $\max_{z \in \overline{D(1,1)}} |e^z|$, que, pel corol·lari 4.35, coincideix amb $\max\{|e^z| : |z-1| = 1\}$. Posant $z = 1 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, resulta $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^{1+\cos t}$ i el valor màxim és e^2 . $\square$

El corol·lari 4.35 diu que una desigualtat $|f(z)| \leq M$ per a $z \in \partial U$ s'estén a $|f(z)| \leq M$ per a $z \in U$ quan $f \in C(\overline{U}) \cap H(U)$. Com una aplicació d'aquest fet tenim l'exemple següent:

Exemple 4.37. No hi ha cap successió de polinomis $P_n(z)$ que convergeixi uniformement cap a $1/z$ en el cercle unitat $\mathbb{T}$. En efecte, si fos així, tindríem

$$\left| P_n(z) - \frac{1}{z} \right| < \varepsilon, \quad n \geq n_0, \quad |z| = 1 \quad (\varepsilon < 1)$$

i, per tant, $|zP_n(z) - 1| < \varepsilon$, $n \geq n_0$, si $|z| = 1$. Pel corol·lari 4.35 seria $|zP_n(z) - 1| \leq \varepsilon$, $n \geq n_0$ per a $|z| \leq 1$ i, prenent $z = 0$, arribem a contradicció. $\square$

Evidentment, si f és holomorfa i no té zeros a U , considerant la funció $\frac{1}{f}$ veiem que $|f|$ no pot tenir mínims locals. I si $f \in C(\overline{U}) \cap H(U)$ no té zeros a $\overline{U}$, tindrem

$$\min_{\overline{U}} |f| = \min_{\partial U} |f|.$$

Dit d'una altra manera, si $m \leq |f(z)| \leq M$ per a $z \in \partial U$ i f no té zeros a $\overline{U}$, llavors també és $m \leq |f(z)| \leq M$ per a $z \in U$.

Considerem el cas particular de la proposició 4.14 que correspon a $U = D(a, R)$. Si f és holomorfa en un entorn de $\overline{D(a, R)}$, es compleix

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(a, R)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad z \in D(a, R). \quad (4.15)$$

Els valors de f sobre $\partial D(a, R)$ determinen $f^{(n)}(z)$ al disc mitjançant aquesta fórmula. Les desigualtats de Cauchy quantifiquen el control de $|f^{(n)}|$ en termes de $|f|$.

Teorema 4.38 (Desigualtats de Cauchy). *Si f és holomorfa en un entorn del disc $\overline{D}(a, R)$ i $|f(z)| \leq M$ quan $z \in C(a, R)$, aleshores es compleix*

$$|f^{(n)}(a)| \leq M \frac{n!}{R^n} \quad \text{per a } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

Demostració. La fórmula (4.15) per a $z = a$ es pot escriure

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,$$

que implica (4.16) immediatament. $\square$

Corol·lari 4.39. *Si f és holomorfa al domini U i acotada, $|f(z)| \leq M$, $z \in U$, aleshores es compleix*

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{n!}{d(z, U^c)^n}, \quad z \in U, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En particular, aquestes desigualtats valen si U és acotat, $f \in C(\overline{U}) \cap H(U)$ i $|f(z)| \leq M$ per a $z \in \partial U$.

Demostració. Apliquem (4.16) a $D(z, r) \subset U$, $r < d(z, U^c)$ i fem tendir r a $d(z, U^c)$. $\square$

Les desigualtats de Cauchy no es poden millorar. Per exemple, per a $\mathbb{D}$, $f(z) = z^n$ i $a = 0$, els dos termes de (4.16) són iguals a $n!$.

Exemple 4.40. Sigui f una funció holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$ que compleix la desigualtat $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, $|z| < 1$. Si prenem $0 \leq r < 1$ i apliquem (4.16) al disc $\overline{D}(0, r)$ amb $a = 0$ i $M = \sup\{|f(z)| : |z| \leq r\} \leq \frac{1}{1-r}$, obtenim $|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{1}{(1-r)^{n+1}}$, $0 \leq r < 1$. Ara podem calcular el valor mínim de la funció $\frac{1}{(1-r)^{n+1}}$ per a $0 \leq r < 1$, i resulta que aquest mínim s'agafa per a $r = \frac{n}{n+1}$ i val $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$. Trobem, doncs, la desigualtat: $|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$, $n = 1, 2, \dots$

Teorema 4.41 (Teorema de Liouville). *Si f és una funció entera i acotada, f és constant. També una funció u harmònica i acotada a tot el pla és constant.*

Demostració. En el cas que f sigui entera, és una conseqüència directa del corollari 4.39, per a $n = 1$, perquè $d(z, U^c) = +\infty$ i, per tant, $f' \equiv 0$. Si u és harmònica a $\mathbb{C}$, segons el teorema 4.19, tenim per a $z = re^{i\theta}$

$$u(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

amb

$$d_n = \frac{1}{2\pi r^{|n|}} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si $|u| \leq M$ a $\mathbb{C}$, resulta $|d_n| \leq Mr^{-|n|}$, per a tot r , i fent $r \rightarrow \infty$ veiem que $d_n = 0$ si $n \neq 0$, és a dir, $u(z) = d_0$ per a $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Així, una funció entera, si no és constant, no pot estar acotada a $\mathbb{C}$. Sí que pot estar-ho la seva restricció a $\mathbb{R}$ com ara $f(z) = \sin z$ o, fins i tot, tendir a zero quan $x \rightarrow \pm\infty$ com, per exemple, $f(z) = e^{-z^2}$.

El teorema de Liouville proporciona una demostració del teorema fonamental de l'àlgebra.

Teorema 4.42 (Teorema fonamental de l'àlgebra). *Si sigui $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un polinomi de grau n , amb $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Llavors P té exactament n arrels $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (algunes de les quals poden estar comptades amb la seva multiplicitat) i $P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$.*

Demostració. Per iteració és suficient provar que P té almenys una arrel. Si no fos així, la funció $f(z) = 1/P(z)$ seria una funció entera. Ara bé, escrivint

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

veiem que $a_n z^n$ és el terme dominant quan $|z| \rightarrow +\infty$ i, per tant, $|P(z)| \rightarrow +\infty$ quan $|z| \rightarrow +\infty$. Així, $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = 0$ i, en particular, f està acotada. Pel teorema de Liouville, f ha de ser constant i aleshores també seria constant $P(z)$, però hem suposat que $\text{grau}(P) \geq 1$. $\square$

És clar que la versió corresponent del teorema de Liouville en una variable real és falsa; hi ha funcions analítiques a tota la recta $\mathbb{R}$ que són acotades i no són constants: $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1+x^2}$, etc.

La prova del teorema 4.42 s'aplica a qualsevol funció entera f tal que $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quan $|z| \rightarrow +\infty$, i s'arriba a la conclusió que f ha de tenir un zero. Tanmateix, veurem més endavant que, en aquest cas, f és un polinomi (apartat 5.5.1 i exercici 11 de la secció 4.7).

4.7 Exercicis

1. Sigui U un domini acotat del pla amb frontera regular a trossos orientada positivament i sigui $\varphi(z, w)$ una funció contínua respecte de les dues variables per a $z \in U$ i $w \in \partial U$. Suposem, a més, que φ és holomorfa com a funció de z per a cada $w \in \partial U$. Proveu que la funció

$$f(z) = \int_{\partial U} \varphi(z, w) dw$$

és holomorfa a U i $f^{(n)}(z) = \int_{\partial U} \frac{\partial^n \varphi(z, w)}{\partial z^n} dw$, $n = 1, 2, \dots$, $z \in U$.

2. Calculeu $\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Log} |x - z| dx$, per a tot $z \in \mathbb{C}$ i $\delta > 0$.

3. Sigui f holomorfa al disc $D(0, R)$, $0 < r < R$ i $h_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$ amb $|h_n| < R - r$ i $(h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Si definim les funcions φ_n per $\varphi_n(z) = \frac{f(z + h_n) - f(z)}{h_n}$, $n = 1, 2, \dots$, proveu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = f'(z)$ uniformement al disc $\overline{D}(0, r)$.

4. Siguin f, g holomorfes en un entorn del disc $\overline{D}(a, R)$. Proveu la igualtat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \overline{f(z)} g'(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{D(a, R)} \overline{f'(z)} g'(z) dm(z).$$

Deduïu d'aquí que si, a més, f és injectiva i posem $K = f(\overline{D}(a, R))$, llavors es compleix la desigualtat isoperimètrica

$$4m(K) \leq L(\partial K) d(K),$$

on $L(\partial K)$ és la longitud de la corba $\gamma(\theta) = f(a + Re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, i $d(K)$ és el diàmetre de K .

5. Sigui f holomorfa en un entorn del disc $\overline{D}(0, R)$. Proveu que val la fórmula integral

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, R)} \frac{R^2 - |z_0|^2}{(z - z_0)(R^2 - \overline{z_0}z)} f(z) dz, \quad |z_0| < R$$

i, com a conseqüència,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} u(Re^{i\varphi}) d\varphi,$$

$$0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

si u és harmònica en un entorn de $\overline{D}(0, R)$.

6. Sigui f una funció holomorfa en un domini U , que compleix l'equació

$$f^{(n+1)}(z) = \sum_{j=0}^n a_j f^{(j)}(z), \quad z \in U,$$

per a un $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ fixats. Proveu que f és la restricció a U d'una funció entera que és una combinació lineal finita de monomis exponencials de la forma $z^k e^{\lambda z}$, amb $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Proveu també que si a més existeix un punt $a \in U$ tal que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, llavors f és idènticament nul·la a U .

7. Sigui f una funció holomorfa a $D(0, R)$ i considerem per a $1 \leq p \leq \infty$ les mitjanes

$$M_p(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < r < R, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$M_\infty(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 < r < R. \quad \#$$

Proveu que $M_p(f, r)$ és una funció creixent de r per a $1 \leq p \leq \infty$.

Indicació: Apliqueu l'exercici 12 del capítol 3 a la funció $(|f(re^{i\theta})|^2 + \varepsilon^2)^{p/2}$.

Proveu també que les mitjanes $\left(\frac{1}{\pi r^2} \int_{D(0,r)} |f(z)|^p dm(z) \right)^{1/p}$ són funcions creixents de r per a $1 \leq p < \infty$.

8. Sigui f una funció holomorfa en un domini U i suposem que hi ha un disc $\overline{D}(a, r) \subset U$ i un número $p \geq 1$, de manera que

$$|f(a)|^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Proveu que f és constant a U . Arribeu a la mateixa conclusió suposant ara que

$$|f(a)|^p = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a,r)} |f(z)|^p dm(z).$$

Indicació: Reduïu-vos al cas $p = 2$ i utilitzeu l'exercici 12 del capítol 2.

9. Siguin $f_1, f_2, \dots, f_N$ funcions holomorfes en un domini U i $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Supposem que la funció $|f_1|^p + |f_2|^p + \dots + |f_N|^p$ té un màxim local en un punt de U . Proveu que $f_1, f_2, \dots, f_N$ són constants a U .

Indicació: Comproveu que cada f_i està en la situació descrita en l'exercici 8.

10. Si f és una funció entera tal que la funció $f(z)e^{-c|z|^\alpha}$, amb $c > 0$, $\alpha > 0$, està acotada en valor absolut per $M > 0$, trobeu la millor cota per a la funció $|f'(z)|e^{-c|z|^\alpha}$.
11. Sigui f una funció entera que satisfà l'estimació $|f(z)| = O(|z|^n)$, $|z| \rightarrow \infty$, per a algun $n \in \mathbb{N}$. Proveu que f és un polinomi de grau més petit o igual que n .
12. Sigui f holomorfa a $D(0, R)$ i per a $0 < r < R$ posem

$$A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z).$$

Proveu que $A(r)$ és una funció creixent de r i que si, a més, f compleix $f(0) = 0$, llavors hom té

$$\sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} A(R), \quad 0 < r < R.$$

13. Sigui f holomorfa i acotada a la banda $U = \{z = x + iy : a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, i suposem que $f \in C(\overline{U})$ i $|f(z)| \leq 1$ si $z \in \partial U$. Proveu que es compleix $|f(z)| \leq 1$ per a tot $z \in U$.
14. Sigui f una funció holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$, contínua al disc tancat $\overline{\mathbb{D}}$ que compleix $\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) = 0$ per a $z \in \mathbb{T}$. Proveu que f és idènticament nul·la a $\mathbb{D}$. Arribeu a la mateixa conclusió suposant ara que f compleix $\operatorname{Re} f(z)^2 - \operatorname{Im} f(z) = 0$, si $z \in \mathbb{T}$. Proveu, en canvi, que existeix una funció $f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap H(\mathbb{D})$, no nul·la, que satisfà $\operatorname{Re} f(z)^2 + \operatorname{Im} f(z)^2 = 1$, $z \in \mathbb{T}$.
15. Caracteritzeu els polinomis de dues variables $P(x, y)$ que tenen la propietat següent: tota funció $f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap H(\mathbb{D})$ que compleixi $P(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)) = 0$ per a $z \in \mathbb{T}$, ha de ser idènticament nul·la a $\mathbb{D}$.
- Indicació:* Considereu les components connexes del complementari a $\mathbb{C}$ del conjunt $\{(x, y) : P(x, y) = 0\}$.
16. Sigui f una funció holomorfa al disc $D(0, R)$ i contínua a $\overline{D}(0, R)$. Si f no és idènticament nul·la, proveu que es compleix

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |f(Re^{i\theta})| d\theta > -\infty.$$

17. Proveu que si f és holomorfa al domini U , llavors la funció $|f|^\alpha$, $\alpha > 0$, és subharmònica a U (vegeu l'exercici 13 del capítol 3). Proveu també que $|f|^\alpha$ és harmònica a U si i només si és constant a U .

- 18.** Sigui U un domini del pla i u una funció contínua i subharmònica a U . Proveu que si u agafa el seu valor màxim en algun punt de U , llavors u és constant a U .
- 19.** Sigui U un domini acotat del pla i u una funció contínua i subharmònica a U i suposem que existeix una constant $M \geq 0$ tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} \sup u(z) \leq M$ per a tot punt $z_0 \in \partial U$. Deduïu que $u(z) \leq M$ per a tot $z \in U$.
En particular, si $u \in C(\overline{U})$ és subharmònica a U , llavors $\max_{z \in \overline{U}} u(z) = \max_{z \in \partial U} u(z)$.
- 20.** Proveu que una funció entera f que compleix $|f(z)| \rightarrow \infty$ quan $|z| \rightarrow \infty$ és un polinomi.
- 21.** El nucli $K(z, w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}$, $z, w \in \mathbb{D}$ s'anomena *nucli de Bergman* del disc unitat. Si f és una funció integrable a $\mathbb{D}$ respecte de la mesura de Lebesgue, $f \in L^1(\mathbb{D}, dm)$, llavors està ben definida la transformada de Bergman de f :

$$Kf(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z, w) f(w) dm(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dm(w).$$

Proveu les afirmacions següents:

- a) Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dm) \cap H(\mathbb{D})$, llavors $Kf(z) = f(z)$ per a $z \in \mathbb{D}$.
- b) $L^2(\mathbb{D}, dm) \cap H(\mathbb{D})$ és un subespai tancat de l'espai de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, dm)$ i si $f \in L^2(\mathbb{D}, dm)$, llavors Kf és la projecció ortogonal de f sobre aquest subespai tancat.
- 22.** Proveu que existeix una constant $c > 0$ tal que si $f \in H(\mathbb{D})$ amb $f(0) = 0$ i posem $u = \operatorname{Re} f$, llavors hom té

$$\|f\|_2 \leq c \|u\|_2$$

on $\|\cdot\|_2$ és la norma a l'espai $L^2(\mathbb{D}, dm)$.

Singularitats aïllades de les funcions holomorfes. Teorema dels residus. Aplicacions

En aquest capítol es consideren funcions que són holomorfes en un domini tret de punts aïllats en els quals la funció no té derivada complexa ni, potser, tan sols és contínua. El fet que la funció sigui holomorfa al voltant de cadascun d'aquests punts singulars permet determinar amb precisió la naturalesa de les singularitats. Especialment remarcable és el resultat segons el qual es pot expressar la integral de línia d'una funció holomorfa al voltant d'una singularitat en termes d'un sol número associat a la singularitat, que és el residu de la funció. L'enunciat precís d'aquest fet és el teorema dels residus, que és una extensió del teorema de Cauchy.

Es donen aplicacions del teorema dels residus, entre les quals destaquen el principi de l'argument que permet comptar zeros i pols de funcions meromorfes, o el teorema de Rouché que compara el nombre de zeros de dues funcions holomorfes. També és notable la utilització del càlcul de residus per a l'avaluació d'integrals reals, pròpies o impròpies, sense passar pel càlcul de primitives.

5.1 Punts singulars aïllats

Recordem que $D(a, \varepsilon)$ o $D_\varepsilon(a)$ designa el disc obert de centre a i radi $\varepsilon > 0$. D'ara en endavant, $D'(a, \varepsilon)$ o $D'_\varepsilon(a)$ representarà el *disc puntejat* $D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Definició 5.1. *Direm que una funció f té una singularitat aïllada en el punt a de $\mathbb{C}$ si f és holomorfa a $D'_\varepsilon(a)$ per a algun $\varepsilon > 0$. En el cas que f es pugui estendre a una funció holomorfa a tot el disc $D_\varepsilon(a)$ direm que la singularitat és evitable.*

Les singularitats evitables són les singularitats “falses”, és a dir, que en realitat no ho són. Es tracta d'un abús de llenguatge que és útil per a la presentació del concepte de singularitat.

Suposem que f_1, f_2 són funcions holomorfes en un disc $D_R(a)$, $R > 0$ i que f_2 no és idènticament nul·la. Si $f_2(a) \neq 0$, llavors $f = f_1/f_2$ és holomorfa en un disc $D_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$. Si $f_2(a) = 0$, sabem, pel teorema 4.22, que a és un zero aïllat de f_2 ; en conseqüència, hi ha un $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < R$ tal que a és l'únic zero de f_2 a $D_\varepsilon(a)$ i per tant, $f = f_1/f_2$ està definida i és holomorfa a $D'_\varepsilon(a)$. Som en la situació de la definició 5.1: a és una singularitat aïllada de f , que pot ser evitable o no. Considerem la multiplicitat, n , de a com a zero de f_2 : $f_2(z) = (z - a)^n g_2(z)$, on $g_2(z) \in H(D_\varepsilon(a))$ i $g_2(z) \neq 0$ per a tot $z \in D_\varepsilon(a)$. Si $\alpha = g_2(a)$, això significa que $f_2(z) \sim \alpha(z - a)^n$ quan $z \rightarrow a$. Els dos casos següents són possibles.

- a) Si $f_1(a) \neq 0$, llavors $f(z) \sim f_1(a)\alpha^{-1}(z - a)^{-n}$ i veiem que a és una singularitat no evitable perquè no existeix $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ i f no es pot estendre a una funció holomorfa, ni tan sols a una funció contínua en el punt a .
- b) Si $f_1(a) = 0$, llavors a té una multiplicitat $m \geq 1$ com a zero de f_1 i podem escriure $f_1(z) = (z - a)^m g_1(z)$ amb $g_1(z) \in H(D_\varepsilon(a))$, $\beta = g_1(a) \neq 0$. Llavors $f(z) = (z - a)^{m-n} g_1(z)/g_2(z)$ a $D'_\varepsilon(a)$. Com que $g_2(z) \neq 0$, per a tot $z \in D_\varepsilon(a)$, resulta que si $m \geq n$, a és una singularitat evitable; l'expressió $(z - a)^{m-n} g_1(z)/g_2(z)$ té sentit i defineix una funció holomorfa a tot el disc $D_\varepsilon(a)$. Si $m < n$, la mateixa expressió ens prova que $f(z) \sim \beta\alpha^{-1}(z - a)^{m-n}$ no té límit finit en a ; en aquest cas a és una singularitat de debò altre cop.

Definició 5.2. *Si f és holomorfa en un disc puntejat $D'_\varepsilon(a)$ i existeixen $\alpha \in \mathbb{C}$ i $k \geq 1$ enter, tals que $f(z) \sim \alpha(z - a)^{-k}$ quan $z \rightarrow a$, direm que f té un pol d'ordre k en el punt a . El número k s'anomena multiplicitat del pol (o també ordre del pol).*

Evidentment, els pols són singularitats no evitables i, de fet, és $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ si f té un pol en el punt a . La discussió anterior prova que si f_1, f_2 són funcions holomorfes en un domini de $\mathbb{C}$ i f_2 no és idènticament nul·la, llavors $f = f_1/f_2$ té singularitats evitables en els zeros de f_2 que també

són zeros de f_1 amb multiplicitat més gran o igual que la corresponent a f_2 i té pols en els zeros de f_2 que no són zeros de f_1 o que, essent zeros de f_1 , tenen multiplicitat menor respecte de f_1 que respecte de f_2 .

Definició 5.3. Direm que una funció f és meromorfa en un domini U si existeix un conjunt $A \subset U$, discret i tancat a U , de manera que f està definida i és holomorfa a $U \setminus A$ i té un pol en cada punt $a \in A$.

Així, del que acabem de dir resulta que si f_1, f_2 són funcions holomorfes al domini U i f_2 no és idènticament nul·la, llavors la funció $f = f_1/f_2$ és meromorfa a U , prenent com a A el conjunt

$$A = \{a \in U : \text{multiplicitat de } a \text{ com a zero de } f_1 < \\ < \text{multiplicitat de } a \text{ com a zero de } f_2\} \subset \mathcal{Z}(f_2).$$

Per exemple, la funció $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ és una funció meromorfa a tot el pla; els seus pols són els zeros de la funció $\cos z$, és a dir, els punts $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (cap d'aquests és un zero de $\sin z$) i tots tenen multiplicitat 1.

Les funcions racionals $R = \frac{P}{Q}$ amb P, Q polinomis, són funcions meromorfes a tot el pla complex.

Exemple 5.4. Considerem $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Aquesta funció té una singularitat a l'origen. No és evitable perquè $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ no existeix; per exemple $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{ik\pi}\right) = e^{ik\pi} = (-1)^k$. Això mateix serveix per a veure que f tampoc no té un pol a l'origen. $\square$

Aquest exemple fa veure que hi ha singularitats aïllades que no són evitables ni són pols. Se'n diuen *singularitats essencials*. D'una banda tenim, doncs, les singularitats “falses”, les evitables, i d'una altra banda, les singularitats autèntiques, que poden ser *essencials* o bé *pols*. En el teorema següent es caracteritza el tipus de singularitat d'una funció f en un punt $a \in \mathbb{C}$ en termes del comportament de $f(z)$ quan $z \rightarrow a$.

Teorema 5.5. Suposem que la funció f és holomorfa a $D'_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$. Llavors

- El punt a és una singularitat evitable de f si i només si f és acotada a $D'_\delta(a)$ per a algun $\delta > 0$.
- El punt a és un pol de f si i només si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, és a dir, per a tot $M > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > M$ si $0 < |z - a| < \delta$ (equivalentment, $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$).
- El punt a és una singularitat essencial de f en tots els altres casos, és a dir, si i només si $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ no existeix a $\mathbb{C}^*$.

Demostració. Provem primer l'apartat a): si f és holomorfa a $D_\varepsilon(a)$, llavors f és contínua a $\overline{D_\delta(a)}$ per a tot $\delta < \varepsilon$ i, per tant, acotada a $D_\delta(a)$. Recíprocament, suposem $|f(z)| \leq M$ si $0 < |z - a| < \delta < \varepsilon$. Considerem la funció $g(z) = (z - a)^2 f(z)$; g també és holomorfa a $D'_\delta(a)$ i $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$; per tant, si definim $g(a) = 0$, tenim que g és contínua a $D_\delta(a)$. A més,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0.$$

Així, $g \in H(D_\delta(a))$, amb $g(a) = g'(a) = 0$. Per tant, per (4.12), $g(z) = (z - a)^m g_1(z)$ amb $m \geq 2$, $g_1 \in H(D_\delta(a))$; aleshores a $0 < |z - a| < \delta$, $f(z)$ coincideix amb $(z - a)^{m-2} g_1(z)$, que és holomorfa a tot el disc $D_\delta(a)$ (perquè $m \geq 2$) i a és evitable.

Seguidament provarem l'apartat b). Ja hem fet notar que si f té un pol en el punt a , llavors $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Recíprocament, si suposem que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, llavors $g = 1/f$ és holomorfa en algun disc centrat en a i té límit zero en a ; per l'apartat a) g té una singularitat evitable en a amb $g(a) = 0$. Si $m \geq 1$ és la multiplicitat de a com a zero de g , llavors és $g(z) = (z - a)^m g_1(z)$ amb $\alpha = g_1(a) \neq 0$; per tant, $f(z) \sim \alpha^{-1}(z - a)^{-m}$ i f té un pol d'ordre m en el punt a . $\square$

Per definició, f té un pol d'ordre k en el punt a quan $f(z)(z - a)^k$ té un límit finit en a i no nul. Pel teorema anterior, això és equivalent al fet que $f(z)(z - a)^k$ tingui una singularitat evitable en a , és a dir, que $f(z)(z - a)^k$ sigui de fet una funció $g \in H(D_\varepsilon(a))$, amb $g(a) \neq 0$. Així, f té un pol d'ordre k en el punt a si i només si es pot posar

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^k}$$

amb g holomorfa en un entorn de a i $g(a) \neq 0$.

En un punt singular essencial $a \in \mathbb{C}$, quan $z \rightarrow a$, $f(z)$ no s'acosta a cap valor de $\mathbb{C}^*$ finit o no. El teorema següent encara ho precisa més dient que el comportament de $f(z)$ quan $z \rightarrow a$ és caòtic.

Teorema 5.6 (Casorati-Weierstrass). Si $f \in H(D'_\varepsilon(a))$ i té en el punt a una singularitat essencial, llavors el conjunt $f(D'_\delta(a))$ és dens a $\mathbb{C}$ per a tot δ , $0 < \delta < \varepsilon$.

Demostració. Si per a algun $\delta < \varepsilon$ l'obert $f(D'_\delta(a))$ no fos dens, podríem trobar $w \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ tals que $|f(z) - w| \geq r$ si $0 < |z - a| < \delta$. Això significa que la funció $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ és acotada i, per la part a) del teorema 5.5, seria

$g \in H(D_\delta(a))$, amb la qual cosa $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ tindria un pol en a i no pas una singularitat essencial. $\square$

Exemple 5.7. Analitzem $f(D'_\delta(0))$ quan $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Si $w = \frac{1}{z}$ i $0 < |z| < \delta$, llavors $|w| > \delta^{-1}$. La imatge per $w \mapsto e^w$ de $|w| > \delta^{-1}$ és, de fet, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (la imatge de qualsevol banda horitzontal d'amplada 2π és $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). $\square$

El comportament d'una funció al voltant d'un pol és ben diferent del comportament al voltant d'una singularitat essencial, que descriu el teorema 5.6. En efecte, sabem que si el punt $a \in \mathbb{C}$ és un pol de f , llavors $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, però de fet es pot assegurar que si $f \in H(D'_\varepsilon(a))$ i a és un pol de f , aleshores, per a tot $0 < \delta < \varepsilon$, la imatge $f(D'_\delta(a))$ és un entorn del punt de l'infinit. En efecte, com que el punt a no pot ser d'acumulació de zeros de f , podem suposar $f(z) \neq 0$ si $z \in D'_\delta(a)$. Ara la funció $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ és holomorfa a $D_\delta(a)$ amb $g(a) = 0$ i, pel teorema de l'aplicació oberta, $g(D_\delta(a))$ conté un entorn de 0 i, per tant, $f(D_\delta(a))$ conté un entorn de ∞ .

A més a més, si a és un pol de f d'ordre $m \geq 1$, el punt a és un zero d'ordre m de la funció $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, perquè hom té $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$ amb $h(z) \neq 0$ si $|z-a|$ és petit i, per tant, $g(z) = (z-a)^m \frac{1}{h(z)}$, amb $\frac{1}{h}$ holomorfa i sense zeros. Si ara apliquem el teorema 4.32, sabem que g és $m+1$ entre un entorn de a i un entorn de 0, és a dir, existeixen un entorn V de 0 i un $\eta > 0$ de manera que per a tot $w \in V$, $w \neq 0$, hi ha m punts diferents $z_1, \dots, z_m \in D'_\eta(a)$ que compleixen $g(z_i) = w$. Si això ho traduïm en termes de f , vol dir que, si a és un pol d'ordre m de f , existeixen un entorn V de ∞ i $\eta > 0$ de manera que tot punt $w \in V$, $w \neq \infty$, té m antiimatges diferents a $D'_\eta(a)$.

Resulta novament interessant comparar el comportament d'una funció holomorfa al voltant d'una singularitat aïllada amb la situació anàloga per a funcions de variable real. Si $I_\varepsilon(a)$ designa l'interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ i $I'_\varepsilon(a) = I_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, hi ha una infinitat de comportaments asimptòtics diferents de $f(x)$ quan $x \rightarrow a$ entre les funcions f que són derivables o de classe C^∞ a $I'_\varepsilon(a)$. Per exemple,

$$f(x) = |x|^\alpha |\operatorname{Log} |x||^\beta |\operatorname{Log} |\operatorname{Log} |x|||^\gamma$$

amb $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ qualssevol són exemples de funcions C^∞ en un entorn reduït de 0, $I'_\varepsilon(0)$, i el comportament és diferent per a cada tria dels paràmetres α, β, γ . En variable complexa, en canvi, només hi ha dos tipus de comportament de f , holomorfa al voltant d'una singularitat no evitable a : o bé $|f(z)| \sim \rho|z-a|^{-k}$, per a $\rho > 0$ i $k \geq 1$ enter, o bé no existeix $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$ a $[0, +\infty]$. Per exemple, no podem trobar cap funció f , holomorfa a $D'_\varepsilon(0)$, que compleixi

$$|f(z)| \sim |z|^\alpha |\operatorname{Log} |z||^\beta \quad \text{quan } |z| \rightarrow 0,$$

si $\beta \neq 0$. La funció $f(z) = \frac{\text{Log } z}{z}$ compleix

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{|\text{Log } z|}{|z|} = \frac{|\text{Log } |z| + i \text{Arg } z|}{|z|} = \\ &= \frac{\sqrt{(\text{Log } |z|)^2 + (\text{Arg } z)^2}}{|z|} \sim \frac{|\text{Log } |z||}{|z|} \end{aligned}$$

quan $z \rightarrow 0$, però no està definida a cap disc puntejat centrat a l'origen.

5.2 Desenvolupament en sèrie de Laurent

De la mateixa manera que en el teorema 4.8 s'ha vist que tota funció holomorfa en un disc hi té un desenvolupament en sèrie de potències, ara veurem que tota funció holomorfa en un disc puntejat $D'(a, R)$ té un desenvolupament semblant, si admetem potències de $z - a$ d'exponent negatiu.

Definició 5.8. Una sèrie de Laurent centrada en $a \in \mathbb{C}$ és una sèrie formal del tipus

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Donar una sèrie de Laurent no és res més que donar una sèrie de potències en $z-a$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, i una altra sèrie, $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$, que podem interpretar com una sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(w-a)^n$ en $w-a = (z-a)^{-1}$ si $d_n = c_{-n}$. Si ρ_1 és el radi de convergència de la primera sèrie,

$$\rho_1 = (\limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

i ρ_2 el de la segona

$$\rho_2 = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} |d_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} = \left(\limsup_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{-\frac{1}{n}} \right)^{-1},$$

llavors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ defineix una funció holomorfa $f_1(z)$ a $\{z: |z-a| < \rho_1\}$ i $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ defineix una funció holomorfa $f_2(z)$ a $\{z: |z-a|^{-1} = |w-a| < \rho_2\} = \{z: |z-a| > \rho_2^{-1}\}$.

A partir d'ara, posarem $R_1 = \rho_1$, $R_2 = \rho_2^{-1}$ i suposarem $R_2 < R_1$. Aleshores la sèrie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ defineix una funció $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ holomorfa a la corona $C(a, R_2, R_1) = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z-a| < R_1\}$. És clar que la convergència de $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ és absoluta en qualsevol punt d'aquesta corona i uniforme en cada subcorona compacta $\overline{C}(a, r_2, r_1)$ amb $R_2 < r_2 < r_1 < R_1$. També, aplicant el teorema 2.31, resulta

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad R_2 < |z-a| < R_1.$$

Definició 5.9. Direm que una funció f , holomorfa en una corona $C(a, R_2, R_1)$, és desenvolupable en sèrie de Laurent si es pot expressar com la suma d'una sèrie de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (5.1)$$

convergent a la corona $C(a, R_2, R_1)$.

En aquest cas, el desenvolupament en sèrie de Laurent és únic perquè els coeficients c_n estan determinats per f . Per tal de veure-ho prenem r entre R_2 i R_1 i sigui γ la circumferència de centre a i radi r orientada positivament, $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Utilitzant que la convergència de la sèrie de Laurent és uniforme a $\gamma^* = C(a, r)$, trobem, per (5.1),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} c_k \int_{\gamma} (z-a)^{k-n-1} dz = c_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.2)$$

perquè $(z-a)^{k-n-1}$ té una primitiva holomorfa quan $k-n-1 \neq -1$.

En termes de la parametrització de γ , la igualtat (5.2) és

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) r^{-n} e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad R_2 < r < R_1.$$

Aquesta expressió dels coeficients c_n també es pot interpretar de la manera següent: $c_n r^n$ és el coeficient n -èsim de Fourier, el que correspon a e^{int} , en el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció 2π -periòdica $t \mapsto f(a + re^{it})$, que per (5.1), és

$$f(a + re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^n e^{int}.$$

El teorema següent és el que correspon al teorema 4.8.

Teorema 5.10. *Tota funció holomorfa en una corona s'hi pot desenvolupar en sèrie de Laurent.*

Demostració. Sigui $f \in H(C(a, R_2, R_1))$ i fixat un punt $z \in C(a, R_2, R_1)$, triem r_2, r_1 tals que $R_2 < r_2 < |z - a| < r_1 < R_1$ i posem $\gamma_1(t) = a + r_1 e^{it}$, $\gamma_2(t) = a + r_2 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Considerem el domini $\{z: r_2 < |z - a| < r_1\}$ amb la seva frontera orientada positivament. Recordem (secció 1.6) que això correspon a recórrer la circumferència exterior γ_1 de manera que tingui índex 1 respecte de cada punt del seu interior i que la circumferència γ_2 s'ha de recórrer amb índex -1 per als seus punts interiors. Així, la fórmula integral de Cauchy dóna

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

En la primera integral, posem $w - z = (w - a) - (z - a)$; com que $|z - a| < r_1 = |w - a|$, podem escriure

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \frac{1}{(w - a) \left(1 - \frac{z - a}{w - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}}.$$

El desenvolupament és uniformement convergent a γ_1^* i també ho serà en multiplicar-lo per $f(w)$. En la segona integral, en canvi, és $|z - a| > r_2 = |w - a|$ i escrivim

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \frac{1}{(z - a) \left(\frac{w - a}{z - a} - 1\right)} = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - a)^n}{(z - a)^{n+1}} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Integrant terme a terme aquests desenvolupaments trobem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n,$$

on els coeficients c_n són donats per

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} f(w) (w - a)^{-n-1} dw$$

amb $r = r_1$ si $n \geq 0$ i $r = r_2$ si $n < 0$. Tot i que, aparentment, aquests coeficients c_n depenen de r_1 i r_2 , la unicitat del desenvolupament de f en sèrie de Laurent fa veure que, de fet, només depenen de f . $\square$

Exemple 5.11. Suposem que g és holomorfa a $D(a, R)$ i $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$. Llavors f és holomorfa al disc puntejat $D'(a, R)$. Un disc puntejat és un cas particular de corona (quan el radi petit és zero) i el desenvolupament de Laurent de f a $D'(a, R)$ s'obté dividint per $(z-a)^k$ el desenvolupament en sèrie de potències de g ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{+\infty} \frac{g^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^n.$$

Per exemple, el desenvolupament de $f(z) = \frac{e^z}{(z-a)^k}$ a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ és

$$f(z) = e^a \frac{e^{z-a}}{(z-a)^k} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^{n-k}}{n!}. \quad \square$$

Exemple 5.12. Busquem el desenvolupament en sèrie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a totes les corones rellevants: $D'(0, 1)$, $C(0, 1, \infty)$, $D'(1, 1)$ i $C(1, 1, \infty)$. Per al cas de $D'(0, 1)$ dividim per z el desenvolupament de Taylor de $(z-1)^{-1}$ al voltant del punt 0:

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \sum_0^{\infty} z^n = -\sum_0^{\infty} z^{n-1}$$

i, anàlogament, a $D'(1, 1)$ dividim per $(z-1)$ el desenvolupament de Taylor de z^{-1} al voltant del punt 1:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z-1} \sum_0^{\infty} (1-z)^n = -\sum_{-1}^{\infty} (1-z)^n.$$

A $C(0, 1, \infty)$:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2 \left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{-\infty}^{-2} z^n.$$

A $C(1, 1, \infty)$:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2 \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-2} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n (z-1)^n. \quad \square$$

Fixem-nos que en el teorema 5.10 hem demostrat també que si f és holomorfa en una corona $C(a, R_2, R_1)$, aleshores f és la suma d'una funció f_1 holomorfa al disc $D(a, R_1)$ ($f_1(z) = \sum_0^{\infty} c_n(z-a)^n$) i d'una funció f_2 holomorfa a l'exterior del disc $D(a, R_2)$ ($f_2(z) = \sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$).

Totes aquestes consideracions s'apliquen en particular si f té una singularitat aïllada en el punt a , és a dir, $f \in H(D'_\varepsilon(a))$ ($D'_\varepsilon(a)$ és la corona $C(a, 0, \varepsilon)$). En aquest cas, f té un desenvolupament únic en sèrie de Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

on

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

és independent de r , $0 < r < \varepsilon$.

Evidentment, la singularitat és evitable quan $c_n = 0$, per a tot $n < 0$. D'altra banda, hem vist, després del teorema 5.5, que f té un pol d'ordre k en a si i només si es pot escriure com $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ amb g holomorfa i $g(a) \neq 0$. Això significa exactament que el desenvolupament de Laurent té un nombre finit de termes amb exponents negatius i comença amb $g(a)(z-a)^{-k}$:

$$f(z) = g(a)(z-a)^{-k} + g'(a)(z-a)^{1-k} + \dots$$

En conseqüència, la singularitat és essencial si i només si hi ha infinits $c_n \neq 0$ amb $n < 0$.

La part $f_1(z) = \sum_0^{\infty} c_n(z-a)^n$ s'anomena *part regular* de f en a . La part $f_2(z) = \sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ s'anomena *part principal* de f en a . Quan a és un pol de multiplicitat k , la part principal és un polinomi en $(z-a)^{-1}$ de grau k .

Com a aplicació del desenvolupament en sèrie de Laurent obtindrem ara la descomposició d'una funció racional en suma de fraccions simples i d'un polinomi. Per fracció simple entenem una funció racional del tipus

$$\frac{c}{(z-a)^k}, \quad a, c \in \mathbb{C} \text{ i } k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.13. *Sigui $R = \frac{P}{Q}$ una funció racional, on suposem que P i Q són polinomis sense zeros comuns. Llavors R té una expressió única com a suma de fraccions simples més un polinomi.*

Demostració. Primer, si el grau del polinomi P és més gran que el de Q , dividim P per Q , $P = QC + P_1$, de manera que

$$R = \frac{P}{Q} = C + \frac{P_1}{Q},$$

on C és un polinomi i ara grau $P_1 < \text{grau } Q$; descomponem, doncs, $R_1 = \frac{P_1}{Q}$ en suma de fraccions simples.

Si $a_1, \dots, a_k$ són els pols de R , que són els mateixos que els de R_1 i coincideixen amb els zeros de Q , siguin $P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \dots, P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ les parts principals dels desenvolupaments de Laurent de R_1 al voltant d'aquests punts, on $P_1, \dots, P_k$ són determinats polinomis. La funció

$$f(z) = R_1(z) - \sum_{j=1}^k P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$$

és una funció entera, és a dir, holomorfa a tot $\mathbb{C}$: si z no és cap dels punts $a_1, \dots, a_k$, f és derivable en z perquè ho són $R_1(z)$ i tots els termes $P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$; si z és un dels punts a_j , f també és derivable en z perquè les funcions $P_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ amb $i \neq j$ ho són i

$$R_1(z) - P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$$

és la part regular de R_1 en a_j i, per tant, és holomorfa. Ara bé, és clar que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, i això implica $f \equiv 0$, pel teorema de Liouville. La conclusió és, doncs,

$$R(z) = C(z) + \sum_{j=0}^k P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right). \quad \square$$

Exemple 5.14. Busquem la descomposició de $R(z) = \frac{z^4}{(z-i)^2(z+i)}$ en fraccions simples. En la demostració del teorema 5.13 ha quedat clar que R i R_1 tenen les mateixes parts principals en els seus pols; per tant, podem treballar directament amb R . En el pol i , per tal de trobar la part principal, hem de calcular els dos primers termes del desenvolupament de Taylor de $h(z) = \frac{z^4}{z+i}$, que són

$$h(i) + h'(i)(z-i) = \frac{1}{2i} + \left(-\frac{7}{4}\right)(z-i).$$

La part principal és, doncs, $\frac{1}{2i}(z-i)^{-2} - \frac{7}{4}(z-i)^{-1}$. En el pol $-i$, d'ordre 1, tan sols hem d'avaluar $\frac{z^4}{(z-i)^2}$ en $-i$ i obtenim la part principal $-\frac{1}{4(z+i)}$. Així,

$$R(z) = C(z) + \frac{1}{2i} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{7}{4} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{4(z+i)}.$$

El polinomi C té grau ≤ 1 perquè, si $R = \frac{P}{Q}$, és $\text{grau}(C) \leq \text{grau}(P) - \text{grau}(Q)$. Per a determinar C , posem $C(z) = az + b$, dividim per z i fem $|z| \rightarrow +\infty$: obtenim

$$a = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{R(z)}{z} = 1.$$

Per a determinar b , fem $z = 0$ i obtenim $b = i$. □

5.3 Residu d'una funció en una singularitat aïllada

5.3.1 El teorema dels residus

Suposem que la funció f té una singularitat aïllada en un punt $a \in \mathbb{C}$, és a dir, $f \in H(D'_\varepsilon(a))$. D'acord amb el teorema 5.10, podem escriure

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < \varepsilon$$

amb

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad 0 < r < \varepsilon.$$

Aquí ens interessa destacar el coeficient c_n amb $n = -1$,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(z) dz \tag{5.3}$$

pel motiu següent: f té una primitiva holomorfa F a $D'_\varepsilon(a)$ si i només si $c_{-1} = 0$. En efecte, si $f = F'$, ja sabem que la integral de línia de f al llarg de qualsevol camí tancat és 0. Recíprocament, si $c_{-1} = 0$, llavors no hi ha terme en $(z-a)^{-1}$ en el desenvolupament de f i tots els altres termes tenen funció primitiva, la qual per al terme n -èsim és $\frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$, i la funció

$$F(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

és una primitiva de f (és immediat veure que la sèrie de Laurent anterior té el mateix domini de convergència que la que correspon a f).

Definició 5.15. Si $f \in H(D'_\varepsilon(a))$ el coeficient c_{-1} del desenvolupament de Laurent de f al voltant del punt a , donat per (5.3), s'anomena residu de f en a i es designa per $\text{Res}(f, a)$.

El residu constitueix, doncs, l'impediment per tal que f tingui primitiva holomorfa en un disc puntejat $D'_\varepsilon(a)$, ja que aquesta existeix si i només si $c_{-1} = 0$.

Exemple 5.16. Sigui f holomorfa al disc puntejat $D'_\varepsilon(a)$ i sigui γ un camí tancat contingut a $D'_\varepsilon(a)$ que no passi pel punt a . Llavors hom té

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}(\gamma, a) \cdot \text{Res}(f, a).$$

En efecte, només cal integrar al llarg de γ el desenvolupament de Laurent de f al voltant de a i aplicar la definició de residu i (3.4). $\square$

El resultat següent és una generalització del teorema de Cauchy per a funcions amb singularitats aïllades.

Teorema 5.17 (Teorema dels residus). Sigui U un domini acotat del pla amb vora regular a trossos orientada positivament. Sigui V un obert amb $\overline{U} \subset V$, i $A \subset V$ un subconjunt tancat de V format per punts aïllats (els punts d'acumulació de A , si n'hi ha, han d'estar a ∂V) tal que $A \cap \partial U = \emptyset$, i sigui f una funció holomorfa a l'obert $V \setminus A$. Llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f(z) dz = \sum_{a \in A \cap U} \text{Res}(f, a). \quad (5.4)$$

Observació 5.1. Les hipòtesis signifiquen que cada punt de A és una singularitat aïllada de f .

Els dos membres de (5.4) tenen sentit. El de l'esquerra perquè f és contínua sobre ∂U , i el de la dreta perquè en el compacte $\overline{U}$ només hi ha un nombre finit de punts de A i no n'hi cap a ∂U .

Demostració. Recordem que la frontera de U està formada per corbes tancades de Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ amb γ_1 orientada positivament i $\gamma_2, \dots, \gamma_N$ orientades negativament. Siguin $a_1, \dots, a_k$ els punts de $A \cap U$ i al voltant de cada a_i considerem una petita circumferència $C_i = C(a_i, \varepsilon)$ que no talli ∂U i treiem de U els discos $\overline{D}_i = \overline{D}(a_i, \varepsilon)$ (fig. 5.1). El domini $\tilde{U} = U \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{D}_i$ té la seva frontera

regular a trossos i, orientada positivament, està formada per $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ i, a més, per les circumferències C_i , $i = 1, \dots, k$ orientades negativament, perquè $C_1, \dots, C_k$ són a l'interior de γ_1 (vegeu la secció 1.6). Ara la funció f és holomorfa en un entorn de $\tilde{U}$ i el teorema de Cauchy (teorema 3.24) dóna:

$$\int_{\partial \tilde{U}} f(z) dz = 0,$$

és a dir:

$$\int_{\partial U} f(z) dz + \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f(z) dz = 0. \quad (5.5)$$

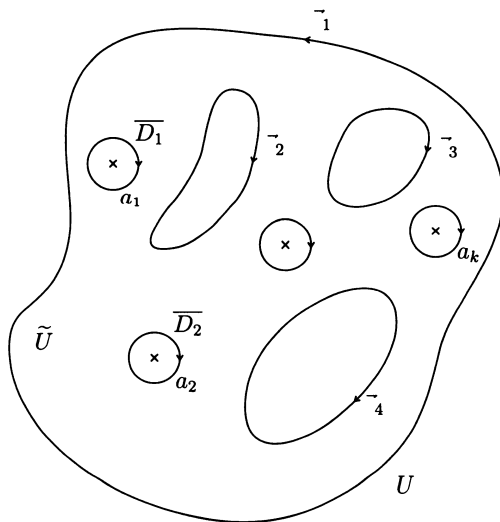


Figura 5.1

Si tenim en compte (5.3) i que C_i està recorreguda en sentit invers, resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} f(z) dz = -\text{Res}(f, a_i),$$

que, juntament amb (5.5), dóna (5.4). □

El teorema de Cauchy és el cas $A = \emptyset$ del teorema dels residus, i la fórmula integral de Cauchy també n'és un cas particular. En efecte, només cal prendre

$A = \{z\}$, si $z \in U$, i $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ si f és holomorfa en un entorn de $\overline{U}$. Llavors $\text{Res}(g, z) = f(z)$ i resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z).$$

5.3.2 Càlcul de residus

El teorema dels residus té moltes aplicacions, però és clar que aquestes dependran de la possibilitat de calcular el residu d'una funció en un punt singular. Veiem com es pot fer aquest càlcul en alguns casos particulars.

Suposem primer que f té un pol simple en el punt a i, per tant,

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots, \quad 0 < |z-a| < \varepsilon.$$

Aleshores és evident que

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

En moltes ocasions tindrem $f = \frac{g}{h}$, amb g, h holomorfes en un entorn de a i $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Llavors hom té

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Per exemple, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ té per residu, en el punt $a = i$,

$$\text{Res}(f, i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ie}.$$

Suposem ara que a és un pol de multiplicitat $k > 1$ de la funció f , és a dir,

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + \cdots, \quad 0 < |z-a| < \varepsilon.$$

Llavors, $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$ és el coeficient de $(z-a)^{k-1}$ de la funció $f_1(z) = (z-a)^k f(z)$ i, per tant,

$$c_{-1} = \frac{f_1^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

Exemple 5.18. La funció $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ té un pol doble en $a = i$. Aquí

$$f_1(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

i s'obté

$$\text{Res}(f, i) = f'_1(i) = -\frac{3}{4e}. \quad \square$$

Exemple 5.19 (Residu de la derivada logarítmica). Sigui f una funció meromorfa en un entorn d'un punt $a \in \mathbb{C}$. La funció f'/f , que també és meromorfa, s'anomena *derivada logarítmica* de f i volem calcular el seu residu en el punt a . Hom té, per a un cert enter m ,

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad 0 < |z-a| < \varepsilon$$

amb g holomorfa i $g(a) \neq 0$. Si $m > 0$, f és holomorfa a $D'(a, \varepsilon)$ i té un zero d'ordre m en el punt a . Si $m < 0$, f té un pol d'ordre m en a . Calculant, resulta

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

igualtat que prova que, si $m \neq 0$, f'/f té un pol *simple* en el punt a i $\text{Res}(f'/f, a) = m$. $\square$

Quan la singularitat és essencial, no hi ha una regla senzilla i universal per a calcular el residu i cada cas ha de ser tractat particularment. Per exemple, si f és de la forma $f(z) = g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ on g és una funció entera amb desenvolupament

$$g(w) = d_0 + d_1 w + \cdots + d_n w^n + \cdots = \sum_0^\infty d_n w^n$$

i g no és un polinomi, és clar que f té una singularitat essencial en a i que el seu residu és

$$\text{Res}(f, a) = g'(0) = d_1.$$

Així tenim, $\text{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$, $\text{Res}(\cos \frac{1}{z}, 0) = 0$.

D'altra banda, és evident que el residu d'una funció en una singularitat evitable és zero.

Una situació que es dona sovint és la següent: si a és un pol d'ordre 1 de f i g és holomorfa en un entorn de a , llavors fg té un pol d'ordre 1 en a i $\text{Res}(fg, a) = g(a) \text{Res}(f, a)$. En efecte: si $\alpha = \text{Res}(f, a)$, és $f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + f_1(z)$ amb f_1 holomorfa i, com que $g(z) = g(a) + (z-a)g_1(z)$ amb g_1 holomorfa, resulta $f(z)g(z) = \frac{\alpha g(a)}{z-a} + \alpha g_1(z) + f_1(z)g(z)$ i, per tant, $\text{Res}(fg, a) = \alpha g(a) = \text{Res}(f, a)g(a)$.

5.4 Funcions harmòniques en una corona

En la secció 5.2 hem vist que si f és una funció holomorfa a la corona $C(0, R_2, R_1)$, llavors f és la suma d'una sèrie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad R_2 < |z| < R_1.$$

Què podem dir en el cas que partim d'una funció u que és harmònica en aquesta corona? Si la funció u (que suposem real) fos la part real d'una funció holomorfa, és a dir, tingués una funció harmònica conjugada a $C(0, R_2, R_1)$, llavors seria, clarament,

$$u(z) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad R_2 < |z| < R_1$$

per a determinats coeficients c_n . Però, tal com sabem, aquesta no és la situació general. Per tal de veure com podem desenvolupar u , mirem quin és l'impediment a l'existència de la funció harmònica conjugada de u . Si considerem la funció f definida per

$$f(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

que és holomorfa a $C(0, R_2, R_1)$, l'existència d'una funció harmònica conjugada de u és el mateix que l'existència d'una primitiva de la funció f . Ara ja sabem que l'impediment a aquest problema és el fet que $\operatorname{Res}(f, 0) \neq 0$. Posem, doncs,

$$\alpha = \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, r)} f(z) dz, \quad R_2 < r < R_1$$

i considerem la funció $g(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\alpha}{z}$, que és holomorfa a la corona i compleix

$$\operatorname{Res}(g, 0) = \operatorname{Res}(f, 0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, r)} \frac{\alpha}{z} dz = 0$$

i té, per tant, una primitiva holomorfa a $C(0, R_2, R_1)$. És natural pensar, ara, com hem de modificar la funció harmònica u per tal de passar a g en lloc de f quan prenguem $\frac{\partial}{\partial z}$. Només cal considerar la funció harmònica

$$v(z) = u(z) - \frac{\alpha}{2\pi i} \operatorname{Log} |z|, \quad R_2 < |z| < R_1$$

per arribar a

$$2 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \frac{\alpha}{z} = g(z).$$

Pel que hem dit, v té una funció harmònica conjugada a la corona; és a dir, hi ha una sèrie de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} d_n z^n$ convergent a $C(0, R_2, R_1)$ de manera que

$$v(z) = \operatorname{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} d_n z^n.$$

En resum, hem provat el resultat següent:

Teorema 5.20. *Si u és una funció harmònica real a la corona $C(0, R_2, R_1)$, hi ha una sèrie de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} d_n z^n$, convergent a la corona, i una constant real α tals que*

$$u(z) = \operatorname{Re} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} d_n z^n \right) + \alpha \operatorname{Log} |z|, \quad R_2 < |z| < R_1 \quad (5.6)$$

amb

$$\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{C(0, r)} \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad \text{per a qualsevol } r: \quad R_2 < r < R_1.$$

Com a conseqüència, tenim un anàleg de l'afirmació a) del teorema 5.5 per a funcions harmòniques.

Corol·lari 5.21. *Segui u una funció harmònica al disc puntejat $D'(0, \varepsilon)$.*

a) *Si $\lim_{z \rightarrow 0} zu(z) = 0$, llavors existeix una funció u_1 harmònica al disc $D(0, \varepsilon)$ i una constant α tals que*

$$u(z) = u_1(z) + \alpha \operatorname{Log} |z|, \quad 0 < |z| < \varepsilon. \quad (5.7)$$

b) *Si u està acotada a $D'(0, \varepsilon)$, llavors l'origen és una singularitat evitable de u , en el sentit que u es pot estendre a una funció harmònica al disc $D(0, \varepsilon)$.*

Demostració. a) La igualtat (5.6) i la hipòtesi de a) impliquen que u és de la forma

$$u(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} + \alpha \operatorname{Log} |z|, \quad 0 < |z| < r \quad \text{si } z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq r < \varepsilon$$

i només cal prendre $u_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$.

b) Si u està acotada, es compleixen les hipòtesis de a) i, per tant, val la igualtat (5.7) que ara només es pot complir si $\alpha = 0$. $\square$

5.5 Funcions holomorfes i funcions singulars a l'infinit

5.5.1 Comportament en el punt de l'infinit

En el context del teorema dels residus és convenient de considerar el comportament d'una funció $f(z)$ en el punt de l'infinit, és a dir, quan $|z| \rightarrow +\infty$. Igual que en el cas d'un punt del pla ordinari, aquest comportament pot ser regular o singular i, en el cas singular, hi pot haver un pol o bé una singularitat essencial.

Recordem que S^2 o $\mathbb{C}^*$ indica l'esfera de Riemann, obtinguda afegint a $\mathbb{C}$ el punt de l'infinit. Els entorns dels punts finits $a \in \mathbb{C}$ són els conjunts que contenen un disc obert centrat en a ; els “discos” centrats en ∞ són, per definició, $D(\infty, \varepsilon) = \{\infty\} \cup D'(\infty, \varepsilon)$, on

$$D'(\infty, \varepsilon) = \left\{ z : |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Així, podem pensar que la funció distància s'estén a $\mathbb{C}^*$ amb $d(z, \infty) = \frac{1}{|z|}$ i llavors $D(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^* : d(z, \infty) < \varepsilon\}$. Amb aquesta topologia, $\mathbb{C}^*$ és un espai compacte. Per definició, l'aplicació $z \mapsto \frac{1}{z}$ fa correspondre els discos centrats en zero amb els discos centrats en ∞ .

Suposem que la funció f està definida a $D'(\infty, \varepsilon)$ i que existeix $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$; això és equivalent a dir que f està definida a $D(\infty, \varepsilon)$ i és contínua en el punt ∞ . Direm que f és una *funció holomorfa a l'infinit* si la funció $g(w) = f(1/w)$ és holomorfa a l'origen. Si f està definida a $D(\infty, \varepsilon)$, llavors g ho està a $D(0, \varepsilon)$ i es compleix

$$g(w) = g(0) + \alpha w + O(|w|), \quad \text{si } |w| < \varepsilon, \quad \text{amb } \alpha = g'(0).$$

Això significa, per a la funció f ,

$$f(z) = f(\infty) + \alpha \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad \text{si } |z| > 1/\varepsilon.$$

Al valor $\alpha = g'(0)$ també l'anomenarem $f'(\infty)$ i, per tant, hom té

$$f'(\infty) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty)).$$

Per exemple, $f(z) = z^k$ és holomorfa en el punt ∞ si k és un enter negatiu, amb $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} z^k = 0$ i

$$f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z z^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{si } k < -1. \end{cases}$$

Si $k = 0$ és $f(\infty) = 1$ i $f'(\infty) = 0$.

Suposem que f , definida a $D'(\infty, \varepsilon)$, és holomorfa en aquest disc puntejat. Llavors f té un desenvolupament en sèrie de Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > 1/\varepsilon$$

perquè la funció $g(w) = f(1/w)$ és holomorfa a $D'(0, \varepsilon)$ amb desenvolupament

$$g(w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n w^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{-n} w^n, \quad 0 < |w| < \varepsilon.$$

La part principal del desenvolupament de f al voltant del punt ∞ és $\sum_0^{\infty} c_n z^n$, que és la part que fa que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ no existeixi. Direm que f té un *pol d'ordre n a l'infinit* si aquesta part principal és finita o, equivalentment,

$$f(z) \sim c_n z^n \quad \text{quan } z \rightarrow \infty$$

(això equival al fet que $g(w) \sim c_n w^{-n}$ quan $w \rightarrow 0$). Si la part principal és infinita direm que f té una *singularitat essencial a l'infinit*; en aquest cas, d'acord amb el teorema 5.6, per a tot $\varepsilon > 0$, $f(D'(\infty, \varepsilon)) = g(D'(0, \varepsilon))$ és dens a $\mathbb{C}$, és a dir, $f(z)$ té un comportament caòtic quan $z \rightarrow \infty$.

Exemple 5.22. Tot polinomi de grau n té un pol d'ordre n en el punt ∞ . Una funció racional $R = \frac{P}{Q}$ té un pol en el punt ∞ si $\text{grau}(P) > \text{grau}(Q)$, i és una funció holomorfa en el punt ∞ si $\text{grau}(P) \leq \text{grau}(Q)$. Una funció entera que no sigui un polinomi té una singularitat essencial a l'infinit. $\square$

En el comentari posterior al teorema fonamental de l'àlgebra, havíem observat que si f és entera i $f(z) \rightarrow \infty$ quan $z \rightarrow \infty$, llavors f té almenys un zero a $\mathbb{C}$. Ara veiem que, en aquestes condicions, f és un polinomi i, per tant, estem de fet en les mateixes hipòtesis del teorema 4.42 (vegeu també l'exercici 11 del capítol 4).

5.5.2 Residu d'una funció en el punt de l'infinit

El teorema dels residus es pot estendre al cas que f tingui també una singularitat a l'infinit. Aquí ens limitarem a considerar la igualtat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}(\gamma, a) \cdot \text{Res}(f, a), \quad (5.8)$$

on γ és un camí tancat que no passa pel punt a . Quan $a \in \mathbb{C}$, hem provat (5.8) en l'exemple 5.16. Ara volem considerar el cas $a = \infty$ i per a això cal definir adequadament el residu d'una funció a l'infinit. Suposem, doncs, que f és holomorfa en un disc puntejat, $D'(\infty, \varepsilon) = \{z: |z| > 1/\varepsilon\}$. Com que hem d'integrar la forma diferencial $f(z) dz$, mirem com afecta aquesta forma el canvi de variable $w = 1/z$. Hom té

$$f(z) dz = f(1/w) d(1/w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw.$$

Per tant, és natural definir $\text{Res}(f, \infty)$ com el residu de $-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$ en el zero,

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right).$$

En termes del desenvolupament de Laurent, si

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > 1/\varepsilon,$$

és

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n w^{-n-2}.$$

El terme en w^{-1} correspon a $n = -1$, i resulta

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) = -c_{-1}.$$

Observem que ara pot ser que l'infinit sigui una singularitat evitable de f (f holomorfa en el punt ∞) però, en canvi, $\text{Res}(f, \infty) \neq 0$ (per exemple $f(z) = 1/z$).

Si γ és un camí tancat contingut a la corona $\{z: |z| > 1/\varepsilon\}$, com que el desenvolupament de Laurent és uniformement convergent a γ^* , tindrem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\gamma} z^n dz = c_{-1} \text{Ind}(\gamma, 0) = -\text{Res}(f, \infty) \text{Ind}(\gamma, 0).$$

En particular, si C és una circumferència centrada a l'origen de radi més gran que $1/\varepsilon$, resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = -\text{Res}(f, \infty).$$

Igual que en el cas de singularitats aïllades finites, el residu és l'impediment per tal que f tingui una primitiva holomorfa a $D'(\infty, \varepsilon)$.

Exemple 5.23. La funció $f(z) = e^{1/z}$ és holomorfa en el punt ∞ i $\text{Res}(f, \infty) = -1$. La funció $g(z) = \frac{1}{z^2} + z$ té un pol simple en el punt ∞ i $\text{Res}(g, \infty) = 0$. Per tant, si C és una circumferència al voltant de l'origen, recorreguda en sentit directe, és $\int_C e^{1/z} dz = -1$, $\int_C (1/z^2 + z) dz = 0$. $\square$

Si U és un obert de $\mathbb{C}^*$, una funció meromorfa a U es defineix igual que per als oberts de $\mathbb{C}$: f és meromorfa a U si hi ha un conjunt $A \subset U$, discret i tancat a U , de manera que f és holomorfa a $U \setminus A$ i f té un pol en cada punt de A .

Proposició 5.24. *Suposem que f és una funció meromorfa a tota l'esfera de Riemann. Llavors f és una funció racional i si A és el conjunt format pels pols de f i el punt de l'infinit, llavors A és finit i*

$$\sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) = 0.$$

Demostració. El conjunt A és finit perquè no té punts d'acumulació en el compacte $\mathbb{C}^*$. Si $a_1, \dots, a_m$ són els punts de A i $P_1, \dots, P_m$ són les parts principals respectives de f (P_i és un polinomi en $\frac{1}{z-a_i}$ si $a_i \in \mathbb{C}$ i un polinomi en z si $a_i = \infty$), llavors la funció

$$f - \sum_{i=1}^m P_i$$

és holomorfa a tot $\mathbb{C}^*$ i per tant, entera i acotada i ha de ser constant. Així, f és una funció racional. Sigui ara C una circumferència que contingui en el seu interior tots els punts finits de A ; pel teorema dels residus, és

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{\substack{a \in A \\ a \text{ finit}}} \text{Res}(f, a).$$

Però el terme de l'esquerra també val $-\text{Res}(f, \infty)$ i això dóna el resultat volgut. $\square$

Observem que el punt de l'infinit s'ha de considerar en el conjunt A tant si és un pol de f com si no ho és.

5.6 El principi de l'argument

En aquesta secció aplicarem el teorema dels residus a comptar els zeros i els pols de les funcions meromorfes. Donarem una versió general de l'anomenat principi de l'argument de la qual en deduirem els casos particulars de més interès.

Teorema 5.25. *Sigui U un domini acotat del pla amb vora regular a trossos, orientada positivament. Sigui V un obert amb $\bar{U} \subset V$, f una funció meromorfa a V i h una funció holomorfa a V . Anomenem $\{a_j\}$ els zeros de f a V i sigui n_j la multiplicitat de a_j , i anomenem $\{b_j\}$ els pols de f a V i sigui m_j la multiplicitat de b_j . Suposem que no hi ha cap zero ni cap pol de f a sobre de ∂U . Aleshores*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a_j \in U} h(a_j) n_j - \sum_{b_j \in U} h(b_j) m_j. \quad (5.9)$$

Demostració. Recordem de l'exemple 5.19 que la funció f'/f , anomenada derivada logarítmica de f , és una funció meromorfa a V que té un pol simple a cada zero i a cada pol de f . Més concretament, si

$$f(z) = (z - a)^p g(z), \quad g(a) \neq 0, \quad 0 < |z - a| < \varepsilon,$$

llavors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Si ara multipliquem aquesta igualtat per la funció holomorfa $h(z)$, resulta

$$h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h(a)p}{z - a} + h_1(z), \quad \text{amb } h_1 \text{ holomorfa a } D'_\varepsilon(a).$$

Per tant,

$$\operatorname{Res} \left(h \frac{f'}{f}, a_j \right) = h(a_j) n_j, \quad \operatorname{Res} \left(h \frac{f'}{f}, b_j \right) = -h(b_j) m_j$$

i la igualtat (5.9) és conseqüència del teorema dels residus. $\square$

Si prenem com a funció h la funció constant igual a 1, obtenim:

Corol·lari 5.26. *Sigui U un domini acotat amb vora regular a trossos, orientada positivament i f una funció meromorfa en un entorn de $\bar{U}$ que no tingui ni zeros ni pols a sobre de ∂U . Indiquem per N el nombre total de zeros de f a U i per P el nombre total de pols a U (comptant-hi multiplicitats) i posem $\Gamma = f(\partial U)$. Aleshores*

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Demostració. La igualtat entre la integral de la derivada logarítmica de f i el número enter $N - P$ és (5.9) per a $h \equiv 1$. Recordem ara que ∂U està formada per la unió d'un nombre finit de corbes de Jordan tancades: $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$. Per tant, $\Gamma = f(\partial U)$ és la unió de $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, \dots, f \circ \gamma_N$ i

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Si ara apliquem a cada integral el canvi de variable $\zeta = f(z)$, resulta

$$\text{Ind}(\Gamma, 0) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad \square$$

En particular, si $\Gamma = f(\partial U)$ no fa cap volta entorn de zero, f té el mateix nombre de zeros que de pols dins de U , comptant-hi multiplicitats.

Teorema 5.27 (Principi de l'argument). *Sigui U un domini acotat amb vora regular a trossos, orientada positivament, i f una funció holomorfa en un entorn de $\bar{U}$. Aleshores, si $w \notin \Gamma = f(\partial U)$, hom té*

$$\text{Ind}(\Gamma, w) = N(w),$$

on $N(w)$ indica el nombre d'arrels de l'equació $f(z) = w$ dins de U , comptant-hi multiplicitats.

Demostració. Apliquem el corollari 5.26 a $f(z) - w$ i trobem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = N(w).$$

La descomposició de ∂U en corbes de Jordan i el canvi de variable $\zeta = f(z)$, que hem fet a la prova del corollari 5.26, donen ara

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \text{Ind}(\Gamma, w). \quad \square$$

Aquest teorema té diversos corollaris interessants. El primer diu que la imatge per f de ∂U determina completament la imatge de $\bar{U}$.

Corollari 5.28. *Amb les mateixes hipòtesis que en el teorema 5.27, $f(\bar{U})$ s'obté de $\Gamma = f(\partial U)$ afegint-hi les components connexes acotades de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ amb índex no nul respecte de Γ .*

Demostració. Pel principi de l'argument, els punts $w \notin \Gamma$ que hi ha en la imatge $f(U)$ són exactament els que tenen índex més gran o igual que 1 respecte de Γ , és a dir,

$$(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \cap f(U) = \bigcup_i C_i,$$

on C_i són les components acotades de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ amb índex no nul respecte de Γ . D'aquí resulta $f(\bar{U}) = \Gamma \cup \bigcup_i C_i$. Notem que no podem pas assegurar que $f(U) = \bigcup_i C_i$ perquè pot ser que $f(U)$ talli Γ , és a dir, que $a \in U$ i $b \in \partial U$ tinguin la mateixa imatge. $\square$

Teorema 5.29. *Amb les mateixes hipòtesis que en el teorema 5.27, sigui V un domini simplement connex tal que $V \supset \Gamma = f(\partial U)$. Llavors també $V \supset f(\bar{U})$.*

Demostració. Només cal veure que si $w \notin V$ és $\text{Ind}(\Gamma, w) = 0$. Si $\partial U = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$ amb γ_j corba tancada de Jordan, posem $\tilde{\gamma}_j = f \circ \gamma_j$; $\tilde{\gamma}_j$ és una corba tancada de V i només cal veure que $\text{Ind}(\tilde{\gamma}_j, w) = 0$, $j = 1, \dots, N$. En efecte, $\mathbb{C}^* \setminus V$ és un conjunt connex contingut en la component connexa no acotada de $\mathbb{C}^* \setminus \tilde{\gamma}_j$ i, per tant, $\text{Ind}(\tilde{\gamma}_j, w) = 0$ si $w \notin V$. $\square$

Observem que aquest teorema implica el principi del màxim prenent com a V un disc centrat a l'origen que contingui $f(\partial U)$.

Exemple 5.30. Si f és holomorfa en un entorn de $\bar{U}$ i $f(\partial U)$ és dins d'una el·lipse, $\frac{(\text{Re } f(z))^2}{a^2} + \frac{(\text{Im } f(z))^2}{b^2} \leq 1$, $z \in \partial U$, llavors $f(U)$ és dins de la mateixa el·lipse. $\square$

Com a conseqüència del principi de l'argument, s'obté el resultat següent, que serveix per a comparar entre si el nombre de zeros d'algunes funcions.

Teorema 5.31 (Rouché). *Sigui U un domini acotat amb vora regular a trossos i siguin f, g dues funcions holomorfes en un entorn de $\bar{U}$ de manera que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ si $z \in \partial U$. Llavors f i g tenen el mateix nombre de zeros dins de U (comptant-hi multiplicitats).*

Demostració. Observem que les hipòtesis impliquen $f(z) \neq 0$ i $g(z) \neq 0$ si $z \in \partial U$. La funció $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ és una funció meromorfa en un entorn de $\bar{U}$. Orientem positivament la frontera de U i sigui $\Gamma = F(\partial U)$.

Si $z \in \partial U$, hom té $\left|1 - \frac{g(z)}{f(z)}\right| = |1 - F(z)| < 1$ i, per tant, $\Gamma \subset D(1, 1)$. El raonament que acabem de fer en la prova del teorema 5.29 demostra que $\text{Ind}(\Gamma, 0) = 0$. Si apliquem ara el corol·lari 5.26 a la funció F , resulta $N = P$, és a dir, F té a U el mateix nombre de zeros que de pols; ara bé, els zeros de F

són els zeros de g i els pols de F són els zeros de f , i això prova l'afirmació de l'enunciat. $\square$

També es pot donar una versió del teorema de Rouché per al cas que f i g siguin holomorfes en un entorn d'un compacte qualsevol (vegeu l'exercici 13 del capítol 6).

Exemples 5.32. a) Prenem $f(z) = 2z^5 + 8z - 1$ i $g(z) = 2z^5$ (que és el terme de $f(z)$ que domina, per a $|z|$ gran). Si $U = D(0, 2)$, per a $|z| = 2$ tenim

$$|f(z) - g(z)| = |8z - 1| \leq 8|z| + 1 \leq 17 < 2^6 = |g(z)|.$$

Així, f té el mateix nombre de zeros que g a $D(0, 2)$, és a dir, cinc. Si ara prenem $g(z) = 8z - 1$ i $U = D(0, 1)$ per a $|z| = 1$, es compleix

$$|f(z) - g(z)| = |2z^5| = 2 < 7 \leq 8|z| - 1 \leq |8z - 1| = |g(z)|.$$

Així, f té el mateix nombre de zeros que g a $D(0, 1)$, és a dir, un. Aquest zero, a més, és real i positiu d'acord amb el teorema de Bolzano, ja que $f(0) = -1$ i $f(1) = 9$.

b) Considerem el polinomi $P(z) = z^3 - 2z^2 + 4$ i comptem quants zeros té en el primer quadrant. Si R és prou gran aquests zeros (tres com a molt) són dins del domini $U = \{z = re^{it} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$. Per tal d'aplicar el principi de l'argument ens cal estudiar què fa el camí $\Gamma = P \circ \gamma$ amb $\gamma = \partial U$.

Quan $z = x$ varia de 0 a R , $P(x)$ és un nombre real positiu. Quan $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, resulta

$$P(Re^{it}) = R^3 e^{3it} \left(1 - \frac{2}{Re^{it}} + \frac{4}{R^3 e^{3it}} \right) = R^3 e^{3it} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right),$$

que expressa que el terme z^3 és el que domina, si $R \rightarrow \infty$. Si R és gran $P(Re^{it})$ té, per tant, un argument que es mou aproximadament entre 0 i $\frac{3\pi}{2}$ fins arribar a $P(iR) = -iR^3 + 2R^2 + 4$, i escrivint $P(iR) = R^3 \left(-i + \frac{2}{R} + \frac{4}{R^3}\right) = R^3 \left(-i + \left(\frac{1}{R}\right)\right)$ veiem que $P(iR)$ té argument $\frac{3\pi}{2} + O\left(\frac{1}{R}\right)$. Finalment, quan z varia de iR a 0 segons l'eix imaginari, $P(iy) = -iy^3 + 4 + 2y^2$ està sempre en el quart quadrant i acaba en $P(0)$. Conclusió: Γ fa una volta entorn del zero i P té un zero en el primer quadrant (fig. 5.2). $\square$

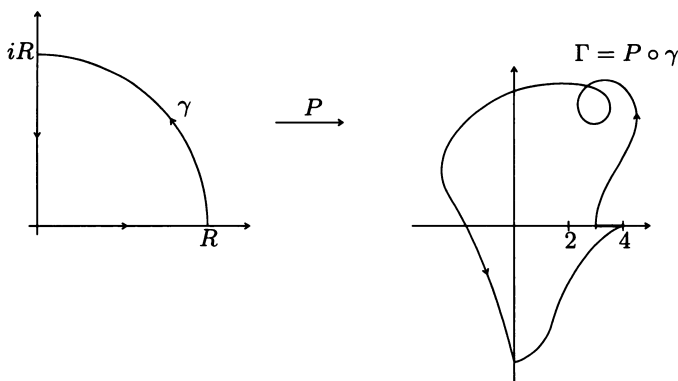


Figura 5.2

5.7 Dependència del conjunt de solucions d'una equació respecte de paràmetres

Sigui U un domini del pla, acotat i amb vora regular a trossos orientada positivament. Suposem que la funció f , holomorfa en un entorn V de $\overline{U}$, no és idènticament igual a una constant. Si $w \in \mathbb{C}$, el conjunt $f^{-1}\{w\}$ està format per punts aïllats de V i, per tant, el conjunt

$$F(w) = f^{-1}\{w\} \cap \overline{U} \quad (5.10)$$

és finit.

Si $w \notin \Gamma = f(\partial U)$, el conjunt $F(w)$ està contingut a U i, pel principi de l'argument, té un nombre d'elements igual a $N(w) = \text{Ind}(\Gamma, w)$ ($f^{-1}\{w\}$ pot tenir també punts de ∂U). La funció $N(w)$ és constant a cada component de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Observem que el teorema 4.32 implica que si $f \in H(V)$ i $w_0 \in \mathbb{C}$ té un nombre finit, m , d'antiimatges per f a V , aleshores hi ha un $\varepsilon > 0$ tal que tot punt $w \in D(w_0, \varepsilon)$ té *almenys* m antiimatges (sempre comptant-hi multiplicitats). Amb la notació d'ara, això significa que $N(w) \geq N(w_0)$ si w és proper a w_0 . Amb el principi de l'argument hem pogut veure també que $N(w)$ és localment constant.

El que volem provar ara és que el conjunt $F(w)$ depèn contínuament de w . Per a expressar que dos conjunts E, F són propers utilitzarem la distància de Hausdorff, d_H , entre E i F , definida per

$$d_H(E, F) = \max_{z \in E} d(z, F) + \max_{z \in F} d(z, E).$$

Així, $E = F$ implica $d_H(E, F) = 0$, i el recíproc és cert si E, F són tancats.

Teorema 5.33. *Sigui U un domini acotat amb vora regular a trossos, orientada positivament. Si V és un entorn obert de $\overline{U}$ i $f \in H(V)$ no és constant, llavors la funció $w \mapsto F(w)$ definida per (5.10) és contínua, és a dir, si $w_0 \notin \Gamma = f(\partial U)$ i $\varepsilon > 0$, hi ha un $\delta > 0$ tal que $|w - w_0| < \delta$, $w \notin \Gamma$, implica $d_H(F(w), F(w_0)) < \varepsilon$.*

Demostració. Posem $N(w_0) = N$ i siguin $a_1, \dots, a_m$ (amb multiplicitats $k_1, \dots, k_m$) les arrels de $f(z) = w_0$ a U , $\sum_{j=1}^m k_j = N$. Pel teorema 4.32 sabem que f és k_j a 1 en un entorn de a_j , és a dir, hi ha $\delta_j > 0$ tal que si $|w - w_0| < \delta_j$, aleshores hi ha k_j arrels diferents de $f(z) = w$ en un entorn de a_j . Prenent $\delta = \min \delta_j$, veiem que tot punt w tal que $|w - w_0| < \delta$ té almenys N antiimatges (k_1 en un entorn de a_1 , k_2 en un entorn de $a_2, \dots, k_m$ en un entorn de a_m). Però, fent δ més petit, si cal, per tal que $D(w_0, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus f(\partial U)$ sabem que cada punt $w \in D(w_0, \delta)$ té N antiimatges, és a dir, $F(w)$ consta exactament de les arrels que apareixen al voltant de cada a_j . Com que aquestes arrels es col·lapsen en el punt a_j quan $w \rightarrow w_0$ (també pel teorema 4.32), es dedueix que $d_H(F(w), F(w_0)) \rightarrow 0$ quan $w \rightarrow w_0$. $\square$

Amb un mètode semblant demostrarem ara que les arrels d'un polinomi $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ depenen contínuament dels coeficients $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. S'ha d'anar amb compte amb aquests tipus d'enunciats, perquè es tracta del *conjunt* dels zeros i no d'una arrel concreta determinada amb algun criteri addicional. Per a polinomis de grau 1 i 2 tenim fórmules explícites

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 z = 0, \quad c_1 \neq 0 &\implies z = -\frac{c_0}{c_1} \\ c_0 + c_1 z + c_2 z^2 = 0, \quad c_2 \neq 0 &\implies z = \frac{-c_1 + (c_1^2 - 4c_0c_2)^{\frac{1}{2}}}{2c_2} \end{aligned}$$

que proven la dependència contínua, respecte dels coeficients, del conjunt de les arrels. Ara bé, la teoria de Galois ens ensenya que no és possible, en general, escriure una fórmula per a les arrels d'un polinomi en termes dels coeficients. Malgrat això, veurem que el conjunt

$$\mathcal{Z}(P) = \mathcal{Z}(c_0, c_1, \dots, c_n) = \{z : P(z) = 0\}$$

depèn contínuament de $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ en el sentit de la distància de Hausdorff.

Teorema 5.34. *La funció $\{c_0, c_1, \dots, c_n\} \mapsto \mathcal{Z}(P)$ és contínua. És a dir, si $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, donat $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta = \delta(\varepsilon, P) > 0$ tal que si $|d_i - c_i| < \delta$, $i = 0, \dots, n$ i $Q(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n$, aleshores $d_H(\mathcal{Z}(Q), \mathcal{Z}(P)) < \varepsilon$.*

Demostració. Aquí ja sabem que $\mathcal{Z}(P)$, $\mathcal{Z}(Q)$ consten tots dos de n punts (comptant-hi multiplicitats); siguin $a_1, \dots, a_m$ els zeros de P , $k_1, \dots, k_m$ les seves multiplicitats, $k_1 + \dots + k_m = n$. Sigui $\varepsilon > 0$ tal que els discos $\overline{D}(a_i, \varepsilon)$ siguin disjunts i $m = \min_{i=1, \dots, m} \min\{|P(z)| : |z - a_i| = \varepsilon\}$; sigui $\delta > 0$ tal que

$$\delta(1 + |z| + \dots + |z|^n) < m$$

si $|z - a_i| = \varepsilon$ per a algun i (per exemple, si $\alpha = \max |a_i|$, és suficient imposar $\delta(1 + (\alpha + \varepsilon) + \dots + (\alpha + \varepsilon)^n) < m$). Llavors, si $|d_i - c_i| < \delta$, $i = 0, \dots, n$, pel teorema de Rouché, Q té k_i zeros a $D(a_i, \varepsilon)$; per tant, $\mathcal{Z}(Q) \subset \bigcup_{i=1}^m D(a_i, \varepsilon)$ i $d_H(\mathcal{Z}(Q), \mathcal{Z}(P)) < \varepsilon$. $\square$

En particular, qualsevol funció ben definida i contínua del conjunt de zeros és una funció contínua dels coeficients. Per exemple, ho són les funcions $\min\{|z| : z \in \mathcal{Z}(P)\}$ o $\max\{|z| : z \in \mathcal{Z}(P)\}$.

Si g és una funció entera, sabem pel teorema 5.25 que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{Z}(P)} g(\alpha) = \sum_{i=1}^m k_i g(a_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, R)} g(z) \frac{P'(z)}{P(z)} dz,$$

per a R prou gran, suposant que $a_1, \dots, a_m$ són els zeros de P , amb multiplicitats $k_1, \dots, k_m$. Així $\sum_{\alpha \in \mathcal{Z}(P)} g(\alpha)$ és una funció contínua dels zeros i, per tant, de P . La continuïtat de $\sum_{z \in \mathcal{Z}(P)} g(\alpha)$ respecte de P , en aquest cas, és també conseqüència de la fórmula anterior. Observem que posant

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n = c_n \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j),$$

on ara $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ són els zeros de P comptant-hi multiplicitats i igualant

coeficients hom té

$$\begin{aligned} c_0 &= c_n (-1)^n \prod_{j=1}^n \alpha_j = c_n (-1)^n \prod_{i=1}^m a_i^{k_i} = (-1)^n c_n \prod_{\alpha \in \mathcal{Z}(P)} \alpha \\ c_1 &= c_n \sum_{j=1}^n (-1)^{n-1} \prod_{l \neq j} \alpha_l = (-1)^{n-1} c_n \sum_{i=1}^m k_i a_i^{k_i-1} \prod_{l \neq i} a_l^{k_l} \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= -c_n \sum_{j=1}^n \alpha_j, \end{aligned}$$

fórmules que fan veure que les anomenades *funcions simètriques* dels zeros de P depenen contínuament dels coeficients de P .

5.8 Càlcul d'integrals reals

Una de les aplicacions típiques i també de les més importants del teorema dels residus és el càlcul d'algunes integrals de funcions definides a la recta. No hi ha un mètode únic per tractar aquestes integrals, i la millor manera de veure les possibilitats que ofereix el càlcul de residus és a través de la consideració de diversos tipus d'exemples.

A) Considerem, en primer lloc, una integral de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

on R és una funció racional de dues variables reals x, y , és a dir, $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ amb P i Q polinomis, que és contínua en el cercle $x^2 + y^2 = 1$. El valor de I representa 2π vegades el valor mitjà de R en el cercle unitat. Si posem $z = e^{i\theta}$, tenim

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

i $dz = ie^{i\theta} d\theta$. Per tant,

$$I = \frac{1}{i} \int_{\mathbf{T}} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{z}.$$

Pel teorema del residus, s'obté

$$I = 2\pi \sum_{|\alpha| < 1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right), \alpha \right).$$

Exemple 5.35.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad a > 1.$$

En aquest cas,

$$I = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{a + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Els zeros de $z^2 + 2az + 1$ són $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, dels quals només $-a + \sqrt{a^2 - 1}$ pertany a $\mathbb{D}$. Obtenim, per tant,

$$I = 4\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \square$$

B) Ara considerem integrals de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

on f és una funció meromorfa en un entorn del semiplà $\{z: \operatorname{Im} z \geq 0\}$, amb un nombre finit de pols a $\{z: \operatorname{Im} z \geq 0\}$, cap dels quals és real, i tal que $|f(z)| = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$ quan $|z| \rightarrow \infty$, és a dir, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z| |f(z)| = 0$, ($\operatorname{Im} z > 0$).

Considerem el camí γ_r format pel segment que va de $-r$ a r , $r > 0$, seguit de la mitja circumferència $C_r: re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Suposem que r és prou gran per tal que γ_r contingui en el seu interior tots els pols de f situats a $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ (fig. 5.3).

Pel teorema dels residus, hom té

$$\int_{-r}^r f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} \alpha > 0} \operatorname{Res}(f(z), \alpha).$$

Ara bé, la quantitat $\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_{C_r} |f(z)| |dz| \leq \pi r \sup_{|z|=r} |f(z)|$ tendeix a zero quan $r \rightarrow +\infty$, per les hipòtesis sobre f , i trobem que existeix $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$ i que val

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} \alpha > 0} \operatorname{Res}(f(z), \alpha).$$

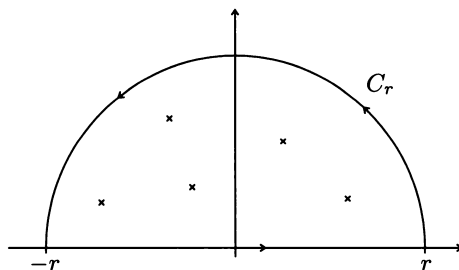


Figura 5.3

Típicament, $|f(z)|$ té una cota, quan $|z| \rightarrow \infty$, que implica tant $|f(z)| = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$ com la convergència absoluta de la integral I . Aquest és el cas, per exemple, si f és una funció racional, $R = \frac{P}{Q}$ sense pols reals amb grau $Q \geq \text{grau } P + 2$, perquè aleshores $|R(z)| = o(|z|^{-2})$.

Exemple 5.36.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

La funció racional $R(z) = (1+z^2)^{-2}$ té pols dobles en $z = \pm i$. Només cal considerar $z = i$ punt en el qual el residu val

$$\text{Res}(R(z), i) = \text{Res}\left(\frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2}, i\right) = \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = \frac{1}{4i}.$$

Per tant, $I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}$. □

Exemple 5.37.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}, i\right) = \\ &= 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = 2\pi i \left(-\frac{i}{2e}\right) = \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

(la funció $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ compleix $|f(z)| = \frac{e^{-\text{Im } z}}{|1+z^2|^2} \leq c \frac{1}{|z|^4}$, si $|z|$ és gran).

Prenent parts reals, resulta

$$\text{Re } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{e}. \quad \square$$

Considerem ara la funció $f(z) = \text{Log}(z + ia)R(z)$, on R és una funció racional com abans ($R = P/Q$ sense pols reals i grau $P \geq \text{grau } Q + 2$), $a > 0$ i Log designa la determinació principal. Com que $|\text{Log}(z + ia)|^2 = (\text{Log}|z + ia|)^2 + (\text{Arg}(z + ia))^2$, continua essent cert que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z| |f(z)| = 0$$

i, per tant,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Log}(x + ia)R(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } \alpha > 0} \text{Res}(f(z), \alpha).$$

Exemple 5.38.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log}(x + ia)}{(1 + x^2)} dx = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{\text{Log}(z + ia)}{1 + z^2}, i \right) = \\ &= 2\pi i \frac{\text{Log}(z + ia)}{z + i} \Big|_{z=i} = 2\pi i \left(\frac{\text{Log}[(1 + a)i]}{2i} \right) = \\ &= \pi (\text{Log}(1 + a) + i \text{Arg}[(1 + a)i]) = \pi \left(\text{Log}(1 + a) + i \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Igualant parts reals i parts imaginàries, resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log}(x^2 + a^2)}{1 + x^2} dx = 2\pi \text{Log}(1 + a), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Arg}(x + ia)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Com que $\text{Arg}(x + ia) + \text{Arg}(-x + ia) = \pi$, si $x > 0$, la darrera igualtat equival a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

C) En tots els exemples del tipus B), la hipòtesi de decreixement que hem fet sobre la funció f , $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z| |f(z)| = 0$, implica que les integrals considerades són absolutament convergents, és a dir, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, fet que implica l'existència del límit següent:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).$$

Ara bé, hi ha integrals que són convergents sense ser absolutament convergents. Per exemple, si $g(x)$ és real i decreixent per a $x > 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, la

integral

$$I = \int_0^\infty g(x)e^{ix} dx$$

és convergent. En efecte, integrant per parts (suposem g derivable), la integral parcial

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)e^{ix} dx &= -ige^{ix}\Big|_a^b + \int_a^b ie^{ix}g'(x) dx = \\ &= i(g(a)e^{ia} - g(b)e^{ib}) + i \int_a^b g'(x)e^{ix} dx \end{aligned}$$

té mòdul més petit o igual que $g(a) + g(b) + \int_a^b |g'(x)| dx = g(a) + g(b) - \int_a^b g'(x) dx = 2g(a)$ i, pel criteri de Cauchy, $\int_0^\infty g(x)e^{ix}$ és convergent (aquest fet és anàleg al de la convergència de sèries alternades $\sum (-1)^n a_n$ amb $a_n \searrow 0$). Així doncs, les integrals $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1+|x|} dx$ són convergents, però no és difícil veure que aquestes integrals no són absolutament convergents.

Per a integrals esteses sobre tot $\mathbb{R}$, hi ha encara un tercer concepte de convergència, més general, que és l'existència del *valor principal de Cauchy*, definit per

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx.$$

És clar que per a una integral, $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$, valen les implicacions següents

absolutament convergent $\implies$ convergent $\implies$ existeix v.p.
--

En aquest apartat veurem que el teorema dels residus permet provar l'existència i calcular el valor principal de Cauchy d'algunes integrals, no necessàriament absolutament convergents.

Proposició 5.39. *Suposem que g és meromorfa en un entorn de $\{z: \text{Im } z \geq 0\}$, amb un nombre finit de pols a $\{z: \text{Im } z \geq 0\}$, cap dels quals no és real, i que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Llavors v.p. $\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{ix} dx$ existeix i val*

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\alpha} \text{Res}(f(z)e^{iz}, \alpha),$$

on la suma està estesa als pols de g situats a $\{z: \text{Im } z > 0\}$.

Demostració. Considerant el mateix camí γ_r que a l'apartat B), tan sols cal veure que la contribució de la mitja circumferència C_r tendeix a zero, quan $r \rightarrow \infty$. Ara bé,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(re^{i\theta}) e^{ire^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \\ &\leq \int_0^\pi |f(re^{i\theta})| e^{-r \sin \theta} r d\theta \leq \left(\max_{|z|=r} |f(z)| \right) \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta. \end{aligned}$$

Però la darrera integral val $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin \theta} r d\theta$ i utilitzant que $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$, si $0 < \theta < \pi/2$, resulta que està acotada per $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} r d\theta \leq 2 \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\pi} r \theta} r d\theta = \pi$. $\square$

Exemple 5.40.

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

Veurem que existeix el valor principal

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{x e^{ix}}{1+x^2} dx.$$

En efecte, aquí $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ té un pol en el punt $z=i$ amb residu $\frac{z}{z+i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2}$ i resulta $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi i = \frac{\pi}{2}$. $\square$

D) La noció de valor principal d'una integral es pot formular també per a les anomenades integrals impròpies de segona espècie (és a dir, quan l'integrand f es fa infinit en un punt finit). Suposem, per exemple, que f és una funció contínua a l'interval $(a-R, a+R)$, $R > 0$, llevat del punt a i f no és acotada a $(a-R, a+R)$. El *valor principal* de $\int_{a-R}^{a+R} f(x) dx$ és, per definició,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{a-R}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{a+R} \right\} f(x) dx.$$

La integral (impròpia) $\int_{a-R}^{a+R} f(x) dx$ es diu que és *convergent* si ho són $\int_{a-R}^a$ i $\int_a^{a+R}$, és a dir, si existeixen per separat els dos límits $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-R}^{a-\varepsilon}$ i $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{a+R}$. Finalment, es diu que és *absolutament convergent* si $\int_{a-R}^{a+R} |f(x)| dx < +\infty$. Igual que abans, absolutament convergent $\Rightarrow$ convergent $\Rightarrow$ existència de v.p.

Suposem ara que la funció f dels apartats B) o C), meromorfa en un entorn de $\{z: \operatorname{Im} z \geq 0\}$, tingui un nombre finit de pols simples reals: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. En aquest cas, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ no pot ser absolutament convergent perquè a prop de cada punt a_j , és $|f(x)| \sim c_j |x - a_j|^{-1}$ amb c_j constant, i

$$\int_{a_j - \alpha}^{a_j + \alpha} |f(x)| dx = +\infty, \quad \text{si } \alpha > 0.$$

Ara bé, si el pol a_j és d'ordre 1, sí que existeix v.p. $\int_{a_j - \alpha}^{a_j + \alpha} f(x) dx$ perquè $f(x) = \frac{c_j}{x - a_j} + O(1)$ i, trivialment, $\left\{ \int_{a_j - \alpha}^{a_j - \varepsilon} + \int_{a_j + \varepsilon}^{a_j + \alpha} \right\} \frac{dx}{x - a_j} = 0$ en ser $(x - a_j)^{-1}$ una funció senar respecte del punt a_j .

Per tal de calcular v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, modifiquem el circuit γ_r , que hem fet servir a B) i C) de manera que recorri, en sentit negatiu, els semicercles centrats en a_j de radi $\varepsilon > 0$ que van de $a_j - \varepsilon$ a $a_j + \varepsilon$, per a $j = 1, \dots, m$ (fig. 5.4). Si $\gamma_j(\varepsilon)$ són aquests semicercles, llavors hom té

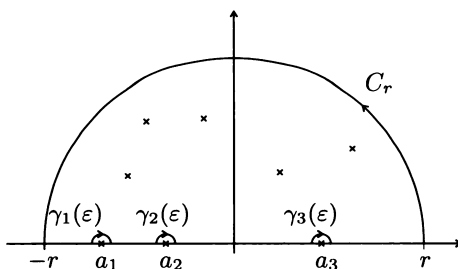


Figura 5.4

$$\int_{\gamma_j(\varepsilon)} f(z) dz = \int_{\gamma_j(\varepsilon)} \frac{c_j}{z - a_j} dz + \int_{\gamma_j(\varepsilon)} O(1) dz$$

i

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_j(\varepsilon)} f(z) dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_j(\varepsilon)} \frac{c_j}{z - a_j} dz = \\ &= -c_j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{\varepsilon i e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = -i\pi c_j = -i\pi \operatorname{Res}(f, a_j). \end{aligned}$$

Suposant que $a_1 < \dots < a_m$, que r és prou gran i ε prou petit i tenint en compte que $\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow 0$, $r \rightarrow +\infty$ (perquè suposem $|f(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$),

o bé $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ i considerem l'integrand $f(x)e^{ix}$ resulta en aplicar el teorema dels residus:

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-r}^{a_1 - \varepsilon} + \int_{a_1 + \varepsilon}^{a_2 - \varepsilon} + \int_{a_2 + \varepsilon}^{a_3 - \varepsilon} + \cdots + \int_{a_{n-1} + \varepsilon}^{a_n - \varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_n + \varepsilon}^r \right\} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(f, \alpha) + \pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, a_j). \end{aligned}$$

Exemple 5.41.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \pi i.$$

Igualant parts imaginàries, trobem $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Com que la funció $\frac{\sin x}{x}$ és contínua en el punt 0, podem eliminar v.p. i la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, que és convergent però no absolutament convergent, val π . $\square$

El mètode anterior també permet calcular integrals de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \begin{cases} \cos^n x \\ \sin^n x \end{cases} dx$ expressant $\sin^n x$, $\cos^n x$ com a combinació lineal de les funcions $\cos nx$, $\sin nx$ i escrivint $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{imx} dx$ com a $\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{m}\right)e^{ix} dx$, després de fer un canvi de variable.

Exemple 5.42. La integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$$

és convergent (no absolutament) i tenim,

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \right)^3 = \frac{1}{8i^3}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = \\ &= -\frac{1}{8i}(2i \sin 3x + 6i \sin x) = -\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

Fent el canvi $3x = t$, resulta $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ i finalment, s'obté $I = -\pi$. $\square$

E) Considerem ara integrals de la forma

$$I = \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1,$$

on R és una funció racional, $R = \frac{P}{Q}$ amb grau $Q \geq \text{grau } P + 1$, sense pols a $[0, +\infty)$. Això garanteix la convergència absoluta de I .

Aplicarem el teorema dels residus a una determinació de $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ al domini $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$: la que està donada per $\arg z \in (0, 2\pi)$. Per a r gran i δ petit, el camí $\gamma_{r,\delta}$ d'integració és el de la figura 5.5.

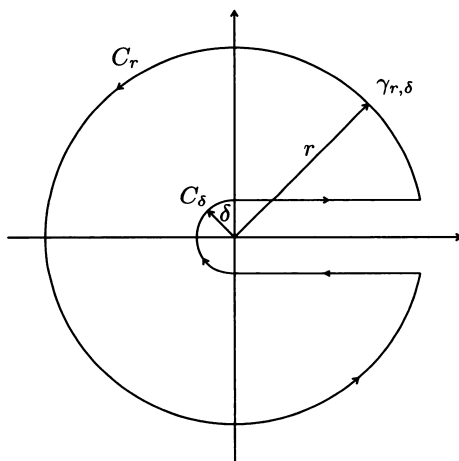


Figura 5.5

Els dos trams horitzontals donen

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{R(x+i\delta)}{(x+i\delta)^\alpha} dx - \int_0^r \frac{R(x-i\delta)}{(x-i\delta)^\alpha} dx &= \\ &= \int_0^r \left(\frac{R(x) + O(\delta)}{|x+i\delta|^\alpha e^{i\alpha \arg(x+i\delta)}} - \frac{R(x) + O(\delta)}{|x-i\delta|^\alpha e^{i\alpha \arg(x-i\delta)}} \right) dx. \end{aligned}$$

Quan $\delta \rightarrow 0$ el límit de l'expressió anterior és $\int_0^r \frac{R(x)}{x^\alpha} (1 - e^{-2\pi i \alpha}) dx$. D'altra banda, el límit quan $\delta \rightarrow 0$ de la integral sobre la mitja circumferència de radi δ , dona

$$\left| \int_{C_\delta} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz \right| \leq k \delta \sup_{|z|=\delta} \frac{1}{|z^\alpha|} = k \delta^{1-\alpha} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad k \text{ constant.}$$

En l'arc de circumferència de radi r tenim

$$\left| \int_{C_r} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz \right| \leq r^{1-\alpha} \sup_{|z|=r} |R(z)| = r^{1-\alpha} O\left(\frac{1}{r}\right) \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty.$$

Tot plegat, juntament amb el teorema dels residus, dóna

$$(1 - e^{-2\pi i \alpha})I = 2\pi i \sum_{p \in [0, +\infty)} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, p\right).$$

Exemple 5.43.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \beta < 1.$$

És el cas anterior amb $\alpha = 1 - \beta$, $R(z) = (1+z)^{-1}$. Com que $\operatorname{Res}\left(\frac{z^{\beta-1}}{1+z}, -1\right) = (-1)^{\beta-1} = e^{i\pi(\beta-1)}$, és

$$I = 2\pi i \frac{e^{i\pi(\beta-1)}}{1 - e^{-2\pi i(1-\beta)}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi(1-\beta)} - e^{-i\pi(1-\beta)}} = \frac{\pi}{\sin \pi(1-\beta)}. \quad \square$$

Aquest mètode serviria també substituint R per una funció f meromorfa a $\mathbb{C}$ amb un nombre finit de pols, sense cap pol a $[0, \infty)$ i que complís la condició $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{1-\alpha} |f(z)| = 0$. Ara bé, com que això implica que f té una singularitat evitable en el punt ∞ (perquè $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$) f és, de fet, una funció racional, per la proposició 5.24.

F) Ara calculem integrals del tipus $\int_0^\infty R(x) \operatorname{Log} x dx$ i $\int_0^\infty R(x) dx$, on la funció $R = \frac{P}{Q}$ és racional amb grau $Q \geq \text{grau } P + 2$, sense pols a $[0, \infty)$, fet que implica la convergència absoluta de les integrals. També suposem que R pren valors reals sobre $\mathbb{R}$. Fem servir el mateix camí que en l'apartat E) però ara integrem la funció $R(z) \log^2 z$, on la determinació de $\log z$ és la que està donada a $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ per $\arg z \in (0, 2\pi)$. Amb un raonament semblant al de E), trobem

$$\int_0^\infty R(x) \operatorname{Log}^2 x dx - \int_0^\infty R(x) (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_{\alpha \neq 0} \operatorname{Res}(R(z) \log^2 z, \alpha).$$

Igualant parts reals i parts imaginàries, surt

$$\int_0^\infty R(x) \operatorname{Log} x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{\alpha \neq 0} \operatorname{Res}(R(z) \log^2 z, \alpha)$$

$$\int_0^\infty R(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{\alpha \neq 0} \operatorname{Res}(R(z) \log^2 z, \alpha).$$

Exemple 5.44.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Tenim un pol doble en $z = \pm i$, i els residus corresponents són:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(z^2 + 1)^2}, i \right) &= \left(\frac{\log^2 z}{(z + i)^2} \right)' (i) = \frac{2 \log i}{i(2i)^2} - \frac{2(\log i)^2}{i(2i)^3} = \\ &= \frac{2i \frac{\pi}{2}}{-4i} + \frac{2 \left(i \frac{\pi}{2}\right)^2}{8i} = -\frac{\pi}{4} + i \frac{\pi^2}{16} \end{aligned}$$

i, anàlogament,

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(z^2 + 1)^2}, -i \right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{9}{16} i \pi^2.$$

Resulta, doncs,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

Pel fet d'haver-hi el factor $\operatorname{Log} x$ a l'integrand de $\int_0^{\infty} R(x) \operatorname{Log} x dx$, que s'anul·la en el punt $x = 1$, es pot permetre que R tingui un pol simple en el punt 1 i la integral encara serà absolutament convergent. Per veure com afecta aquest fet al càlcul anterior, substituïm la part de la integral donada per

$$- \int_0^r R(x - i\delta) \log^2(x - i\delta) dx$$

per les integrals

$$\begin{aligned} - \int_0^{1-c(\delta)} R(x - i\delta) \log^2(x - i\delta) dx - \int_{\beta_\delta} R(z) \log^2 z dz - \\ - \int_{1+c(\delta)}^r R(x - i\delta) \log^2(x - i\delta) dx. \end{aligned}$$

Els punts $(1 - c(\delta), -\delta)$, $(1 + c(\delta), -\delta)$ són els de tall de la recta $y = -\delta$ amb el cercle de centre 1 i de radi 2δ , i β_δ és l'arc d'aquest cercle determinat per aquests dos punts (fig. 5.6).

En fer el límit quan $\delta \rightarrow 0$, les parts imaginàries de les integrals primera i tercera tendeixen, conjuntament, a

$$- \operatorname{Im} \int_0^r R(x) (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx = -4\pi \int_0^r R(x) \operatorname{Log} x dx.$$

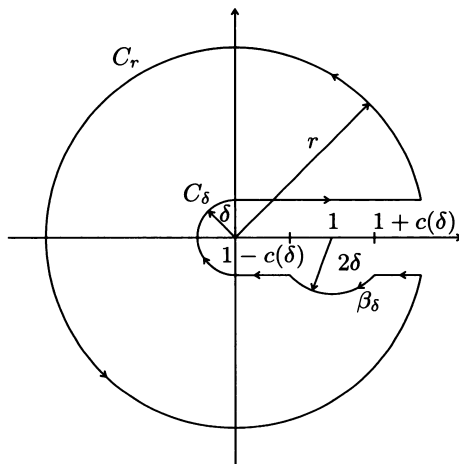


Figura 5.6

La integral del mig és $\int_{\beta_\delta} R(z)(2\pi i + O(\delta))^2 dz$, que té límit, quan $\delta \rightarrow 0$, igual a $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\beta_\delta} R(z)(2\pi i)^2 dz = -4\pi^2 \pi i \operatorname{Res}(R, 1)$. Amb això l'expressió per a $\int_0^\infty R(x) \operatorname{Log} x dx$ es converteix en

$$\int_0^\infty R(x) \operatorname{Log} x dx = \pi^2 \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(R, 1)) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{\alpha} \operatorname{Res}(R(z)(\log z)^2, \alpha).$$

Utilitzant les parts reals obtindriem, aquest cop,

$$\text{v.p.} \int_0^\infty R(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{\alpha} \operatorname{Res}(R(z)(\log z)^2, \alpha) + \pi \operatorname{Im} \operatorname{Res}(R, 1),$$

on v.p. $\int_0^\infty R(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^\infty \right) R(x) dx$ (en aquest cas la integral $\int_0^\infty R(x) dx$ no és absolutament convergent). D'altra banda, essent R real en $\mathbb{R}$, la quantitat $\operatorname{Res}(R, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} R(x)(x-1)$ també és real.

Exemple 5.45.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^3 - 1} dx.$$

El residu de $R(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$ en el punt 1 és $\lim_{z \rightarrow 1} R(z)(z-1) = \frac{1}{3}$. En els altres

dos pols $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ els residus de $R(z)(\log z)^2$ són

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}} \frac{z - e^{i\frac{2\pi}{3}}}{z^3 - 1} (\log z)^2 = \frac{\left(i\frac{2\pi}{3}\right)^2}{3\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2} = -\frac{4\pi^2}{27} e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{4\pi}{3}}} \frac{z - e^{i\frac{4\pi}{3}}}{z^3 - 1} (\log z)^2 = \frac{\left(i\frac{4\pi}{3}\right)^2}{3\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2} = -\frac{16\pi^2}{27} e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Resulta, per tant,

$$I = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{27} \left(4 \cos \frac{4\pi}{3} + 16 \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5\pi^2}{27} = \frac{4\pi^2}{27}. \quad \square$$

G) Calculem, finalment, algunes integrals que són d'ús freqüent tant en anàlisi real com en anàlisi complexa.

Comencem per la integral $I = \int_0^{2\pi} \text{Log}|1 - re^{i\theta}| d\theta$, $0 < r < 1$.

Com que $I = \text{Re} \int_0^{2\pi} \text{Log}(1 - re^{i\theta}) d\theta$, tenim

$$I = \text{Re} \frac{1}{i} \int_{C(0,r)} \text{Log}(1 - z) \frac{dz}{z} = 0$$

perquè la funció $\frac{\text{Log}(1-z)}{z}$ és holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$.

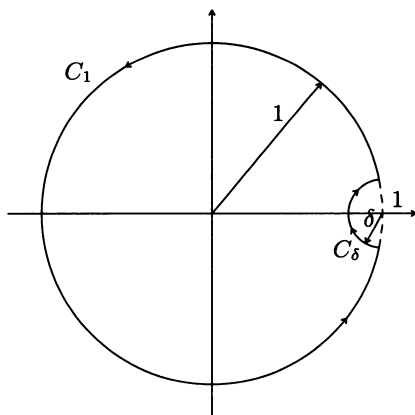


Figura 5.7

Per a $r = 1$ la integral $\int_0^{2\pi} \text{Log} |1 - e^{i\theta}| d\theta$ és, encara, absolutament convergent perquè

$$\text{Log} |1 - e^{i\theta}| = \frac{1}{2} \text{Log} |1 - e^{i\theta}|^2 = \frac{1}{2} \text{Log} ((1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \text{Log} (2(1 - \cos \theta))$$

és de l'ordre de $|\text{Log} \theta|$ per a θ a prop de 0 i de l'ordre de $|\text{Log}(2\pi - \theta)|$ per a θ a prop de 2π . Per a calcular-la prenem el circuit de la figura 5.7. Així, tindrem

$$i \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \text{Log} |1 - e^{i\theta}| d\theta - \int_{C_{\delta}} \frac{1}{z} \text{Log}(1 - z) dz = 0$$

perquè $\frac{\text{Log}(1-z)}{z}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Ara bé,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{\delta}} \frac{\text{Log}(1-z)}{z} dz \right| &\leq 2\pi\delta \cdot \sup_{\substack{|z-1|=\delta \\ |z|\leq 1}} \frac{|\text{Log}(1-z)|}{|z|} \leq \\ &\leq \frac{2\pi\delta}{1-\delta} (\text{Log}^2 |1-z| + \text{Arg}^2(1-z))^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{2\pi\delta}{1-\delta} ((\text{Log} \delta)^2 + \pi^2)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \quad \delta \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Per tant, $\int_0^{2\pi} \text{Log} |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$.

Quan $r > 1$, la integral I es pot calcular fàcilment perquè

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \text{Log} |1 - re^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} \text{Log} r \left| \frac{1}{r} e^{-i\theta} - 1 \right| d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\text{Log} r + \text{Log} \left| \frac{1}{r} e^{i\theta} - 1 \right| \right) d\theta = 2\pi \text{Log} r. \end{aligned}$$

Resumint, hem demostrat, indicant per $\text{Log}^+ r$ la part positiva de $\text{Log} r$, la fórmula següent

$$\int_0^{2\pi} \text{Log} |1 - re^{i\theta}| d\theta = 2\pi \text{Log}^+ r, \quad r > 0.$$

Per últim, si combinem la igualtat que acabem de provar

$$\int_0^{\pi} \text{Log} |1 - e^{2i\theta}| d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log} |1 - e^{it}| dt = 0$$

amb la relació $|1 - e^{2i\theta}| = |e^{-i\theta} - e^{i\theta}| = 2|\sin \theta|$, trobem

$$\int_0^\pi \text{Log} \sin \theta \, d\theta = -\pi \log 2.$$

Cal observar que en tota aquesta secció hem calculat integrals, pròpies o impròpies, sense passar pel càlcul de primitives, que, mitjançant el teorema fonamental del càlcul, és el mètode tradicional de càlcul d'integrals definides.

5.9 Exercicis

1. Trobeu el desenvolupament de Laurent de la funció $f(z) = \frac{z^2}{z-1} e^{1/z}$ a cadascuna de les corones $C = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ i $C^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.
2. Proveu que si f és una funció holomorfa al disc puntejat $D'(a, r)$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, que pren tots els valors en el semiplà superior $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, llavors f té una singularitat evitable en el punt a .
3. Supposem que $f \in H(D'(a, r))$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, té un pol en el punt a i que g és una funció entera de manera que la funció $g(f(z))$, $z \in D'(a, r)$, també té un pol en el punt a . Proveu que g ha de ser un polinomi.
4. Proveu que el desenvolupament de Laurent de la funció $\frac{1}{e^z - 1}$ al voltant de l'origen és de la forma

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

Els números B_n , $n = 1, 2, \dots$ són els *números de Bernoulli*. Proveu la relació de recurrència

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{1}{2(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}$$

i calculeu B_n per a $n = 1, 2, 3$.

5. Proveu que el desenvolupament de Laurent de la funció $e^{\frac{t(z-1)}{2z}}$, per a $t \in \mathbb{R}$, al voltant de l'origen és de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n$$

amb $J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - t \sin \theta) d\theta$, $n \in \mathbb{Z}$. Les funcions $J_n(t)$ són les *funcions de Bessel*.

6. Supposem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ té radi de convergència 1 i sigui f la funció holomorfa que defineix a $\mathbb{D}$. Proveu que f té una extensió meromorfa a un entorn de $\overline{\mathbb{D}}$ amb un únic pol simple en un punt $z_0 \in \mathbb{T}$ si i només si $\overline{\lim}_n |c_{n-1} - c_n z_0| < 1$ i que això implica $\lim_n \frac{c_n}{c_{n+1}} = z_0$.

Proveu que aquesta última condició, això és $\lim_n c_n/c_{n+1} = z_0$, es compleix també si f té una extensió meromorfa a un entorn de $\overline{\mathbb{D}}$ que en el punt $z_0 \in \mathbb{T}$ hi té un pol d'un ordre més alt que els ordres de tots els altres pols situats a $\mathbb{T}$.

7. Proveu que tota funció f holomorfa al semiplà $\Pi^+ = \{z: \text{Im } z > 0\}$, 2π -periòdica (i.e. $f(z + 2\pi) = f(z)$, $z \in \Pi^+$) té un desenvolupament en sèrie de Fourier complexa de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}, \quad z \in \Pi^+.$$

Trobeu expressions integrals per als coeficients c_n .

8. Fent servir el principi de l'argument doneu una demostració alternativa del teorema 4.32, de caràcter més geomètric.
9. Sigui f holomorfa i injectiva en un obert U . Llavors per a cada $a \in U$ i $r > 0$ tals que $\overline{D}(a, r) \subset U$, proveu la fórmula

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz, \quad \text{si } w \in f(D(a, r)).$$

10. Proveu que els zeros d'una funció meromorfa no idènticament nul·la en un domini són punts aïllats.
11. Sigui f una funció meromorfa a $\mathbb{C}$. Proveu que f és la derivada logarítmica d'una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ si i només si tots els pols de f són simples amb residu enter. Així mateix f és la derivada logarítmica d'una funció entera si i només si tots els pols de f són simples amb residu natural.
12. Proveu que si $\alpha > 0$ i $w \in \mathbb{C}$ amb $|w| < \alpha^p$, $p \in \mathbb{N}$, l'equació $(z - \alpha)^p e^z = w$ té exactament p arrels diferents en el semiplà $\{z: \text{Re } z > 0\}$. Calculeu quin és el radi $r < \alpha$, més petit possible de manera que es pugui assegurar que el disc $D(\alpha, r)$ conté totes les arrels d'aquesta equació.
13. Sigui U un domini acotat del pla amb vora regular, orientada positivament. Sigui f una funció meromorfa a un entorn de $\overline{U}$ sense pols a ∂U , complint $|f(z)| \leq 1$ per a $z \in \partial U$. Proveu que f pren a U tot valor $w \in \mathbb{C}$ amb $|w| > 1$, tantes vegades com la suma de les multiplicitats dels pols de f a U .
14. Sigui f una funció entera que compleix $\text{Im } f(z) = (\text{Re } f(z))^3$ si i només si $\text{Im } z = (\text{Re } z)^2$. Proveu que f té com a màxim un zero a $\mathbb{C}$.

15. Sigui f una funció entera. Proveu que si f és injectiva a $\mathbb{C}$ llavors és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ i dedueu que f ha de ser un polinomi de primer grau. (Vegeu l'exercici 20 del capítol 4).
16. Proveu que si $a \in \mathbb{C}$ i $|a| \neq 1$, llavors és $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1$ sempre que $|z| = 1$. Utilitzeu aquest fet per a demostrar que si R és una funció racional que compleix $|R(z)| = 1$ quan $|z| = 1$, llavors R és de la forma

$$R(z) = c z^m \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$$

amb $c, a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| \neq 1$ i $m \in \mathbb{Z}$.

17. Sigui u una funció harmònica real a la corona $C(a, R_2, R_1)$. Proveu que hi ha constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta = \alpha \log r + \beta, \quad R_2 < r < R_1.$$

Si, a més, u és acotada a la corona, llavors $\alpha = 0$ i $\beta = u(a)$.

18. Proveu la igualtat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad \text{per a } n = 1, 2, \dots$$

19. Calculeu

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\operatorname{ch} x} dx \quad \text{i} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Log}^2 x}{1+x^4} dx.$$

20. Calculeu

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \operatorname{Log} x}{1+x^2} dx \quad \text{i} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx.$$

Homologia i funcions holomorfes

L'objectiu d'aquest capítol és donar les versions homològiques del teorema de Cauchy i de la fórmula integral de Cauchy. El teorema de Cauchy assegura que si la funció f és holomorfa en un domini U , llavors la integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ val zero per a determinats cicles γ de U . Establir amb precisió quins cicles són aquests, és una qüestió topològica que s'ha de formular adequadament. Nosaltres hem triat la noció d'homologia, basada en l'índex d'una corba tancada, per a fer aquesta formulació. També es pot fer basant-se en l'homotopia de corbes i comentem, breument, la relació entre ambdós punts de vista.

D'altra banda, donem una versió homològica de la fórmula de Green i de la fórmula de Cauchy-Green, que es poden considerar com les versions amb multiplicitat de les fórmules clàssiques de Green i que tenen algunes aplicacions interessants, com ara el teorema de Cauchy per a formes diferencials. Els resultats obtinguts també s'apliquen a donar diverses caracteritzacions dels dominis simplement connexos del pla.

6.1 Homologia de cadenes i dominis simplement connexos

De cara a formular adequadament les versions homològiques del teorema i de la fórmula integral de Cauchy, és convenient estendre la noció d'integral de línia a uns recorreguts més generals que els camins. Considerem $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ camins, és a dir, corbes de classe C^1 a trossos, dins d'un domini U del pla i

siguin $n_1, n_2, \dots, n_k$ números enters. La combinació lineal formal

$$\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j$$

és, per definició, una *cadena* al domini U . Així, el conjunt de totes les cadenes a U és el grup abelià i lliure generat pel conjunt de camins. En particular, si Γ_1, Γ_2 són cadenes a U , tenim definides altres cadenes $n\Gamma_1 + m\Gamma_2$ amb $n, m \in \mathbb{Z}$. El recorregut de Γ és $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \dots \cup \gamma_k^*$.

Si $f \in C(\Gamma^*)$, posarem, per definició,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Per tant, si $f \in C(U)$ i Γ_1, Γ_2 són cadenes a U , hom té

$$\int_{n\Gamma_1 + m\Gamma_2} f(z) dz = n \int_{\Gamma_1} f(z) dz + m \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Podem tenir cadenes Γ, Γ' amb representacions diferents,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j, \quad \Gamma' = \sum_{j=1}^{k'} n'_j \gamma'_j$$

però de manera que $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz$, per a tota funció $f \in C(\Gamma^* \cup \Gamma'^*)$. Aquest és el cas, per exemple, si Γ' s'obté de Γ fent permutacions dels camins γ_j , subdivisions, agregacions de camins, reparametrizacions, etc. En tot aquest capítol, donada una cadena Γ a U només ens interessarà l'assignació

$$f \mapsto \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad f \in C(U).$$

Si $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz$, per a tota funció $f \in C(U)$, direm que Γ i Γ' són *cadenes equivalents* i identificarem Γ i Γ' . És amb aquest conveni que fem afirmacions com ara la de l'exemple següent.

Exemple 6.1. Considerem el quadrat unitat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ dividit en quatre parts iguals Q_i , $i = 1, 2, 3, 4$ i sigui $\Gamma_i = \partial Q_i$ la frontera de Q_i orientada positivament. Aleshores

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 = \partial Q,$$

perquè les contribucions dels costats interiors a la integral d'una funció contínua es cancel·len (fig. 6.1). □

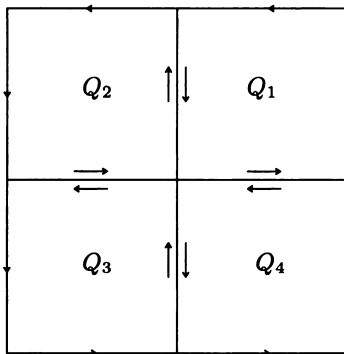


Figura 6.1

Observem la igualtat $\overline{\int_{\Gamma} f(z) dz} = \int_{\Gamma} \overline{f(z)} d\bar{z}$ i també que tota 1-forma diferencial $\omega = P dx + Q dy$ amb coeficients reals, es pot escriure de la manera $\omega = \frac{1}{2}(f(z) dz + \overline{f(z)} d\bar{z})$ amb $f = (P - iQ)$. Resulta, doncs, que dues cadenes Γ i Γ' són equivalents a U si i només si $\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma'} \omega$ per a tota 1-forma diferencial ω amb coeficients continus a U . El fet de considerar tan sols formes del tipus $f(z) dz$ és només per conveniència, i la integral al llarg de Γ és una noció real.

Direm que una cadena Γ a U és un *cicle* si es pot representar en la forma $\Gamma = \sum_{j=1}^k n_j \gamma_j$, on cada γ_j és un camí tancat de U i cada n_j és enter. Llavors l'índex de Γ respecte d'un punt $z \notin \Gamma^*$ es defineix, de manera natural, com

$$\text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} = \sum_{j=1}^k n_j \text{Ind}(\gamma_j, z).$$

Evidentment, $\text{Ind}(\Gamma, z)$ és un número enter i és clar que es compleix la relació

$$\text{Ind}(n_1 \Gamma_1 + n_2 \Gamma_2, z) = n_1 \text{Ind}(\Gamma_1, z) + n_2 \text{Ind}(\Gamma_2, z), \quad z \notin \Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Definició 6.2. Direm que un cicle Γ , contingut en un domini U , és *homòleg a zero* respecte de U i ho escriurem $\Gamma \approx 0(U)$, si $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, per a tot punt $z \notin U$. Direm que dues cadenes Γ_1, Γ_2 contingudes a U són *homòlogues* respecte de U , $\Gamma_1 \approx \Gamma_2(U)$, si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és un cicle homòleg a zero respecte de U (si Γ_1, Γ_2 són cicles, això equival, evidentment, a la condició $\text{Ind}(\Gamma_1, z) = \text{Ind}(\Gamma_2, z)$, per a tot punt $z \notin U$).

Cal observar que les definicions d'índex d'un cicle i de cicle homòleg a zero

es fan en funció d'integrals de línia del tipus $\int_{\Gamma}(w-z)^{-1}dz$ i, per tant, no depenen de la forma com representem Γ com a combinació de camins tancats.

Exemple 6.3. En la secció 1.6 hem vist que si U és un domini acotat amb vora regular a trossos, orientada positivament, llavors $\partial U = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$ amb γ_i corbes tancades de Jordan de manera que

$$\text{Ind}(\gamma_1, z) = 1, \quad \text{Ind}(\gamma_i, z) = 0 \quad i = 2, \dots, N \quad \text{si } z \in U.$$

Si $\tilde{U}$ és qualsevol domini amb $\tilde{U} \supset \overline{U}$, llavors el cicle $\partial U = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N$ és homòleg a zero respecte de $\tilde{U}$. $\square$

Intuïtivament, $\Gamma \approx 0(U)$ significa que les components acotades de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ (allà on l'índex no és zero) estan formades per punts de U . En la secció 1.3 hem introduït el concepte de domini simplement connex com un domini U de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}^* \setminus U$ sigui connex. Sembla que aquesta condició té el mateix significat que el fet que $\Gamma \approx 0(U)$ quan Γ és un camí tancat de U . El resultat següent és una confirmació d'aquesta evidència intuïtiva.

Proposició 6.4. *Un domini U del pla és simplement connex si i només si tot cicle contingut a U és homòleg a zero respecte de U .*

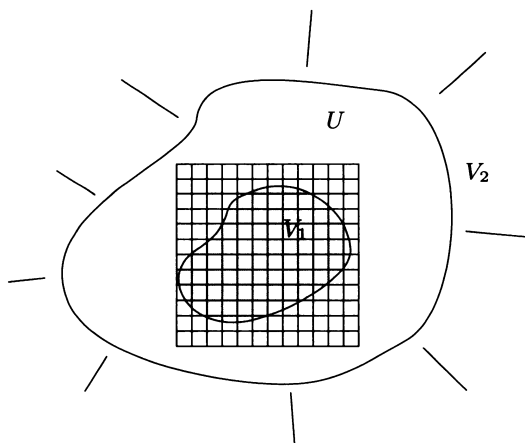


Figura 6.2

Demostració. Si U és simplement connex i Γ és un cicle amb $\Gamma^* \subset U$, el conjunt connex $\mathbb{C}^* \setminus U$ està inclòs tot ell en la component de $\mathbb{C}^* \setminus \Gamma^*$ que conté el punt

de l'infinit. Llavors si un punt z no és de U , està en la component no acotada del complementari de Γ^* i, per tant, $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$.

Recíprocament, suposem que U no és simplement connex; llavors $\mathbb{C}^* \setminus U$ té almenys dues components connexes V_1, V_2 , que són tancats disjunts de $\mathbb{C}^* \setminus U$ i, per tant, tancats de $\mathbb{C}^*$ disjunts i un dels quals, posem V_2 , conté el punt de l'infinit. Llavors V_1 té ∞ a l'exterior i ha de ser compacte. Construïm una quadrícula del pla formada per quadrats de costats paral·lels als eixos, de mida $\varepsilon/2$, amb $\varepsilon = d(V_1, V_2)$ de manera que un punt $P \in V_1$ sigui a l'interior d'un dels quadrats (fig. 6.2). Considerem ara tots els quadrats de la quadrícula que tallen V_1 ; n'hi ha un nombre finit, posem Q_i , $i = 1, \dots, N$, i cap d'ells no talla V_2 . Sigui Γ el cicle definit per $\Gamma = \sum_{i=1}^N \partial Q_i$, on ∂Q_i és la frontera de Q_i orientada

positivament. Com que $V_1 \subset \bigcup_i Q_i$ és clar que $\text{Ind}(\Gamma, P) = \sum_{i=1}^N \text{Ind}(\partial Q_i, P) = 1$ i només falta veure que $\Gamma \subset U$. Evidentment, Γ no talla V_2 , però tampoc V_1 , com es veu si en l'expressió de Γ fem les cancel·lacions corresponents. En efecte, Γ està format per segments horitzontals i verticals i, si un d'aquests segments, S , tallés V_1 , voldria dir que els dos quadrats adjacents que tenen S com a costat estan entre els Q_i , $i = 1, \dots, N$ i llavors S hauria estat cancel·lat. $\square$

6.2 Versions homològiques de la fórmula de Green i del teorema de Cauchy

6.2.1 La versió homològica del teorema de Cauchy

Una versió molt general del teorema de Cauchy és la següent.

Teorema 6.5. *Si U és un domini del pla, Γ és un cicle homòleg a zero respecte de U i $f \in H(U)$, hom té*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

En conseqüència, si Γ_1 i Γ_2 són cadenes homòlogues respecte de U i $f \in H(U)$, llavors

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Possiblement la demostració més ràpida d'aquest resultat fonamental és la que donem a continuació (deguda a A. F. Beardon) i que es basa en una fórmula de representació integral mitjançant el nucli de Cauchy.

Lema 6.6. *Segui U un domini del pla, $K \subset U$ un compacte i $f \in H(U)$. Llavors existeixen un nombre finit de segments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ continguts a $U \setminus K$ de manera que si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N$, hom té*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in K.$$

Demostració. Segui ε la distància de K al complementari de U . Considerem una quadrícula del pla formada per quadrats de diagonal més petita que ε i considerem els quadrats $Q_1, \dots, Q_m$ d'aquesta quadrícula que tallen K . Si ∂Q_i és la vora de Q_i , com sempre orientada positivament, considerem $\gamma = \sum_i \partial Q_i$.

Un cop fetes totes les cancel·lacions possibles, tindrem,

$$\gamma = \sum_{j=1}^N \gamma_j$$

on cada γ_j és un costat d'algun Q_i i $\gamma_j \subset U \setminus K$.

Així, per a tota funció φ contínua a $\bigcup_j \partial Q_j$, hom té

$$\sum_{i=1}^m \int_{\partial Q_i} \varphi(w) dw = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \varphi(w) dw = \int_{\gamma} \varphi(w) dw.$$

Suposem ara que el punt $z \in K$ no està sobre cap ∂Q_i . Llavors el punt z pertany a un únic quadrat, Q_{i_0} , dels $Q_1, \dots, Q_m$, i aplicant el corollari 4.3 a la funció f i el teorema de Cauchy-Goursat (observació 3.3 a)) a la funció $\omega \rightarrow \frac{f(\omega)}{\omega - z}$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{\partial Q_j} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_{i_0}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \neq i_0} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = f(z). \end{aligned}$$

Així, queda demostrat el lema si z no és en cap ∂Q_i , i per als punts de $\bigcup_i \partial Q_i$ es dedueix per continuïtat. $\square$

Observació 6.1. De fet, en les hipòtesis del lema 6.6 es pot afirmar que els segments $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ formen un sistema de *poligonals tancades* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ contingudes a $U \setminus K$ de manera que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in K, \text{ si } f \in H(U).$$

En efecte, només cal tenir en compte que els segments $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ són la frontera topològica del compacte $Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j$. Llavors cada component connexa de ∂Q és una 1-varietat compacta i connexa i pel teorema 1.31 és una corba de Jordan que, en aquest cas, ha de ser una poligonal. A més el lema 6.6 aplicat a $f = 1$ ens diu ara que tot punt de K pertany a un i només un dels polígons $\text{Int}(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, n$.

El fet que els segments $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ formen un conjunt de poligonals tancades també es pot provar, d'una manera més directa, fent servir un argument combinatori (vegeu [3, pàg. 260] o [11, pàg. 155]).

Demostració del teorema 6.5. Suposem $\Gamma \approx 0(U)$ i $f \in H(U)$. Sigui $K = \Gamma^* \cup \{z \notin \Gamma^* : \text{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\}$, que és el complement a $\mathbb{C}$ de $\{z \notin \Gamma^* : \text{Ind}(\Gamma, z) = 0\}$. Aquest últim conjunt és la unió d'unes quantes components connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, entre les quals hi ha la no acotada, que conté ∞ ; per tant, K és un compacte, i com que $\Gamma \approx 0(U)$, és $K \subset U$. Sigui ara γ com en el lema 6.6; tindrem

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \right\} dz = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{dz}{w-z} \right\} dw.$$

Ara bé, si $w \in \gamma^*$, és $w \in U \setminus K$, i llavors

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{w-z} = -2\pi i \text{Ind}(\Gamma, w) = 0.$$

Observem que l'aplicació del teorema de Fubini per al canvi de l'ordre d'integració és correcta perquè la funció $(z, w) \rightarrow \frac{f(w)}{w-z}$ és contínua sobre el compacte $\Gamma^* \times \gamma^*$. $\square$

Observació 6.2. El teorema 3.24 és un cas particular del teorema 6.5. Per veure-ho només cal recordar que, en les hipòtesis del teorema 3.24, ∂U és un cicle homòleg a zero respecte de l'entorn de $\bar{U}$ en el qual f és holomorfa (exemple 6.3). Això dona una altra demostració del teorema 3.24, que només depèn de la primera etapa de la prova del teorema 3.22.

6.2.2 La fórmula de Green amb multiplicitats

Acabem de donar una demostració directa de la versió homològica del teorema de Cauchy, però de la mateixa manera que la versió clàssica del teorema de Cauchy (teorema 3.24) es pot obtenir com el cas particular de la fórmula de Green (teorema 3.22) quan s'aplica a la forma $f(z) dz$, amb f holomorfa, ens

podem preguntar si hi ha també una versió homològica de la fórmula de Green que doni lloc al teorema 6.5 quan s'aplica a $f(z) dz$.

La resposta és afirmativa i basarem la nova fórmula de Green en la representació integral següent.

Lema 6.7. *Si f és una funció de classe C^1 a $\mathbb{C}$ amb suport compacte, hom té*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w - z} dm(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Aquest lema és una conseqüència directa del teorema 4.2, agafant per a U un disc obert prou gran per tal que $\text{spt}(f) \subset U$.

Observació 6.3. Pel que acabem de dir, el lema 6.7 es basa, aparentment, en la fórmula de Green general (teorema 3.22), que és la que permet fer la demostració del teorema 4.2. Però, de fet, és fàcil veure que n'hi ha prou de conèixer la versió de la fórmula de Green per a rectangles (primera etapa de la prova del teorema 3.22) per a provar el lema 6.7. Només cal seguir la demostració del teorema 4.2 agafant com a U un rectangle, $U \supset \text{spt}(f)$, i per a $z \in U$ treure un petit rectangle R_z , centrat en z . Llavors $U \setminus R_z$ és la unió de vuit rectangles i val la fórmula de Green en aquest domini (fig. 6.3).

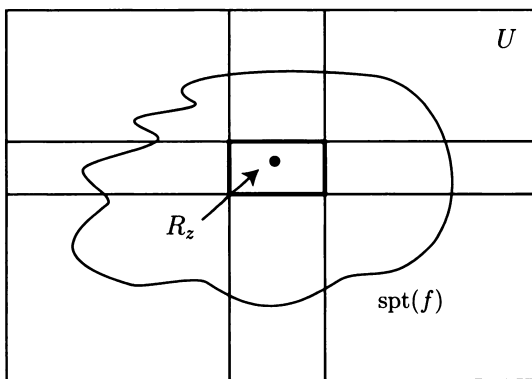


Figura 6.3

Tenim ara el resultat anunciat, que es pot interpretar com una fórmula de Green amb multiplicitats, perquè la forma que s'integra respecte de la mesura de Lebesgue és comptada a cada punt tantes vegades com voltes fa el cicle Γ al voltant del punt (vegeu [4]).

Teorema 6.8 (Versió homològica de la fórmula de Green). *Sigui U un domini del pla complex, f una funció de classe C^1 a U i Γ un cicle homòleg a zero respecte de U . Llavors hom té*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z). \quad (6.1)$$

Més generalment, si $\omega = Pdx + Qdy$ és una 1-forma a U amb coeficients de classe C^1 i $\Gamma \approx 0$ respecte de U , és

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z). \quad (6.2)$$

En particular, si U és simplement connex, les fórmules (6.1) i (6.2) valen per a tot cicle Γ contingut a U .

Notem que, de fet, les integrals del terme de la dreta de (6.1) i de (6.2) estan preses sobre un compacte de U .

Demostració. Posem $K = \Gamma^* \cup \{z \notin \Gamma^* : \text{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\}$, com a la prova del teorema 6.5, de manera que K és un compacte, $K \subset U$. Sigui $\psi \in C^\infty(U)$ una funció amb suport compacte contingut a U de manera que ψ valgui 1 en un entorn de K i apliquem el lema 6.7 a la funció $g = \psi f$. Dóna

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} dm(w).$$

Com que $g = f$ a Γ^* , resulta

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} g(z) dz = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} dm(w) \right) dz.$$

Ara volem utilitzar el teorema de Fubini; per a poder-ho fer és suficient veure que una integral iterada del valor absolut és finita,

$$\int_{\Gamma} \iint_F \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right| \left| \frac{1}{w-z} \right| dm(w) |dz| < +\infty.$$

La integral interior es pren sobre el compacte $F = \text{spt}(g)$ i $\left| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right|$ està acotada a F ; posant $\left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right\|_{\infty} = \sup_F \left| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right|$ resulta que la integral iterada, pel lema 4.1, està majorada per

$$\int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right\|_{\infty} (m(F) + 2\pi) |dz| = L(\Gamma) \left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \right\|_{\infty} (m(F) + 2\pi) < +\infty.$$

Apliquem, doncs, el teorema de Fubini i tenim

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z) dz &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) \left(\int_{\Gamma} \frac{dz}{w-z} \right) dm(w) = \\ &= 2i \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) \text{Ind}(\Gamma, w) dm(w).\end{aligned}$$

Ara bé, si $\text{Ind}(\Gamma, w) \neq 0$ és $w \in K$ i $g = f$ en un entorn de w ; per tant, $\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$ en aquest punt i això prova (6.1).

Si $\omega = P dx + Q dy$ és una forma amb coeficients de classe C^1 i apliquem el que acabem de demostrar a la funció $f = (P - iQ)$ i prenem parts reals, trobem

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \omega &= \text{Re} \int_{\Gamma} f(z) dz = \\ &= 2 \iint_{\mathbb{C}} \text{Ind}(\Gamma, w) \text{Re} \left(i \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \right) dm(w) = \iint_{\mathbb{C}} \text{Ind}(\Gamma, w) d\omega,\end{aligned}$$

que és (6.2). □

És clar que quan f és holomorfa a U , llavors $\bar{\partial}f = 0$ i la igualtat (6.1) dona el teorema de Cauchy (teorema 6.5).

Exemple 6.9. Si Γ és un cicle del pla amb la propietat que $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ per a tota funció $f \in C(\Gamma^*)$, llavors ha de ser $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, per a tot punt $z \notin \Gamma^*$, perquè $w \rightarrow \frac{1}{w-z} \in C(\Gamma^*)$. La fórmula (6.1) ens dona el recíproc: si $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$, per a tot punt $z \notin \Gamma^*$, llavors podem aplicar (6.1) a $U = \mathbb{C}$, $f \in C^1(\mathbb{C})$ i obtenim $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Com que tota funció contínua a Γ^* es pot aproximar per funcions de $C^1(\mathbb{C})$, obtenim la conclusió que volíem. Així doncs, les corbes tancades que donen una integral de línia idènticament nul·la (el funcional $f \rightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz$, $f \in C(\Gamma^*)$, és una mesura sobre Γ^*) són exactament les corbes amb índex idènticament nul. □

Exemple 6.10. L'exemple anterior ens diu que si Γ_1, Γ_2 són dos cicles del pla de manera que $\Gamma_1^* = \Gamma_2^*$ i $\text{Ind}(\Gamma_1, z) = \text{Ind}(\Gamma_2, z)$ per a tot punt $z \notin \Gamma_1^* = \Gamma_2^*$, llavors hom té $\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$ per a tota funció f contínua en el compacte $\Gamma_1^* = \Gamma_2^*$.

Un cas particular d'aquesta situació és quan Γ_2 és una corba tancada que s'obté a partir de Γ_1 per un canvi de paràmetre que conserva el sentit; és a dir, $\Gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ amb $\varphi'(t) > 0$ i $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \varphi$ (vegeu la secció 3.1). La situació que hem descrit és molt més

general, però, i dóna molta flexibilitat a l'hora d'aplicar (6.1). A més a més, pot servir per a calcular algunes integrals que no estan directament vinculades amb la variable complexa. Per exemple, podem fer un “canvi de paràmetre” amb $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ igual a la funció singular de Cantor i obtenim $\int_0^1 \varphi(t)^n dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ si $n \neq -1$ és enter. $\square$

Exemple 6.11. La fórmula (6.1) té aplicació al càlcul d'algunes integrals. Per exemple, si $f \in C^1(U)$, on U és un domini que conté el segment $[-1, 1]$, Γ és un cicle amb $\Gamma^* \subset U \setminus [-1, 1]$ i $g(z)$ és la determinació holomorfa de $\sqrt{z^2 - 1}$ a $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ que és positiva a $[1, \infty)$, resulta per (6.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz - \iint_{\mathbb{C}} \bar{\partial} f(z)g(z) \text{Ind}(\Gamma, z)dm(z) = \\ = -\text{Ind}(\Gamma, 0) \int_{-1}^1 f(t)\sqrt{1-t^2}dt. \end{aligned}$$

Agafant, en particular, $f(z) = z^2$, hom té

$$4 \int_{\Gamma} z^2 \sqrt{z^2 - 1} dz = -\pi i \text{Ind}(\Gamma, 0). \quad \square$$

6.2.3 La fórmula de Cauchy-Green amb multiplicitats i la fórmula integral de Cauchy

En aquesta secció donarem les versions de la fórmula de Cauchy-Green i de la fórmula integral de Cauchy que corresponen a la versió homològica de la fórmula de Green (teorema 6.8).

La primera és una fórmula de descomposició que expressa qualsevol funció f com a suma d'una funció holomorfa i d'un altre terme que depèn només de $\bar{\partial} f$.

Teorema 6.12 (Versió homològica de la fórmula de Cauchy-Green). *Sigui U un domini del pla, Γ un cicle homòleg a zero respecte de U i f una funció de classe C^1 a U . Llavors hom té*

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} \text{Ind}(\Gamma, w) dm(w), \quad z \in U \setminus \Gamma^*. \end{aligned}$$

Demostració. Fixem un punt $z \in U \setminus \Gamma^*$ i prenguem $\varepsilon > 0$ prou petit per tal que $D(z, \varepsilon) \cap \Gamma^* = \emptyset$ i $\bar{D}(z, \varepsilon) \subset U$. Si $\gamma_{\varepsilon}(t) = z + \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (el cercle de

centre z i radi ε recorregut en el sentit positiu), el cicle $\Gamma_\varepsilon = \Gamma - \text{Ind}(\Gamma, z)\gamma_\varepsilon$ és homòleg a zero respecte de l'obert $U \setminus \{z\}$. En efecte, si $w \notin U$, com que $\text{Ind}(\gamma_\varepsilon, w) = 0$ i $\text{Ind}(\Gamma, w) = 0$ (per ser $\Gamma \approx 0(U)$) també és $\text{Ind}(\Gamma_\varepsilon, z) = 0$ i per a $w = z$, $\text{Ind}(\Gamma_\varepsilon, z) = \text{Ind}(\Gamma, z) - \text{Ind}(\Gamma, z) = 0$. Aplicant la igualtat (6.1) a la funció $\frac{f(w)}{w-z}$ i al cicle Γ_ε , resulta

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \text{Ind}(\Gamma, z) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw &= 2i \iint_C \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} \text{Ind}(\Gamma_\varepsilon, w) dm(w) = \\ &= 2i \iint_C \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} \text{Ind}(\Gamma, w) dm(w) - \text{Ind}(\Gamma, z) \iint_{D(z, \varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} dm(w). \end{aligned}$$

Fent $\varepsilon \searrow 0$ i utilitzant el fet que $w \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z}$ és una funció integrable, que té com a conseqüència

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \iint_{D(z, \varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} dm(z) = 0,$$

trobem el resultat desitjat. $\square$

Quan $f \in H(U)$, tenim, en particular, una versió homològica de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 6.13 (Versió homològica de la fórmula integral de Cauchy). *Si U és un domini del pla, Γ un cicle de U homòleg a zero respecte de U i $f \in H(U)$, hom té*

$$\text{Ind}(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in U \setminus \Gamma^* \quad (6.3)$$

i també

$$\text{Ind}(\Gamma, z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad z \in U \setminus \Gamma^*, \quad n = 1, 2, \dots$$

La segona igualtat s'obté de la primera derivant respecte de z sota el signe integral i tenint en compte que $\text{Ind}(\Gamma, \cdot)$ és constant a l'entorn d'un punt $z \notin \Gamma^*$.

La fórmula (6.3) es pot obtenir també directament del teorema de Cauchy (teorema 6.5) si s'aplica a la funció holomorfa

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w-z}, \quad \text{si } w \neq z \quad g(z) = f'(z).$$

Tot seguit donem alguns exemples d'aplicació del teorema i de la fórmula integral de Cauchy.

Exemple 6.14. Si U és simplement connex, $f \in H(U)$, $a \in U$ i Γ és un cicle de U que no passa per a , els valors possibles de $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw$ són $\text{Ind}(\Gamma, z)f(a)$, és a dir, un enter multiplicat per $f(a)$. Per exemple, $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^w}{w-1} dw$, on C és un cercle que no passa per 1, val 0 si 1 és a l'exterior de C i e si 1 és a dins de C . $\square$

Exemple 6.15. Suposem que U és simplement connex, $f \in H(U)$ (per exemple, $U = \mathbb{C}$ i f una funció entera), $a, b \in U$, $a \neq b$, i C és un cercle dins de U que no passa per a, b (sempre orientat en el sentit positiu). Calculem tots els valors possibles de

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Si a, b són a l'exterior de C , $I = 0$, pel teorema de Cauchy aplicat a la funció $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}$, que és holomorfa a l'interior de C . Si a és dins de C i b és fora, llavors $I = \frac{f(a)}{a-b}$, per la fórmula integral de Cauchy aplicada a $g(z) = \frac{f(z)}{z-b}$, que és holomorfa dins de C . Anàlogament, si b és dins de C i a és fora, $I = \frac{f(b)}{b-a}$, per la fórmula integral de Cauchy aplicada a $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$. Considerem finalment el cas que tant a com b siguin a l'interior de C . Siguin C_1, C_2 dos petits cercles centrats en a, b respectivament, dins de C , orientats positivament. A l'obert $U \setminus \{a, b\}$, en el qual $\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}$ és holomorfa, el cicle C és homòleg a $C_1 + C_2$; per tant,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \\ &= \frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a} = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}. \end{aligned} \quad \square$$

Exemple 6.16. Si γ és el camí de la figura 6.4, calculem $I = \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz$. Utilitzant la fórmula integral de Cauchy per a les derivades, obtenim

$$I = \frac{\text{Ind}(\gamma, 0)(\sin)^{(3)}(0)}{3!} 2\pi i = \frac{-2(-\cos 0)}{6} 2\pi i = \frac{2\pi}{3} i. \quad \square$$

6.3 El teorema dels residus i el principi de l'argument en versió homològica

Hi ha també una versió homològica del teorema dels residus la qual és, de fet, una generalització del teorema de Cauchy (teorema 6.5) per al cas que f pugui tenir singularitats.

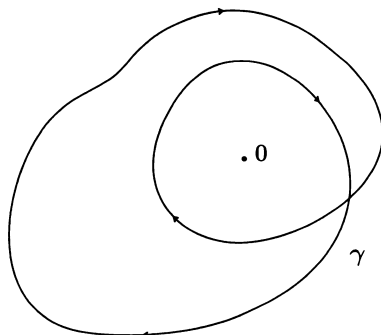


Figura 6.4

Teorema 6.17 (Versió homològica del teorema dels residus). *Sigui U un domini del pla complex i A un subconjunt tancat de U , format per punts aïllats (així A és finit o numerable amb possibles punts d'acumulació a ∂U). Sigui $f \in H(U \setminus A)$, de manera que cada punt $a \in A$ és una singularitat aïllada de f , i Γ un cicle dins de $U \setminus A$, homòleg a zero respecte de U . Llavors hom té*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Ind}(\Gamma, a) \text{Res}(f, a).$$

Observació 6.4. Els dos termes de la igualtat anterior estan ben definits; el de l'esquerra, perquè $f \in C(\Gamma^*)$, i el de la dreta és, en realitat, una suma finita perquè cada component acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, que és on $\text{Ind}(\Gamma, \cdot)$ és no nul, està inclosa en un compacte de U que té com a molt un nombre finit de punts de A .

Demostració. Sigui $a_1, \dots, a_N$ els punts de A per als quals $\text{Ind}(\Gamma, a_j) \neq 0$. Per a cada $j = 1, \dots, N$ sigui γ_j una petita circumferència de centre a_j , recorreguda en sentit directe, de manera que no contingui en el seu interior cap altre punt a_i , $i \neq j$, i que no talli Γ^* (fig 6.5). Llavors el cicle

$$\Gamma - \sum_{j=1}^N \text{Ind}(\Gamma, a_j) \gamma_j$$

és homòleg a zero respecte de l'obert $U \setminus A$. Pel teorema de Cauchy, resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^N \text{Ind}(\Gamma, a_j) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Com que cadascuna de les integrals del terme de la dreta val $2\pi i \text{Res}(f, a_j)$, queda provat el teorema. $\square$

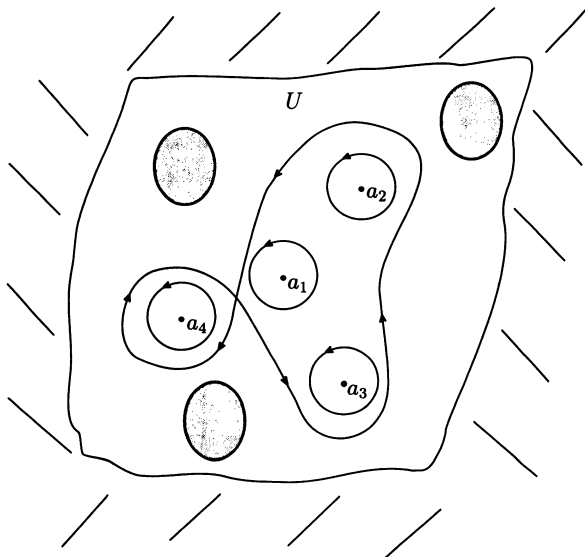


Figura 6.5

El teorema de Cauchy és el cas que $A = \emptyset$ en el teorema anterior. La fórmula de Cauchy n'és també un cas particular: si $f \in H(U)$, $\Gamma \sim 0$ respecte de U i $z \in U \setminus \Gamma^*$, apliquem el teorema dels residus a $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$, amb $A = \{z\}$ i $\text{Res}(g, z) = f(z)$ i obtenim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(w) dw = \text{Ind}(\Gamma, z) f(z).$$

Finalment, es pot donar també la versió corresponent del principi de l'argument.

Teorema 6.18 (Versió homològica del principi de l'argument). *Sigui U un domini de $\mathbb{C}$ i f una funció meromorfa a U . Sigui $\{a_j\}$ els zeros de f a U i n_j la multiplicitat de a_j i $\{b_j\}$ els pols de f a U i m_j la multiplicitat de b_j . Sigui Γ un cicle dins de U , que no passi per cap pol ni per cap zero de f , tal que $\Gamma \approx 0$ respecte de U . Considerem també una funció g holomorfa a U . Aleshores, hom té*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j g(a_j) n_j \text{Ind}(\gamma, a_j) - \sum_j g(b_j) m_j \text{Ind}(\gamma, b_j). \quad (6.4)$$

Demostració. És la mateixa que la del teorema 5.25, però fent servir ara la versió homològica del teorema dels residus (teorema 6.17). $\square$

Evidentment, també hi ha les versions homològiques del corol·lari 5.26 i del teorema 5.27, que el lector pot formular adequadament.

6.4 El teorema de Cauchy per a formes diferencials localment exactes

El teorema de Cauchy afirma que la integral de la forma $\omega = f(z) dz$, amb f holomorfa a U , al llarg d'un cicle homòleg a zero respecte de U , val zero. És natural preguntar-se si aquest resultat també és cert quan ω és una 1-forma general $\omega = P dx + Q dy$, localment exacta, que és la condició que, en el cas $\omega = f(z) dz$, assegura que f és holomorfa. La resposta és afirmativa i la dona el resultat següent (vegeu [4]).

Teorema 6.19 (Teorema de Cauchy per a formes diferencials). *Si $\omega = P dx + Q dy$ és una 1-forma localment exacta en un domini $U \subset \mathbb{C}$, amb coeficients P, Q continus a U i Γ és un cicle, $\Gamma \approx 0$ respecte de U , llavors hom té*

$$\int_{\Gamma} \omega = 0.$$

En conseqüència, si Γ_1, Γ_2 són cadenes homòlogues respecte de U , és $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$.

Aquest resultat es troba a [1, teorema 16, pàg. 144]. En aquest llibre, l'autor en dona una prova geomètrica i pregunta si és possible modificar la demostració del teorema de Cauchy de manera que cobreixi aquest cas més general. Si imposem que la forma ω tingui els coeficients $P, Q \in C^1(U)$, llavors la resposta a aquesta pregunta és el teorema 6.8. En efecte, aquest teorema és una prova del teorema de Cauchy (fórmula (6.1) quan $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$) i la fórmula (6.2) dona el teorema 6.19 quan ω és localment exacta i de classe C^1 , perquè aleshores ω és tancada, és a dir, $P_y = Q_x$. El cas general del teorema 6.19, quan la forma ω només és contínua, es pot provar amb un procés estàndard de regularització de la forma ω , fent convolucions amb una aproximació de la identitat. Aquest procés apareix en la prova del resultat següent que destaquem perquè és una caracterització, per dualitat, de les formes localment exactes.

Proposició 6.20. *En un domini U del pla, una 1-forma contínua $\omega = Pdx + Qdy$ és localment exacta si i només si*

$$\iint_U \left(P \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (6.5)$$

per a tota funció φ de classe C^∞ amb suport compacte contingut a U .

Demostració. Si en un disc $\overline{D} \subset U$, ω és exacta, llavors és $\omega = dh$, per a alguna funció h , i si φ té suport a D , resulta, per la fórmula de Green,

$$\iint_U \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial D} h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + h \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Utilitzant particions de la unitat hom veu que tota funció de classe C^∞ amb suport compacte a U és una suma finita de funcions del mateix tipus que tenen suport en discos i llavors s'obté (6.5) per a $\varphi \in C^\infty$ amb $\text{spt}(\varphi) \subset U$.

Recíprocament, si es compleix la condició (6.5), sigui Φ_ε , $\varepsilon > 0$, una aproximació de la identitat del tipus $\Phi_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-2} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ amb $\Phi \in C^\infty(\mathbb{C})$, $\text{spt}(\Phi) \subset \mathbb{D}$ i $\iint_{\mathbb{C}} \Phi dx dy = 1$ i considerem les formes $\omega^\varepsilon = P^\varepsilon dx + Q^\varepsilon dy$ amb

$$\begin{aligned} P^\varepsilon(x, y) &= \iint_{\mathbb{C}} P(t, s) \Phi_\varepsilon(x - t, y - s) dt ds \\ Q^\varepsilon(x, y) &= \iint_{\mathbb{C}} Q(t, s) \Phi_\varepsilon(x - t, y - s) dt ds \end{aligned} \quad (6.6)$$

Aleshores ω^ε és de classe C^∞ a $U_\varepsilon = \{z \in U : d(z, U^C) > \varepsilon\}$ i $\omega^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \omega$ (i.e. $P^\varepsilon \rightarrow P$, $Q^\varepsilon \rightarrow Q$ si $\varepsilon \rightarrow 0$), uniformement sobre els compactes de U .

Ara, si $z = x + iy \in U_\varepsilon$, hom té:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^\varepsilon}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y}(x, y) &= \iint_{\mathbb{C}} Q(t, s) \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}(x - t, y - s) dt ds - \\ &\quad - \iint_{\mathbb{C}} P(t, s) \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial y}(x - t, y - s) dt ds \\ &= - \left[\iint_{\mathbb{C}} Q(t, s) \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t}(x - t, y - s) dt ds - \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\mathbb{C}} P(t, s) \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial s}(x - t, y - s) dt ds \right] = 0, \end{aligned}$$

per (6.5). Per tant, ω^ε és tancada i de classe C^1 i, per (6.2), $\int_{\partial \Delta} \omega^\varepsilon = 0$ sempre que Δ sigui un triangle contingut a U i $\varepsilon > 0$ prou petit. Com que $\omega^\varepsilon \rightarrow \omega$ uniformement a Δ , hom té $\int_{\partial \Delta} \omega = 0$ i ω és localment exacta (corol·lari 3.12). $\square$

Observació 6.5. La proposició 6.20 es pot estendre a 1-formes contínues $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$ definides a oberts U de $\mathbb{R}^n$. Llavors la condició (6.5) s'ha de substituir per $\int_U \omega \wedge d\eta = 0$ per a tota $(n-2)$ -forma η de classe C^∞ amb suport compacte dins de U . Aquesta condició, que coincideix amb la (6.5) quan $n=2$, substitueix la condició $d\omega = 0$ que compleix la forma ω quan és de classe C^1 i localment exacta, i s'expressa dient que val la igualtat $d\omega = 0$ en el sentit feble (vegeu l'apartat 7.7.2).

Demostració del teorema 6.19. Agafem el compacte K i la funció ψ com a la prova del teorema 6.8 i canviem P i Q per $P\psi$ i $Q\psi$ i ω és ara $\psi Pdx + \psi Qdy$. Definim, per a $\varepsilon > 0$, les formes ω_ε , com a la prova de la proposició 6.20; és a dir, $\omega_\varepsilon = P_\varepsilon dx + Q_\varepsilon dy$ amb $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ definides per (6.6) a partir de $P\psi$ i $Q\psi$.

Llavors hom té, en primer lloc,

$$\int_{\Gamma} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \omega_\varepsilon.$$

Ara bé, les formes ω_ε són de classe C^1 i, d'acord amb la prova de la proposició 6.20 compleixen $Q_\varepsilon^c = P_\varepsilon^c$, en un entorn de K , si ω és localment exacta. Per tant, podem aplicar (6.2), que dóna $\int_{\Gamma} \omega_\varepsilon = 0$ i, en conseqüència, $\int_{\Gamma} \omega = 0$. $\square$

6.5 Caracteritzacions dels dominis simplement connexos

Hi ha diverses maneres d'expressar, des d'un punt de vista topològic, que un domini és simplement connex. Es tracta de formular amb rigor la idea que el domini no té "forats". Un resultat en aquest sentit és la proposició 6.4, que utilitza la idea de cicle homòleg a zero. Hi ha una altra caracterització de la connexió simple, molt senzilla, que només requereix considerar les corbes de Jordan del domini, i encara una altra atenent la seva frontera. Ho formulem tot plegat en l'enunciat següent:

Teorema 6.21. *Per a un domini U del pla complex, les afirmacions següents són equivalents:*

- U és simplement connex, és a dir, $\mathbb{C}^* \setminus U$ és connex.*
- Tot cicle contingut a U és homòleg a zero respecte de U .*
- Per a tota corba de Jordan tancada γ amb $\gamma^* \subset U$, també és $\text{Int}(\gamma) \subset U$.*
- La frontera de U a $\mathbb{C}^*$ és connexa.*

Demostració. L'equivalència de *a)* amb *b)* és la proposició 6.4. L'equivalència de *b)* amb *c)* és conseqüència de l'observació 6.1 i de la prova de la proposició 6.4. Per a provar l'equivalència amb *d)* situem-nos a $\mathbb{C}^*$ i suposem, sense pèrdua de generalitat, que U conté el punt de l'infinit i, per tant, $K = \mathbb{C}^* \setminus U$ és compacte. Si C és una component connexa de K , hom té $\partial C = C \cap \partial K$; així, cada component no trivial de K conté almenys una component no trivial de $\partial K = \partial U$, fet que prova que *d)* implica *a)*. Per veure el recíproc, suposem que U és simplement connex, és a dir, K és connex, i que ∂K no és connex. Llavors ∂K és la reunió de dos compactes disjunts E_1, E_2 . Sigui $\varepsilon > 0$ la distància entre E_1, E_2 i considerem, com en el lema 6.6, una quadrícula del pla formada per quadrats tancats de diagonal estrictament menor que ε , i sigui Q la reunió dels quadrats que tallen E_1 , de manera que E_2 és exterior a Q . En l'observació 6.1 ja hem vist que la frontera de Q consta de poligonals de Jordan tancades $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, de manera que tot punt de E_1 és dins d'un dels polígons $\text{Int}(\Gamma_i)$ i, per construcció, aquestes poligonals no tallen ∂K . En conseqüència, alguna d'aquestes poligonals, diguem-ne Γ , té un punt de E_1 en el seu interior, $\text{Int}(\Gamma)$. Atès que E_1 forma part de la frontera de U , $\text{Int}(\Gamma)$ talla U i també K . El mateix pot dir-se de l'exterior de Γ , $\text{Ext}(\Gamma)$, perquè conté E_2 . Així, U talla tant $\text{Int} \Gamma$ com $\text{Ext}(\Gamma)$ i, essent connex, tallarà la polygonal Γ ; anàlogament, el conjunt connex K talla $\text{Int}(\Gamma)$ i $\text{Ext}(\Gamma)$ i, per tant, tallarà Γ . Amb això la polygonal Γ talla U i també K i, per tant, ha de tallar ∂K , en contradicció amb el fet que cap de les poligonals tallaven ∂K . $\square$

D'una manera genèrica, podem dir que les propietats locals de les funcions holomorfes valen globalment en un domini simplement connex. A més, la validesa d'aquestes propietats caracteritza analíticament aquests dominis, tal com ho especifica el resultat següent:

Teorema 6.22. *Per a un domini U del pla complex són equivalents les afirmacions següents:*

- a) U és simplement connex.*
- b) Per a tota funció $f \in H(U)$ i per a tot cicle Γ contingut a U , hom té $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$,*
- c) Tota funció holomorfa a U té una primitiva holomorfa a U .*
- d) Tota funció harmònica real a U té una funció harmònica conjugada a U i és, per tant, la part real d'una funció holomorfa.*
- e) Tota funció holomorfa i sense zeros a U admet una determinació del logaritme a U .*

- f) Tota funció holomorfa i sense zeros a U , admet una determinació de l'arrel quadrada a U .
- g) Per a tota funció u , harmònica i real a U , hi ha una funció f , holomorfa i sense zeros a U , de manera que $u = \operatorname{Log} |f|$ a U .
- h) Tota 1-forma amb coeficients continus a U , localment exacta, és exacta a U .

Demostració. Si U és simplement connex, la conclusió del teorema de Cauchy, $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, val per a tota $f \in H(U)$ i per a tot cicle $\Gamma \subset U$ i, per tant, a) $\Rightarrow$ b). D'altra banda, b) $\Rightarrow$ c) pel teorema 3.13.

La implicació c) $\Rightarrow$ d) ja ha aparegut en l'apartat 3.7.3; si u és harmònica real a U , considerem la funció holomorfa $f = u_x - iu_y$. Si $F' = f$ i $v = \operatorname{Re} F$, llavors $v_x - iv_y = F' = f = u_x - iu_y$ i, així, $\vec{\nabla} u = \vec{\nabla} v$ i, per tant, $u - v$ és constant igual a c . Aleshores $F + c$ té part real u , i la seva part imaginària és una funció conjugada de u .

Si d) val i $f \in H(U)$ no té zeros, considerem $h = \operatorname{Log} |f|$. Aquesta funció és harmònica, pel corollari 4.31. Si F és una funció holomorfa que té part real $h = \operatorname{Log} |f|$, aleshores e^F és una funció holomorfa que té mòdul $e^{\operatorname{Re} F} = |f|$; això significa que $e^{-F} f$ té mòdul 1, fet que implica que és constant. Si $e^{-F} f = e^{i\varphi}$, $F + i\varphi$ és una determinació de $\log f$ i val e).

Si es compleix e) i $f \in H(U)$, $f(z) \neq 0$ per a $z \in U$, existeix $g \in H(U)$ amb $f = e^g$. Llavors la funció $h = e^{1/2g}$ compleix $h^2 = f$ i, per tant, hem comprovat f).

Ara veurem que f) $\Rightarrow$ a). En efecte si a) fos falsa, existiria, pel teorema 6.21, una corba de Jordan tancada $\gamma \subset U$ i un punt $a \notin U$ amb $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 1$. Ara la funció $z \rightarrow z - a$ és holomorfa i sense zeros a U i no pot tenir cap determinació de l'arrel quadrada, perquè si $f \in H(U)$ complís $f^2(z) = z - a$, hom tindria $\frac{1}{z-a} = \frac{2f'}{f}$, i d'aquí

$$1 = \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Això dóna $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2}$, però si posem $\Gamma = f \circ \gamma$, aquesta última integral val $\operatorname{Ind}(\Gamma, 0)$, que és un número enter. Així doncs, f) no seria certa.

Fins ara hem provat que les sis primeres afirmacions del teorema són equivalents.

L'afirmació g) és una conseqüència de d). En efecte, si u és harmònica real, tindrem, per d), $u = \operatorname{Re} g$ amb $g \in H(U)$. La funció $f = e^g$ és holomorfa i sense zeros i $|f| = e^u$, és a dir, $u = \operatorname{Log} |f|$.

A més, si g) val, llavors podem provar f). En efecte, si $g \in H(U)$ no té zeros, la funció $\frac{1}{2} \text{Log } |g|$ és harmònica i hi haurà $f \in H(U)$ amb $\frac{1}{2} \text{Log } |g| = |f|$. Això vol dir que $\frac{g}{f^2}$ és holomorfa a U i té mòdul 1. Per tant, és una constant $e^{i\alpha}$ i la funció $e^{i\alpha/2} f$ és una arrel quadrada de g .

Finalment, provem l'equivalència: $a) \iff h)$. Sigui ω contínua i localment exacta. Si U és simplement connex, a tot cicle Γ és homòleg a 0 respecte de U i, pel teorema 6.19, és $\int_{\Gamma} \omega = 0$, que vol dir que ω és exacta a U . Recíprocament per a tot punt $a \notin U$, la forma $\frac{1}{z-a} dz$ és tancada, i si val $h)$, serà exacta. En conseqüència $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$ o sigui $\text{Ind}(\Gamma, a) = 0$ sigui quin sigui el cicle Γ de U , que vol dir que U és simplement connex. $\square$

Observació 6.6. És clar que l'afirmació $e)$ és equivalent a dir que tota funció holomorfa i sense zeros a U té una determinació de l'argument a U , afirmació que, per $f)$, és equivalent a l'existència de determinació de l'arrel quadrada.

En canvi, en un domini no simplement connex hi pot haver funcions que tinguin determinació de l'arrel quadrada sense que existeixi una determinació del seu argument (exemple 1.21).

6.6 El primer grup d'homologia d'un domini i el teorema de de Rham. Homotopia

Sigui U un domini del pla complex. La relació $\Gamma_1 \approx \Gamma_2 (U)$ (Γ_1, Γ_2 cicles homòlegs respecte de U) estableix una relació d'equivalència en el conjunt de tots els cicles de U . Designarem per $\tilde{\Gamma}$ la classe d'equivalència de Γ i per $H^1(U)$ el conjunt de classes d'equivalència. $H^1(U)$ s'anomena *primer grup d'homologia de U* .

Considerem ara l'espai de les 1-formes reals de classe C^1 i tancades a U ; representarem aquest espai per $T(U)$. Pel teorema de Green (6.2), si $\Gamma_1 \approx \Gamma_2 (U)$, hom té $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$. Això significa que

$$\langle \tilde{\Gamma}, \omega \rangle = \int_{\Gamma} \omega$$

és una bona definició, és a dir, no depèn del representant escollit a la classe $\tilde{\Gamma}$.

Dins de $T(U)$ hi tenim les formes exactes, és a dir, les de la forma $\omega = dh$ amb $h \in C^2(U)$, que constitueixen un subespai de $T(U)$, que representarem per $E(U)$. La relació d'equivalència: $\omega_1 \sim \omega_2$ si $\omega_1 - \omega_2$ és exacta, té com a conjunt de classes d'equivalència l'espai quocient $T(U)/E(U)$. Aquest espai

quocient s'anomena *primer grup de cohomologia diferenciable de U* i es designa per $E^1(U)$.

Si $\omega_1 - \omega_2$ és exacta, evidentment és $\int_{\Gamma} \omega_1 = \int_{\Gamma} \omega_2$, per a qualsevol cicle Γ . Així, $\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega} \rangle = \int_{\Gamma} \omega$ només depèn de la classe d'equivalència de ω a $T(U)/E(U) = E^1(U)$, que indiquem per $\tilde{\omega}$. Resumint,

$$\langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega} \rangle = \int_{\Gamma} \omega$$

és una dualitat entre $H^1(U)$ i $E^1(U)$, ben definida. Cada $\tilde{\omega} \in E^1(U)$ defineix una aplicació

$$\begin{array}{ccc} H^1(U) & \xrightarrow{I(\tilde{\omega})} & \mathbb{R} \\ \tilde{\Gamma} & \longmapsto & \langle \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega} \rangle = \int_{\Gamma} \omega. \end{array}$$

Aquesta aplicació, $I(\tilde{\omega})$, és, clarament, un morfisme de grups:

$$I(\tilde{\omega})(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2) = n_1I(\tilde{\omega})(\Gamma_1) + n_2I(\tilde{\omega})(\Gamma_2), \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

L'espai dels morfismes $H^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$ s'anomena *primer grup de cohomologia de U* i es designa per $H^1(U)^*$.

Teorema 6.23 (Teorema de de Rham). *L'aplicació $\tilde{\omega} \mapsto I(\tilde{\omega})$ és una bijecció entre $E^1(U)$ i $H^1(U)^*$.*

La injectivitat significa que si ω_1, ω_2 són formes tancades i $\int_{\Gamma} \omega_1 = \int_{\Gamma} \omega_2$, per a tot cicle Γ dins de U , aleshores $\omega_1 - \omega_2$ és exacta. Això ja ho sabem.

L'exhaustivitat significa que si assignem un número real, $a(\Gamma)$, a cada cicle Γ de U de manera que $a(\Gamma_1) = a(\Gamma_2)$ si $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ (U) i $a(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2) = n_1a(\Gamma_1) + n_2a(\Gamma_2)$, aleshores hi ha una forma ω , tancada, tal que $\int_{\Gamma} \omega = a(\Gamma)$ per a cada Γ .

En el cas que U sigui simplement connex, és $H^1(U)^* = \{0\}$ i el teorema de de Rham dóna $E^1(U) = \{0\}$, és a dir, que tota forma tancada és exacta.

Per a tot domini U , es pot provar que $H^1(U)$ és un grup lliure commutatiu. Això significa que si $\tilde{\Gamma}_i, i \in I$, són els seus generadors, els números $a(\tilde{\Gamma}_i), i \in I$, es poden assignar lliurement. Per tant, una forma tancada ω és exacta si i només si $\int_{\Gamma_i} \omega = 0$, per a tot $i \in I$ i per a qualsevol família $(a_i)_{i \in I}$ de números reals, hi ha una forma tancada ω a U tal que $\int_{\Gamma_i} \omega = a_i, i \in I$.

La prova del teorema 6.23 es pot veure a [13, pàg. 154]. Aquí justificarem el teorema de de Rham només en el cas particular que U sigui un domini n -connex. Recordem que això significa que $\mathbb{C}^* \setminus U$ té n components connexes: la component C_{∞} , que conté ∞ , i $n - 1$ components acotades $C_1, \dots, C_{n-1}$,

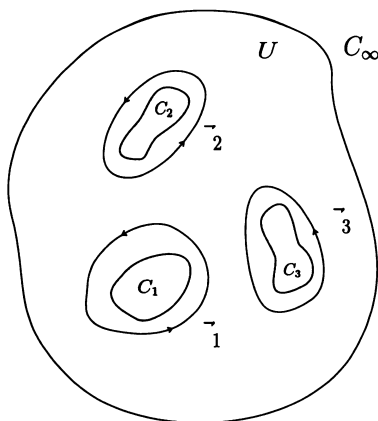


Figura 6.6

que són conjunts compactes connexos de $\mathbb{C}$. En aquest cas es pot provar que $H^1(U)$ és el grup lliure commutatiu $\mathbb{Z}^{n-1}$, engendrat per uns camins tancats γ_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ que fan una volta a cada "forat", $C_1, \dots, C_{n-1}$ de U (fig. 6.6). Si U té vora regular a trossos llavors U és n -connex per a algun n de manera que ∂U té n components connexes, que són exactament $\partial C_\infty, \partial C_1, \dots, \partial C_{n-1}$ i podem prendre $\gamma_j = \partial C_j$, $j = 1, \dots, n-1$. En general, és suficient considerar $\varepsilon < \min d(C_j, C_l)$, $j \neq l$, recobrir cada component C_j per un nombre finit de quadrats de costat més petit que ε i prendre com γ_j la frontera de la reunió d'aquests quadrats.

Essent $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ generadors de $H^1(U)$, una forma ω tancada en U és exacta si i només $\int_{\gamma_i} \omega = 0$, $j = 1, \dots, n-1$. En altres paraules, l'aplicació $I(\tilde{\omega})$ de de Rham pot interpretar-se en aquest cas com

$$\gamma_j \mapsto \left(\int_{\gamma_j} \omega \right)_{j=1, \dots, n-1}$$

L'exhaustivitat d'aquesta aplicació és fàcil de provar ara. En efecte, escollim punts $\alpha_j \in C_j$, $j = 1, \dots, n-1$; donats $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, la forma

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{dz}{z - \alpha_j}$$

és tancada i compleix

$$\int_{\gamma_k} \omega = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - \alpha_j} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \partial_{jk} = a_k.$$

Veiem que, en aquest cas, $E^1(U)$ és isomorf a $H(U)/H(U)'$, on $H(U)$ designa l'espai de funcions holomorfes a U i $H(U)'$ és el subespai format per les funcions que tenen primitiva holomorfa. Això és cert per a un domini U qualsevol, però no ho demostrarem aquí. També, en el cas general, en la definició de $T(U)$ i $E(U)$ es pot escollir el grau de diferenciabilitat de les formes. Així, podem treballar amb formes $\omega \in C^\infty(U)$ o bé considerar

$$T(U) = \{\omega \in C(U) : \omega \text{ és localment exacta}\}$$

$$E(U) = \{\omega \in C(U) : \omega \text{ és exacta, és a dir } \omega = dh, \text{ amb } h \in C^1(U)\}.$$

Un concepte molt relacionat amb l'homologia de camins és el d'*homotopia*. Dues corbes tancades $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ són *homòtopes* a U si hi ha una funció contínua

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow U$$

tal que $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)$, per a $t \in [0, 1]$, i $H(0, s) = H(1, s)$, per a $s \in [0, 1]$. La funció H s'anomena una *homotopia* entre γ_0 i γ_1 . Podem pensar en H com en una família de corbes tancades $\gamma_s(t) = H(t, s)$ que es deformen contínuament des de γ_0 fins a γ_1 . No és difícil provar que si dos cicles són homòtops a U , llavors són homòlegs respecte de U . El recíproc no és cert; per exemple, a l'obert $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, siguin α, β els camins tancats donats per $\alpha(t) = -1 + e^{2\pi it}$, $\beta(t) = 1 - e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$ i considerem els cicles $\Gamma_1 = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, $\Gamma_2 = \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$ (aquí α^{-1} designa el camí oposat de α i $\alpha\beta$ la composició de camins). Llavors Γ_1, Γ_2 són homòlegs respecte de U , però no són homòtops a U .

Exemple 6.24. Sigui U un obert del pla que sigui estrellat respecte d'un punt. Si suposem, sense perdre generalitat, que $0 \in U$ i que U és estrellat respecte de l'origen (això vol dir que, per a cada punt $z \in U$, el segment $[0, z]$ està contingut a U), llavors, per a cada número $0 < \lambda < 1$, la dilatació $z \rightarrow \lambda z$ transforma U en si mateix, i quan λ varia de 0 a 1, defineix una homotopia entre qualsevol corba tancada $\gamma \subset U$ i la corba nul·la reduïda a l'origen. Per tant, tota corba tancada de U és homòloga a 0 i U és simplement connex. Un cas particular és quan U és convex, perquè llavors U és estrellat respecte de qualsevol punt de U . $\square$

Si fixem un punt $a \in U$ i restringim totes les consideracions a camins tancats d'origen i final a , la relació $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si γ_1, γ_2 són homòtops a U és una relació d'equivalència. El conjunt quocient s'anomena *primer grup d'homotopia* o *grup fonamental amb punt base a* , i es designa per $\Pi(U, a)$. Per a punts $a, b \in U$, $\Pi(U, a)$ i $\Pi(U, b)$ són isomorfs i parlem, senzillament, del *grup fonamental* $\Pi(U)$. Aquest grup no és en general commutatiu. Un teorema bàsic de topologia algebraica estableix que $H^1(U)$ és l'abelianitzat de $\Pi(U)$ (el quocient de $\Pi(U)$ pel seu commutador).

Evidentment, si $\Pi(U)$ és trivial, també ho és $H^1(U)$. Malgrat que l'exemple que hem posat abans mostra que dos cicles homòlegs no són necessàriament homòtops, és cert que si $H^1(U)$ és trivial (tots els cicles són homòlegs a zero), aleshores també $\Pi(U)$ és trivial (tots els cicles són homòtops en un punt). En particular, U és simplement connex si i només si $\Pi(U)$ és trivial.

Exemple 6.25. Si U és simplement connex i tenim una aplicació contínua $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow U$, llavors $\gamma(\mathbb{T})$ és una corba tancada a U que, pel que acabem de dir, ha de ser homòtopa a un punt. La funció $H(t, s)$ que defineix l'homotopia dóna, per a cada $s \in [0, 1]$, una corba tancada que la podem parametritzar per la circumferència de centre 0 i radi s . Obtenim així una extensió contínua de γ al disc tancat $\overline{\mathbb{D}}$. És a dir, tota aplicació contínua de $\mathbb{T}$ a U , simplement connex, és la restricció d'una aplicació contínua de $\overline{\mathbb{D}}$ a U . $\square$

Resumint, hem vist que l'equació $dh = \omega = Pdx + Qdy$, és a dir, el sistema d'equacions

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = Q,$$

amb $P, Q \in C^1(U)$ funcions donades i complint $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, té tants impediments com generadors té $H^1(U)$. Els oberts simplement connexos són els únics dominis en els quals aquestes equacions es poden resoldre sense cap restricció.

En canvi, la mateixa qüestió per a 2-formes, és a dir, resoldre $d\omega = \varphi dx \wedge dy$, on ara $\omega = Pdx + Qdy$ és la incògnita (vegeu l'apartat 3.6.4 per a la definició de $d\omega$), equival a l'equació

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \varphi$$

amb φ una funció donada a U , la qual no té cap impediment per a un domini U del pla. Això equival a l'anul·lació d'un segon grup d'homologia, $H^2(U)$.

Com a observació final, cal dir que la definició de $H^1(U)$ d'aquesta secció és específica per a dominis del pla, ja que utilitza la noció d'índex. En general, els grups d'homologia en un espai topològic qualsevol es defineixen fent servir altres conceptes.

6.7 Funcions harmòniques a dominis n -connexos

Segons el teorema 6.22, un domini U és simplement connex si i només si tota funció harmònica real a U és la part real d'una funció holomorfa a U , és a dir té una harmònica conjugada a U . Si U no és simplement connex i $\alpha \in \mathbb{C}$ és un punt d'una component acotada de $\mathbb{C} \setminus U$, la funció $\text{Log } |z - \alpha|$ és harmònica a U i no té harmònica conjugada a U .

Així mateix, pel teorema 6.22 una altra vegada, sabem que U és simplement connex quan tota funció u , real i harmònica a U , és de la forma $u = \text{Log } |f|$, amb $f \in H(U)$ i sense zeros a U . En el teorema 5.20 s'ha vist que quan U és una corona centrada a l'origen (exemple típic d'un domini 2-connex), l'expressió general d'una funció harmònica real a U és

$$u(z) = a \text{Log } |z| + \text{Re } f$$

amb f holomorfa a U i $a \in \mathbb{R}$. Escrivint

$$u = a \text{Log } \left| z \exp \left(\frac{f}{a} \right) \right|$$

es veu que tota funció u harmònica real a U és de la forma $a \text{Log } |g|$ amb g holomorfa a U sense zeros i a una constant real. Tot seguit utilitzarem les idees de la secció 6.6 per generalitzar aquest fet a tots els dominis n -connexos.

En la discussió anterior, si la constant a és entera, es pot escriure $u = a \text{Log } |g| = \text{Log } |g^a|$ amb g^a holomorfa (vegeu el teorema 6.27).

Teorema 6.26. *Sigui U un domini n -connex, $C_1, \dots, C_{n-1}$ les components acotades de $\mathbb{C}^* \setminus U$, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ un sistema de corbes tancades regulars que generin $H^1(U)$ i $\alpha_j \in C_j$, per a $j = 1, \dots, n-1$. Llavors l'expressió general d'una funció u harmònica real a U és*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \text{Log } |z - \alpha_j| + \text{Re } f$$

on f és una funció holomorfa a U i $a_j = \int_{\gamma_j} \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} ds$ ($\vec{N}$ indica el vector unitari normal exterior a γ_j). En conseqüència, u és la part real d'una funció holomorfa si i només si es compleix $a_j = 0$ per a $j = 1, \dots, n-1$.

També

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \text{Log } |f_j|$$

amb $f_j \in H(U)$ sense zeros i $b_j \in \mathbb{R}$, és l'expressió general de les funcions reals i harmòniques a U .

Demostració. Recordem que una funció u , harmònica a U , és la part real d'una funció holomorfa si i només si la funció holomorfa $h = u_x - iu_y = 2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ té una primitiva holomorfa a U ; és a dir, si per a tot camí tancat γ contingut a U , hom té

$$\int_{\gamma} h(z)dz = i \int_{\gamma} d^*u = 0, \quad (6.7)$$

amb $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ i $\int_{\gamma} d^*u = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} ds$, on $\bar{N}$ és el vector unitari normal exterior a γ (vegeu l'apartat 3.7.3).

Si, com en la secció 6.6, triem $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ camins tancats generadors de $H^1(U)$, la condició (6.7) equival a

$$\int_{\gamma_j} h(z)dz = 0 \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ara, donada una funció u harmònica a U , considerem la funció holomorfa associada $h = u_x - iu_y$, definim les constants a_j , $j = 1, \dots, n-1$ per

$$\int_{\gamma_j} h(z)dz = i \int_{\gamma_j} d^*u = ia_j$$

i posem

$$v(z) = u(z) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \operatorname{Log} |z - \alpha_j|.$$

La funció harmònica $u_j(z) = \operatorname{Log} |z - \alpha_j|$ té la funció holomorfa associada $h_j = (u_j)_x - i(u_j)_y = \frac{1}{z - \alpha_j}$, de manera que $h_0 = v_x - iv_y = h - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n-1} a_j h_j$ és la funció holomorfa associada a la funció harmònica v .

Com que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} h_0(z)dz &= ia_k - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - \alpha_j} = \\ &= ia_k - \sum_{j=1}^{n-1} ia_j \partial_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

resulta que h_0 compleix la condició (6.7) i, per tant, $v = \operatorname{Re} f$ amb f holomorfa a U . $\square$

Finalment, ens podem plantejar la qüestió de saber quines funcions u , harmòniques i reals en un domini U , són de la forma $u = \text{Log } |g|$ amb g holomorfa i sense zeros a U . Si $u = \text{Log } |g|$, llavors hom té

$$h = u_x - iu_y = \frac{g'}{g},$$

i, per tant,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d^*u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} = \text{Ind}(g \circ \gamma, 0),$$

que és un número enter, per a tota corba γ tancada i continguda a U . Aquesta condició necessària també és suficient.

Teorema 6.27. *Si U és un domini del pla, una funció u harmònica i real a U és de la forma $u = \text{Log } |g|$ amb g holomorfa a U i sense zeros si i només si la integral*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d^*u$$

pren valors enters per a tot camí tancat γ contingut a U .

Demostració. Fem la demostració de la suficiència només en el cas de dominis n -connexos. Amb les notacions de la prova del teorema 6.26, hom té $a_j = 2\pi k_j$ amb $k_j \in \mathbb{Z}$. Llavors, per aquest mateix teorema, resulta

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n-1} k_j \text{Log } |z - \alpha_j| + \text{Re } f = \text{Log} \left| \prod_{j=1}^{n-1} (z - \alpha_j)^{k_j} \exp(f) \right|$$

i $g = \prod_{j=1}^{n-1} (z - \alpha_j)^{k_j} \exp(f)$ és holomorfa. □

6.8 Exercicis

1. Sigui U un domini del pla. Proveu que si la frontera de U a $\mathbb{C}$ no té cap component acotada, llavors U és simplement connex.
2. Proveu que un domini U és simplement connex si i només si per a tot obert acotat V amb $\partial V \subset U$, és $V \subset U$.
3. Siguin U_1, U_2 dos dominis simplement connexos de $\mathbb{C}$ de manera que $U_1 \cap U_2$ és connex i no buit. Proveu que $U_1 \cup U_2$ és un domini simplement connex.
4. Proveu que la reunió d'una successió creixent de dominis simplement connexos és simplement connex.
5. Considerem el cicle $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ on $\gamma_j(t) = r_j e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r_2 < r_1$, $j=1, 2$ i sigui $f \in C^1(U)$ on U és un obert tal que $\Gamma^* \cup \{z: \text{Ind}(\Gamma, z) \neq 0\} \subset U$. Proveu directament que val el teorema de Green per a Γ i f (fórmula (6.1)). Feu servir aquest resultat per a donar una prova del lema 6.7.
6. Proveu que si γ és una corba tancada a $\mathbb{C}$, llavors les components acotades de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ són simplement connexes, mentre que la component no acotada és doblement connexa.
7. Proveu que si K és un compacte del pla i f una funció holomorfa en un entorn de K , aleshores f és pot aproximar, uniformement sobre K , per combinacions lineals de funcions de la forma $z \rightarrow \frac{1}{z-w}$ amb $w \notin K$.
8. Proveu que dues corbes tancades que són homòtopes en un domini U també són homòlogues a U . Proveu que el recíproc és cert per al domini $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
9. Sigui $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua i posem $\gamma(t) = f(e^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Si $w \in \mathbb{C}$ i $\text{Ind}(\gamma, w) \neq 0$, proveu que f pren el valor w al disc unitat $\mathbb{D}$.
10. Sigui $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funció contínua. Proveu que f té un punt fix a $\mathbb{D}$.
11. Demostreu el teorema fonamental de l'àlgebra, és a dir, que tot polinomi P de grau més gran o igual que 1 té almenys una arrel complexa, calculant $\text{Ind}(\gamma_r, 0)$, on γ_r és la imatge del cercle $C(0, r)$ pel polinomi P .
12. Proveu que a tot domini U del pla que tingui els punts 1 i -1 en la mateixa component connexa de $\mathbb{C} \setminus U$, es pot definir una determinació de la funció $\sqrt{1-z^2}$. Determineu tots els valors possibles de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

quan γ és una corba tancada regular a trossos de U .

13. Enuncieu i demostreu una versió del teorema de Rouché (teorema 5.31) per a dues funcions f, g contínues en un compacte $K \subset \mathbb{C}$ i holomorfes a l'interior de K .
14. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ al disc unitat $\mathbb{D}$ i sigui $F \subset \mathbb{D}$ un conjunt tancat que conté l'origen. Posem $m = \inf\{|f(z)| : z \in \partial F\}$ i sigui N el nombre de zeros de f que pertanyen a F . Proveu que hom té

$$m \leq |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_N|.$$

Proveu també que aquesta estimació millora si s'aplica a les potències successives de f

15. Sigui U una corona centrada a l'origen. Proveu les afirmacions següents:
- a) Si Γ_1 i Γ_2 són dos cicles de U i $f \in H(U)$, llavors

$$\text{Ind}(\Gamma_1, 0) \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \text{Ind}(\Gamma_2, 0) \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

- b) Si $f \in H(U)$ no té zeros a U , llavors f té una determinació del logaritme a U si i només si es compleix $\text{Ind}(f \circ \Gamma, 0) = 0$ per a tot cicle Γ de U tal que $\text{Ind}(\Gamma, 0) \neq 0$. Proveu també que en aquest cas, de fet, és $\text{Ind}(f \circ \Gamma, 0) = 0$ per a tot cicle Γ de U .

16. Sigui Γ un cicle homòleg a zero respecte del domini U i $f \in H(U)$. Proveu les fórmules següents:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} |f'(z)|^2 \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z) = \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \sum_{z \in f^{-1}(w)} \text{Ind}(\Gamma, z) dm(w). \end{aligned}$$

En el cas que $\text{Ind}(\Gamma, z) \in \{0, 1\}$ per a tot punt $z \notin \Gamma^*$, si posem $G = \{z : \text{Ind}(\Gamma, z) = 1\}$, l'última integral és

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \#\{z \in G : f(z) = w\} dm(w)$$

i representa l'àrea de $f(G)$ amb multiplicitats (el signe $\#$ indica el nombre d'elements del conjunt que té a la seva dreta).

17. Sigui Γ un cicle regular homòleg a zero respecte del domini U i $f, g \in C^2(U)$. Proveu les fórmules

i)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \cdot \vec{T} |dz| + i \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \cdot \vec{N} |dz| &= \\ &= \frac{i}{2} \iint_{\mathbb{C}} \bar{f}(z) \Delta \bar{g}(z) \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z) + \\ &+ 2i \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z) \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z). \end{aligned}$$

ii)

$$\int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{N}} |dz| = \iint_{\mathbb{C}} (f \Delta g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g)(z) \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z)$$

iii)

$$\int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{T}} |dz| = \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) (z) \text{Ind}(\Gamma, z) dm(z).$$

Com sempre $\vec{T}$, $\vec{N}$ indiquen el vector tangent unitari i el vector normal unitari exterior, respectivament, a Γ i $z \cdot w = \text{Re}(z\bar{w})$ és el producte escalar real, identificant un número complex amb un vector de $\mathbb{R}^2$.

18. Calculeu

$$\int_{C(0,3/2)} \frac{\text{sh } 5z}{(1+z^2)z^2} dz.$$

19. Sigui γ l'el·lipse centrada a l'origen de semieixos $a, b > 0$, recorreguda en sentit positiu. Calculeu

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

a partir del valor de $\text{Ind}(\gamma, 0)$.

20. Sigui U un domini de $\mathbb{C}$, n -connex i $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_{\infty}$ les components connexes de $\mathbb{C}^* \setminus U$ ($\infty \in C_{\infty}$). Proveu que existeixen cicles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ a U de manera que

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Gamma_j, a) &= 1 & \text{si } a \in C_j, \\ \text{Ind}(\Gamma_j, a) &= 0 & \text{si } a \in (\mathbb{C} \setminus U) \setminus U_j \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Proveu ara que per a tot cicle Γ de U existeix una única combinació lineal $a_1\Gamma_1 + \cdots + a_{n-1}\Gamma_{n-1}$ amb $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, de manera que

$$\Gamma \approx a_1\Gamma_1 + \cdots + a_{n-1}\Gamma_{n-1} \text{ respecte de } U.$$

Funcions harmòniques

Amb els resultats de la secció 3.7 s'ha posat de manifest que, en el cas de dominis del pla complex, hi ha una vinculació important entre l'anàlisi complexa i la teoria de funcions harmòniques. Només cal recordar, per exemple, que tota funció harmònica real és localment la part real d'una funció holomorfa. Més significativament, aquest vincle l'estableix el fet que, sempre localment, les funcions holomorfes es corresponen amb els camps vectorials que són alhora conservatius i solenoïdals i que aquests camps són exactament els gradients de les funcions harmòniques.

En aquest capítol estudiarem de forma sistemàtica les funcions harmòniques i l'operador de Laplace en un context de variable real. Els problemes principals que tractarem són el problema de Dirichlet, el problema de Neumann i la solució de l'equació de Poisson. L'equació de Poisson, amb condicions de contorn, ens porta també als problemes de Dirichlet i de Neumann no homogenis.

Atès que bona part del desenvolupament dels temes és en termes de variable real, hem optat per treballar en el context natural, això és, en dominis de $\mathbb{R}^n$, destacant explícitament les especificitats del cas $n = 2$ i la relació amb la teoria de les funcions holomorfes.

L'operador de Laplace apareix en la majoria d'equacions de la física matemàtica clàssica, raó per la qual la relació entre funcions harmòniques o holomorfes i problemes de la física és d'un gran interès. Comencem el capítol descrivint detalladament alguns exemples d'aquesta relació.

7.1 Problemes de la física clàssica i funcions harmòniques

7.1.1 Distribució de la calor en el cas estacionari

Suposem que tenim una substància que ocupa un cos C a l'espai $\mathbb{R}^3$, sobre la qual es distribueix un flux de calor. Indiquem per $T(x, t)$ la temperatura en el punt $x \in C$ a l'instant t . Quan la temperatura no depèn de t diem que la distribució de temperatures és *estacionària*. També considerem el camp de flux de la calor, $\vec{H}(x, t)$, que a cada punt i a cada instant indica la direcció i la magnitud del flux de calor. D'aquesta manera, si S és una superfície tancada continguda a C i $\vec{N}$ el vector normal unitari exterior a S , $\int_S \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle dA$ representa el flux de calor que surt per S . La llei de Fourier estableix que, a cada instant, es compleix $\vec{H} = -k \vec{\nabla} T$, on $k > 0$ és la *conductivitat tèrmica*. Aquesta equació tradueix el fet intuïtiu que el flux de calor va de les zones més calentes a les zones més fredes i amb una intensitat proporcional a la diferència de temperatures. Unes altres variables que intervenen són la *densitat* ρ i la *capacitat calorífica* c de la substància que ocupa el cos C ; podem pensar que $c(x)$ és la quantitat de calor necessària per augmentar un grau la temperatura d'un gram de substància situada en el punt x . Suposem que B és una bola dins de C amb frontera S ; el flux de calor que entra per S entre dos instants $t_1 < t_2$ serà

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_S k \langle \vec{\nabla} T, \vec{N} \rangle dA dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial T}{\partial \vec{N}} dA dt.$$

Si hi ha fonts de calor amb densitat coneguda $F(x, t)$, la quantitat de calor que ha entrat dins de B en l'interval de temps (t_1, t_2) és

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_B F dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial T}{\partial \vec{N}} dA dt.$$

Aquesta quantitat de calor s'ha invertit en passar de la distribució T a l'instant t_1 a la distribució T a l'instant t_2 ; per tant, és igual a

$$\int_B c(x) \rho(x) (T(x, t_2) - T(x, t_1)) dV(x) = \int_B \int_{t_1}^{t_2} c(x) \rho(x) \frac{\partial T}{\partial t} dt dV(x).$$

Igualant i aplicant el teorema de la divergència a la integral sobre S , resulta

$$\int_B \int_{t_1}^{t_2} \left(c(x) \rho(x) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x) \vec{\nabla} T) \right) dt dV(x) = \int_B \int_{t_1}^{t_2} F dt dV.$$

Com que això val per a tota bola i tot interval de temps, s'arriba a l'equació en derivades parcials que regeix la difusió de la calor,

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x) \vec{\nabla} T) = F.$$

Quan c , ρ i k són constants es troba

$$a \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = F,$$

amb a constant.

En general, per a trobar la distribució de temperatura $T(\cdot, t)$ a tot instant $t > 0$, cal conèixer la distribució inicial $T(\cdot, 0)$ i les condicions de contorn a la frontera de C . En el cas estacionari, veiem que T compleix l'equació $\Delta T = F$, i la distribució de la temperatura és una funció harmònica a les regions on no hi ha fonts de calor. Les condicions de contorn poden ser, per exemple, conèixer T a la frontera (temperatura ambient) o conèixer $\frac{\partial T}{\partial \vec{N}}$ a la frontera (hi ha aïllament tèrmic quan aquesta derivada és zero). El problema

$$\Delta T = 0, \quad T(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial C,$$

amb una funció φ definida sobre ∂C és un primer exemple del *problema de Dirichlet*, i el problema

$$\Delta T = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{N}}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial C,$$

amb una funció φ donada sobre ∂C , és un exemple del *problema de Neumann*.

Les corbes de nivell de T , $T(x, y) = c$, són les línies *isotermes*. Si la funció harmònica T té una funció harmònica conjugada $\tilde{T}$, les corbes de nivell de $\tilde{T}$, que són perpendiculars a les isotermes (apartat 3.7.3), són les línies al llarg de les quals es mou el flux de la calor.

7.1.2 Camps newtonians

Un *camp newtonià* a $\mathbb{R}^3$ és un camp vectorial definit per una distribució de massa, d'acord amb la llei de la gravitació de Newton. Si la massa és puntual i situada a l'origen, el camp és, llevat de constants,

$$\vec{X}(x) = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Si la distribució de massa està donada per una densitat ρ en un cos C , llavors cal sumar els camps definits per totes les masses infinitesimals $\rho(y) dV(y)$ i el camp és

$$\vec{X}(x) = - \int_C \frac{x - y}{|x - y|^3} \rho(y) dV(y).$$

Un camp newtonià sempre és conservatiu; tan sols cal observar que, en el cas d'una massa puntual, hom té

$$-\frac{x}{|x|^3} = \vec{\nabla} \frac{1}{|x|}.$$

En el cas d'una densitat ρ , sumant resulta

$$-\int_C \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(y) dV(y) = \vec{\nabla} \int_C \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dV(y),$$

de manera que

$$\Phi(x) = \int_C \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dV(y)$$

és la funció potencial del camp. Aquest potencial s'anomena *potencial newtonià*. Les mateixes consideracions són certes per als camps elèctrics, ja que la llei de Coulomb, que s'aplica en aquest cas, és formalment igual a la de Newton.

Un càlcul senzill mostra que en el cas d'una massa puntual unitat es compleix

$$\operatorname{div} \frac{x}{|x|^3} = 0 \quad \text{si } x \neq 0,$$

i, per tant, també

$$\operatorname{div} \int_C \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(y) dV(y) = 0 \quad \text{si } x \notin C.$$

Això vol dir que el flux del camp $\vec{X}$ és zero sobre tota superfície que no contingui massa en el seu interior. Ara bé, els camps newtonians no són solenoidals; en el cas puntual, si S és l'esfera de radi r centrada a l'origen, el producte escalar $\langle \vec{X}, \vec{N} \rangle$ val $-\frac{1}{r^2}$. Per tant, el flux a través de S és

$$\int_S \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA = -4\pi.$$

Aquest també serà el flux a través de qualsevol superfície tancada que tingui la massa puntual en el seu interior, com es veu aplicant el teorema de la divergència a la diferència entre la superfície i una esfera. Així si $S = \partial C$ és una superfície que tanca un cos C i no hi ha massa sobre S , resulta la *llei de Gauss* que diu que el flux del camp a través de S val $-4\pi M$, on M és la massa total continguda a C i que es formula amb la igualtat

$$\int_S \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA = -4\pi \int_C \rho dV.$$

A les regions on el camp $\vec{X}$ i el potencial Φ són prou regulars, el teorema de la divergència dóna $\int_S \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA = \int_C \operatorname{div} \vec{X} dV$ i hom té

$$\operatorname{div} \vec{X} = -4\pi\rho, \quad \text{o bé} \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = \Delta\Phi = -4\pi\rho.$$

Aquesta darrera equació és un exemple de l'*equació de Poisson*. En particular, el potencial Φ és una funció harmònica a les regions lliures de massa o de càrrega. Fins aquí, hem fet el plantejament a $\mathbb{R}^3$; ara bé, si ρ és independent d'una de les tres variables, aleshores Φ també ho és, per la qual cosa també té interès l'estudi de l'equació de Poisson en dimensió dos. En aquest capítol veurem detalladament en quins casos, efectivament, el camp o el potencial són prou regulars i com s'ha d'interpretar l'equació de Poisson en general.

7.1.3 Flux d'un fluid ideal

a) L'equació de continuïtat. Considerem una regió de l'espai per la qual circula un fluid, un líquid per exemple. Com podem descriure el moviment del fluid? En primer lloc, cal considerar un camp de velocitats $\vec{X}(x, t)$ que indica la velocitat de la partícula que a l'instant t ocupa la posició x i també la densitat del fluid, $\rho(x, t)$, de manera que

$$\int_C \rho(x, t) dV(x)$$

és la massa total de fluid contingut dins el domini C , a l'instant t . També podem considerar les trajectòries $\phi_t(x)$ que indiquen la posició, a l'instant t , de la partícula que a l'instant $t = 0$ es troba a x ; les trajectòries són les solucions del sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dy}{dt} = \vec{X}(y, t), \quad y(0) = x.$$

Imposem, ara, el principi de conservació de la massa. Considerem una regió C a l'instant t i computem de dues maneres diferents la taxa de variació de la massa de fluid que conté: d'una banda, és

$$\frac{d}{dt} \int_C \rho(x, t) dV(x) = \int_C \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dV(x).$$

D'altra banda, la massa que surt a través de la frontera de C , ho fa amb una taxa igual a

$$\int_{\partial C} \rho(x, t) (\langle \vec{X}(x, t), \vec{N} \rangle) dA(x) = \int_C \operatorname{div}(\rho \vec{X}) dV(x).$$

Canviant el signe de la segona taxa i igualant-la a la primera obtenim l'*equació de continuïtat*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{X}) = 0. \quad (7.1)$$

A aquesta mateixa equació s'hi pot arribar imposant que la massa de fluid que conté $\phi_t(C)$ a l'instant t és constant al llarg del temps i ens serà útil reobtenir (7.1) des d'aquest punt de vista: si $J_t(x)$ designa el jacobí de la transformació ϕ_t , és

$$\int_{\phi_t(C)} \rho(x, t) dV(x) = \int_C \rho(\phi_t(x), t) J_t(x) dV(x).$$

Imposar la conservació de la massa significa, doncs, que s'ha de complir l'equació

$$0 = \frac{d}{dt}(\rho(\phi_t(x), t) J_t(x)) = J_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad}(\rho) \vec{X} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t}(J_t(x)).$$

Un càlcul demostra que $\frac{\partial}{\partial t}(J_t(x)) = J_t(x) \operatorname{div}(\vec{X})$ i dividint per J_t retrobem l'equació de continuïtat.

El mateix càlcul serveix per a derivar integrals com ara

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(C)} \rho(x, t) F(x, t) dV(x), \quad (7.2)$$

on F és una funció escalar o vectorial. En efecte, fent el mateix canvi de variable que abans, derivant sota el signe integral i utilitzant que ρJ_t té derivada zero, obtenim per a (7.2) l'expressió

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_C \rho(\phi_t(x), t) J_t(x) F(\phi_t(x), t) dV(x) &= \\ &= \int_C \rho(\phi_t(x), t) J_t(x) \left(\frac{\partial F}{\partial t}(\phi_t(x), t) + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} F(\phi_t(x), t) \rangle \right) dV(x). \end{aligned}$$

Tornant a canviar de variables, queda

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(C)} \rho(x, t) F(x, t) dV(x) = \int_{\phi_t(C)} \rho(x, t) \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} F(x, t) \rangle \right) dV(x).$$

Aquí $\vec{\nabla} F$ actua component a component si F és vectorial. És costum utilitzar la notació $\langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle$ per a designar l'operador $\sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, de manera que el darrer terme s'escrui també $\langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle F$.

b) Fluids perfectes: les equacions d'Euler. Quant $F = \vec{X}$, l'expressió (7.2) és la variació de la quantitat de moviment, que, d'acord amb la segona llei de Newton, cal igualar amb el total de forces que actuen a l'instant t sobre $\phi_t(C)$. Aquestes forces tenen dues components, una d'externa i una d'interna. Se suposa que les forces externes estan descrites per una densitat de força externa per unitat de massa $f(x, t)$, de manera que

$$\int_{\phi_t(C)} \rho(x, t) f(x, t) dV(x)$$

és el total de les forces externes. El *principi de Cauchy* estableix que les forces internes actuen sobre la superfície que limita $\phi_t(C)$ i són descrites per una densitat superficial de força $\vec{\Sigma}(x, \vec{N}, t)$, de manera que

$$\int_{\partial\phi_t(C)} \vec{\Sigma}(x, \vec{N}, t) dA(x)$$

és el total de les forces internes. Com sempre, $\vec{N}$ indica el vector normal a $\partial\phi_t(C)$. A més, $\vec{\Sigma}(x, \vec{N}, t)$ és lineal en $\vec{N}$, és a dir, és de la forma $\vec{\Sigma}(x, \vec{N}, t) = \langle \mathbf{S}(x, t), \vec{N} \rangle$, on $\mathbf{S}$ és una matriu, anomenada *tensor d'esforços*. Utilitzant el teorema de la divergència podem escriure el total de forces internes sota la forma

$$\int_{\phi_t(C)} \operatorname{div}(\mathbf{S}(x, t)) dV(x),$$

on interpretem que l'operador divergència actua a cada fila de $\mathbf{S}$. Aplicant la llei de Newton, obtenim les *equacions d'Euler*

$$\rho(x, t) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \vec{X}(x, t) \right) = \rho(x, t) f(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{S}(x, t).$$

Un fluid es diu que és *perfecte* si les forces internes que actuen a cada regió ho fan només en la direcció normal a la frontera de la regió, en cada punt. És a dir, si es compleix $\mathbf{S}(x, t) = -p(x, t)\mathbf{I}$, per a una certa funció p , que s'anomena *pressió interna* del fluid i on $\mathbf{I}$ representa la matriu idèntica. En aquest cas, les equacions d'Euler s'escriuen

$$\rho(x, t) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \vec{X}(x, t) \right) = \rho(x, t) f(x, t) - \vec{\nabla} p(x, t).$$

Observem que fins aquí tenim quatre equacions, la de continuïtat i les tres que s'obtenen prenent components en les equacions d'Euler, però tenim cinc incògnites: les tres components de $\vec{X}$, ρ i p . El problema de descriure el moviment del fluid no està, per tant, determinat.

c) Fluids incompressibles. Un fluid es diu que és *incompressible* si el volum de $\phi_t(C)$ es manté constant respecte de t , per a tota regió C ; això equival a imposar $J_t(x) = 1$, és a dir, $\text{div}(\vec{X}) = 0$; per l'equació de continuïtat, també equival a dir que $\frac{d}{dt}\rho(\phi_t(x), x) = 0$, que significa que la densitat es manté constant al llarg de les trajectòries. Per a un fluid perfecte i incompressible tenim llavors una equació més, en total cinc, i en principi aquestes cinc equacions haurien de ser suficients per determinar el moviment, a partir de condicions inicials o de contorn. Si el fluid, és a més a més, homogeni, en el sentit que la densitat ρ és constant respecte de x , llavors es incompressible quan ρ és constant també respecte de t . Les equacions d'Euler que controlen el moviment del fluid, són en aquest cas, si suposem $\rho = 1$,

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \vec{X}(x, t) = f(x, t) - \vec{\nabla} p(x, t), \quad \text{div}(\vec{X}) = 0. \quad (7.3)$$

Per determinar completament el moviment, típicament necessitem condicions inicials sobre p , $\vec{X}$ i també condicions de contorn sobre $\vec{X}$. Per exemple, si el moviment té lloc dins un tub U amb parets impermeables, una condició de contorn natural és $\langle \vec{X}, \vec{N} \rangle = 0$ a la frontera de U , on $\vec{N}$ és el vector normal a aquesta frontera.

Un concepte important és la *vorticitat*, $\vec{\xi}$, d'un fluid. Aquesta magnitud mesura la tendència a girar del camp de velocitats $\vec{X}$ i es defineix com el rotacional de $\vec{X}$, és a dir, $\vec{\xi} = \text{rot}(\vec{X}) = \vec{\nabla} \times \vec{X}$. El fluid s'anomena *irrotacional* si $\vec{\xi} = 0$. Per a fluids perfectes, incompressibles i homogenis (suposem $\rho = 1$) les equacions del moviment poden expressar-se en termes de la vorticitat de la manera següent:

Suposem, per simplificar, que no actuen forces externes, és a dir, $f(x, t) = 0$. La identitat

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{X}|^2 = \vec{X} \times (\vec{\nabla} \times \vec{X}) + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \vec{X}$$

substituïda a la primera equació de (7.3) dona

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (|\vec{X}|^2) - \vec{X} \times (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = -\vec{\nabla} p(x, t).$$

Prenent rotacionals els gradients desapareixen i resulta

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{X} \times \vec{\xi}) = 0,$$

que és el mateix que

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \left\{ \langle \vec{\xi}, \vec{\nabla} \rangle \vec{X} - \vec{\xi} \langle \vec{\nabla}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \vec{\xi} + \vec{X} \langle \vec{\nabla}, \vec{\xi} \rangle \right\} = 0.$$

El darrer terme és zero (divergència d'un rotacional) i utilitzant $\text{div}(\vec{X}) = \langle \vec{\nabla}, \vec{X} \rangle = 0$, les equacions d'Euler s'escriuen

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \langle \vec{\xi}, \vec{\nabla} \rangle + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \vec{\xi} = 0, \quad \text{div}(\vec{X}) = 0. \quad (7.4)$$

d) Fluids en un pla. En el cas de fluids plans, la vorticitat $\vec{\xi}$ només té efectiva la tercera component, que anomenem ξ , i el segon terme de la primera equació de (7.4) és nul. Les equacions d'Euler queden

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \xi = 0, \quad \text{div}(\vec{X}) = 0.$$

Suposem que la regió U del pla on té lloc el moviment és simplement connexa; llavors la condició d'incompressibilitat sobre el camp $\vec{X} = (u, v)$ és $u_x + v_y = 0$, que ens diu que $-v dx + u dy$ és una forma tancada i, per tant, exacta. Existeix, doncs, una funció $\psi(x, y, t)$ tal que $u = \psi_y, v = -\psi_x$ (s'acostuma a escriure $\vec{X} = \vec{\nabla}^\perp \psi$). Per a t fix, les línies de corrent són les corbes de nivell de ψ . En termes de ψ , la vorticitat és $\xi = -\Delta\psi$. Si imposem la condició de contorn $\vec{X} \cdot \vec{N} = 0$ a la frontera de U , llavors aquesta frontera ha de ser una corba de nivell i, afegint-hi una constant, podem suposar $\psi = 0$ a la frontera. Amb tot plegat, el moviment d'un fluid pla, perfecte, incompressible i homogeni queda descrit per les condicions

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \langle \vec{X}, \vec{\nabla} \rangle \xi = 0, \quad \Delta\psi = -\xi, \quad \psi(x) = 0, \quad x \in \partial U, \quad \vec{X} = \vec{\nabla}^\perp \psi.$$

Si coneixem ξ en un instant t , llavors coneixem ψ i, per tant, $\vec{X}$ també a l'instant t . Així, ξ determina $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, amb la qual cosa només necessitem conèixer la vorticitat inicial.

Si el moviment del fluid té lloc en un obert U de R^3 , simplement connex, llavors hi ha una funció potencial Φ tal que $\vec{X} = \vec{\nabla}\Phi$ i arribem a l'equació de Laplace

$$\Delta\Phi = \vec{\nabla}^2\Phi = 0$$

a U . En aquest cas, les condicions de contorn naturals consisteixen a prefixar el valor de $\langle \vec{X}, \vec{N} \rangle = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{N}}$ a la frontera de U , i queda plantejat un problema de Neumann.

7.2 Funcions harmòniques a dominis de $\mathbb{R}^n$

7.2.1 El laplacà

És clar que l'aparició de l'operador de Laplace en les equacions de la física matemàtica es pot explicar per les lleis de la física tal com hem fet en la secció anterior, però també es pot justificar des d'una perspectiva matemàtica.

Les lleis de la física clàssica utilitzen mesures de posició i de temps referides a un sistema de referència i a un origen de temps. Posem que les coordenades $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ designen la posició d'un punt de $\mathbb{R}^n$ respecte d'uns eixos cartesianes i un origen de coordenades. Considerar uns altres eixos cartesianes i un altre origen significa passar de les coordenades $(x_1, \dots, x_n)$ a unes altres $(y_1, \dots, y_n)$; la relació entre els vectors columna $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ és del tipus

$$\vec{Y} = \vec{A} + O\vec{X}$$

on $\vec{A}$ és un vector de translació i O és una transformació unitària, és a dir, que preserva les distàncies o el producte escalar, propietat que es tradueix en la condició $O^t = O^{-1}$ (O^t és la trasposta de O). La transformació $\vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ s'anomena *desplaçament* de $\mathbb{R}^n$ i el conjunt de tots els desplaçaments és un grup de transformacions de $\mathbb{R}^n$.

Els operadors diferencials lineals s'expressen, en un sistema de coordenades $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, per

$$L = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Aquí, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ és un multiíndex, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ és la seva longitud,

$$D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

i $a_\alpha(x)$ són funcions. El número natural N és l'ordre de l'operador. Els operadors diferencials actuen sobre les funcions u segons $u \mapsto Lu = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$.

Si $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és un difeomorfisme (un canvi de coordenades general), anomenarem φ^*L l'operador definit per l'equació

$$(\varphi^*L)(v) \circ \varphi = L(v \circ \varphi).$$

Si $L = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, llavors φ^*L tindrà una expressió $\sum b_\beta(y) D_y^\beta$, que ob-

tindríem reiterant la regla de la cadena i identificant coeficients en la igualtat

$$\sum b_\beta(y) D_y^\beta v = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha (v \circ \varphi).$$

Direm que L és *invariant per* φ si $\varphi^* L = L$, és a dir, si $(Lv) \circ \varphi = L(v \circ \varphi)$, per a qualsevol funció v .

Naturalment, els operadors de la física clàssica no poden dependre d'una elecció arbitrària dels eixos i de l'origen de coordenades. Dit d'una altra manera, si descrivim fenòmens que veiem invariants per desplaçaments, els operadors que fem servir també han de ser invariants.

Teorema 7.1. *Els operadors diferencials L que són invariants pel grup dels desplaçaments són, exactament, els del tipus $L = P(\Delta)$ on P és un polinomi d'una variable i Δ el laplacà.*

Demostració. Observem, en primer lloc, que es compleixen les regles naturals

$$\begin{aligned} (\varphi_1^* \circ \varphi_2^*)(L) &= (\varphi_1 \circ \varphi_2)^*(L) \\ \varphi^*(L_1 \cdot L_2) &= \varphi^* L_1 \cdot \varphi^* L_2, \end{aligned}$$

si φ_1, φ_2 són difeomorfismes de $\mathbb{R}^n$ i L_1, L_2 operadors diferencials lineals. Per tant, per a veure que tot operador de la forma $P(\Delta)$ és invariant pel grup de desplaçaments és suficient veure que Δ ho és per les translacions i les transformacions unitàries. La invariància per translacions és òbvia. Si φ és una transformació unitària de matriu $O = (u_{ij})$, llavors $y_i = \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n u_{ij} x_j$ i hom té

$$\begin{aligned} \Delta(v \circ \varphi)(x) &= \Delta[v(\varphi_1 x, \dots, \varphi_n x)] = \Delta \left[v \left(\sum_j u_{1j} x_j, \dots, \sum_j u_{nj} x_j \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[v \left(\sum_j u_{1j} x_j, \dots, \sum_j u_{nj} x_j \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_\rho} u_{\rho k} = \sum_{k,\rho=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_\rho \partial y_j} u_{\rho k} u_{jk} = \\ &= \sum_{\rho,j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_\rho \partial y_j} \sum_{k=1}^n u_{\rho k} u_{jk} = \sum_{\rho,j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_\rho \partial y_j} \delta_{\rho j} = \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_\rho^2} = (\Delta v)(y). \end{aligned}$$

Recíprocament, suposem que $L = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ és invariant pels desplaçaments. La invariància per translacions obliga que cada a_α sigui constant. A la igualtat $(Lv) \circ O = L(v \circ O)$, vàlida per a tota transformació unitària O , posem-hi la funció $v_\xi(x) = e^{\xi \cdot x}$, on $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$. Com que $v_\xi(Ox) = e^{\xi \cdot Ox} = e^{O^t \xi \cdot x}$, obtenim

$$L(v_\xi \circ O)(x) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha [e^{O^t \xi \cdot x}] = \left[\sum_\alpha a_\alpha (O^t \xi)_1^{\alpha_1} \dots (O^t \xi)_n^{\alpha_n} \right] e^{O^t \xi \cdot x},$$

que escrivim en la forma $\left[\sum_\alpha a_\alpha (O^t \xi)^\alpha \right] e^{O^t \xi \cdot x}$. D'altra banda, hom té $Lv_\xi(x) = \left(\sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha \right) e^{\xi \cdot x}$ i $Lv_\xi(Ox) = \left(\sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha \right) e^{\xi \cdot Ox} = \left(\sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha \right) e^{O^t \xi \cdot x}$. En conseqüència, ha de ser

$$\sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha = \sum_\alpha a_\alpha (O^t \xi)^\alpha$$

per a tota matriu unitària O . Això és el mateix que dir que el polinomi $\sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$ és radial, és a dir, pren valors constants en esferes, la qual cosa només és possible si és de la forma $P(|\xi|^2)$. $\square$

Sovint, en aquest capítol, utilitzarem les *identitats de Green*, que són fórmules integrals en les quals intervé el laplacià i que es dedueixen del teorema de la divergència. Sigui U un domini acotat de $\mathbb{R}^n$ de manera que ∂U sigui una hipersuperfície regular i orientem ∂U amb la normal unitària exterior $\vec{N}$. Si u, v són dues funcions dues vegades diferenciables en un entorn de $\bar{U}$ amb $\Delta u, \Delta v$ funcions contínues a $\bar{U}$ i apliquem el teorema 3.32 al camp $\vec{X} = u \vec{\nabla} v$, obtenim la *primera identitat de Green*:

$$\int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} dA = \int_U \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \rangle dV + \int_U u \Delta v dV. \quad (7.5)$$

Permutant u i v al terme de l'esquerra de (7.5) i restant les dues igualtats corresponents obtenim la *segona identitat de Green*:

$$\int_{\partial U} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \right) dA = \int_U (u \Delta v - v \Delta u) dV. \quad (7.6)$$

En particular, prenent $u = v$ a (7.5) i $v = 1$ a (7.6), resulta

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} u \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} dA &= \int_U |\vec{\nabla} u|^2 dV + \int_U u \Delta u dV \\ \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} dA &= \int_U \Delta u dV. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Aquestes fórmules són certes quan ambdós membres tenen sentit i són finits. Per exemple, quan u és harmònica a U i contínua a $\bar{U}$ hom té

$$\int_{\partial U} u \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} dA = \int_U |\vec{\nabla} u|^2 dV \quad (7.8)$$

$$\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} dA = 0. \quad (7.9)$$

Com a cas particular, retrobem el que ja havíem vist en la secció 3.7: si u és harmònica, el camp $\vec{\nabla} u$ és conservatiu i solenoïdal.

Exemple 7.2. Les identitats de Green, en el cas $n = 1$ i $U = (a, b)$, esdevenen

$$u(b)v'(b) - u(a)v'(a) = \int_{\partial[a,b]} u \frac{\partial v}{\partial n} = \int_a^b (u'v' + uv'') dx,$$

$$u(b)v'(b) - u(a)v'(a) - v(b)u'(b) + v(a)u'(a) = \int_a^b (uv'' - vu'') dx$$

i es redueixen al teorema fonamental del càlcul. $\square$

D'ara en endavant, si U és un obert de $\mathbb{R}^n$, farem servir les notacions habituals següents:

$$C^r(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ té derivades parcials contínues fins a l'ordre } r\},$$

$$0 \leq r \leq +\infty, \text{ amb } C^0(U) = C(U)$$

$$C_c^r(U) = \{f \in C^r(U) : \text{spt}(f) \text{ és compacte}\}, \quad 0 \leq r \leq +\infty$$

$$L_{\text{loc}}^1(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ és integrable sobre cada compacte de } U\}$$

$$L_c^p(U) = \{f \in L^p(U) : \text{spt}(f) \text{ és compacte}\}, \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

on $L^p(U)$ són els espais de Lebesgue de funcions integrables sobre U .

7.2.2 La propietat de la mitjana

Recordem la definició de funció harmònica donada ja en l'apartat 3.7.2.

Definició 7.3. Una funció u , que suposarem que pren valors reals, definida i dues vegades diferenciable en un obert U de $\mathbb{R}^n$, és harmònica a U si compleix l'equació

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{a } U. \quad (7.10)$$

En tot aquest capítol no descartem pas el cas $n = 1$, i, de fet, ens ajudarà de vegades a entendre més bé la situació quan $n \geq 2$. Què és una funció harmònica en un interval I de $\mathbb{R}$? En aquest cas, l'equació (7.10) és $u'' = 0$, que equival a $u' = a$, constant, o bé a $u(x) = ax + b$, amb a, b constants. És a dir, les funcions harmòniques en una variable són exactament les funcions lineals.

Exemple 7.4. Analitzem quan un polinomi $P(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$ és harmònic. Aquí $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ és un multiíndex i $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Podem posar $P = \sum_k P_k$, on P_k agrupa tots els termes amb $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$; P_k és un polinomi *homogeni* de grau k . Observem que ΔP_k és un polinomi homogeni de grau $k - 2$, i en conseqüència P és harmònic si i només si cada terme P_k ho és. Quan $k = 1$ (termes lineals), P_1 és sempre harmònic. Un polinomi homogeni de grau 2

$$P_2(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_i x_j$$

és harmònic si i només si $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$. A partir de $k = 3$ no és senzill caracteritzar quan un polinomi homogeni de grau k és harmònic en termes dels seus coeficients. Els coeficients han de satisfer un sistema d'equacions lineals, on el nombre d'equacions depèn de k i de n . Per exemple, si $n = 2$, $k = 3$ el polinomi homogeni $P(x, y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2$ és harmònic si i només si $3a + d = 0$ i $c + 3b = 0$, és a dir, si i només si és una combinació lineal dels dos polinomis $x^3 - 3xy^2, y^3 - 3yx^2$. Si $n = 3, k = 3$ el nombre de coeficients (la dimensió de l'espai de tots els polinomis homogenis) és 10 i el nombre d'equacions és 6, amb la qual cosa la dimensió de l'espai dels polinomis homogenis de grau 3 a $\mathbb{R}^3$, harmònics, és 4. $\square$

El terme harmònic s'associa, més aviat, a les solucions de l'equació

$$\Delta u = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.11)$$

(funcions pròpies del laplacà). En una variable, hom coneix les solucions de l'equació (7.11): si $\lambda > 0$, la solució és

$$u(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},$$

i si $\lambda < 0$,

$$u(x) = A \sin \sqrt{-\lambda}x + B \cos \sqrt{-\lambda}x,$$

on A, B són constants. Les úniques solucions que es mantenen acotades quan $x \in \mathbb{R}$ són les funcions $\sin \sqrt{-\lambda}x, \cos \sqrt{-\lambda}x$, que són les que apareixen en els

desenvolupaments en harmònics de les funcions periòdiques. En dimensió $n > 1$ és més complicat estudiar l'equació (7.11), anomenada *equació de Helmholtz*. Entre les seves solucions hi ha els *harmònics esfèrics*, funcions que, en certa manera, fan el mateix paper que el sinus i el cosinus en una variable.

Recordem que fem servir la notació $|x|$ per a la norma de x a $\mathbb{R}^n$ i $B(a, r) = B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ és la bola de centre $a \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$. Així mateix, $S(a, r) = S_r(a) = \partial B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$ és l'esfera corresponent. Posarem també $\mathbb{B} = B(0, 1)$ i $\mathbb{S} = S(0, 1)$.

Per tal d'entendre què imposa la condició $\Delta u \equiv 0$ a una funció u , dues vegades diferenciable al domini U , considerem el desenvolupament de Taylor de u al voltant d'un punt $a \in U$:

$$u(x) = u(a) + \langle \vec{\nabla} u(a), x - a \rangle + \frac{1}{2} Hu(a)(x - a, x - a) + o(|x - a|^2).$$

Aquí $\vec{\nabla} u(a)$ és, com sempre, el gradient de u en el punt a i $Hu(a)$ el hessià, de manera que el terme homogeni d'ordre dos és

$$\frac{1}{2} Hu(a)(x - a, x - a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(a) (x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Amb l'objectiu d'aïllar en aquest desenvolupament els termes d'ordre dos amb $i = j$, prenem una bola de centre a , de radi $r > 0$ prou petit per tal que $\bar{B}(a, r) \subset U$ i integrem el desenvolupament de Taylor de u sobre l'esfera $S(a, r)$. Dit d'una altra manera, posem $x = a + rw$ amb $|w| = 1$ i integrem respecte de $dA(x) = r^{n-1} d\sigma(w)$, on $d\sigma$ és la mesura sobre l'esfera unitat, $\mathbb{S} = S(0, 1)$, de $\mathbb{R}^n$. Hom té

$$\int_{S(a,r)} u(x) dA(x) = r^{n-1} \int_{\mathbb{S}} u(a + rw) d\sigma(w).$$

Designem per $c_n = d\sigma(\mathbb{S})$ (2π si $n = 2$, 4π si $n = 3, \dots$) l'àrea de $\mathbb{S}$. El valor mitjà de u a $S(a, r)$ és, llavors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{S(a,r)} u(x) dA(x) &= \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} u(a + rw) d\sigma(w) = \\ &= u(a) + \frac{1}{2c_n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(a) r^2 \int_{\mathbb{S}} w_i^2 d\sigma(w) + o(r^2). \end{aligned}$$

Aquí hem utilitzat el fet que $\int_{\mathbb{S}} w_i d\sigma(w) = 0$ i $\int_{\mathbb{S}} w_i w_j d\sigma(w) = 0$ si $i \neq j$, perquè es tracta de funcions que tenen integrals de signe oposat en cada semi-esfera. Ara bé, és clar que $\int_{\mathbb{S}} w_i^2 d\sigma(w)$ no depèn de i i val, per tant, $\frac{c_n}{n}$. Així,

si designem per $M(u, a, r)$ el valor mitjà de u a $S(a, r)$, resulta

$$\frac{1}{2n} \Delta u(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(u, a, r) - u(a)}{r^2}.$$

Aquesta igualtat implica el fet següent: si per a un punt $a \in U$ hom té $M(u, a, r) = u(a)$ per a r arbitràriament petit, llavors $\Delta u(a) = 0$.

Definició 7.5. Si u és una funció contínua al domini U de $\mathbb{R}^n$, es diu que u compleix la propietat de la mitjana a U si

$$u(a) = \frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{S(a, r)} u(x) dA(x) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} u(a + rw) d\sigma(w),$$

sempre que $S(a, r) \subset U$.

Exemple 7.6. En dimensió $n = 1$ la propietat de la mitjana per a una funció u contínua a $\mathbb{R}$ s'escriu

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}(u(a) + u(b)), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Vegem que les funcions que tenen aquesta propietat són exactament les funcions lineals $u(x) = m + nx$. En efecte, en primer lloc és immediat de comprovar que una funció lineal $u(x) = m + nx$ té la propietat de la mitjana. Recíprocament, suposem que u té la propietat de la mitjana i sigui v la funció lineal que coincideix amb u en $x = 0$ i $x = 1$, de manera que $h = u - v$ té la propietat de la mitjana i s'anul·la en els punts 0 i 1. Aleshores $h(\frac{1}{2}) = 0$ i, reiterant, resulta $h(\frac{1}{4}) = h(\frac{3}{4}) = 0$. Aplicant successivament aquest raonament, veiem que h s'anul·la a tots els punts diàdics $\frac{k}{2^n}, k = 0, 1, \dots, 2^n$, i com que aquests punts són densos a $[0, 1]$ i h és contínua, arribem a la conclusió que h és idènticament nul·la a $[0, 1]$. Prenent $a = 0$ i $b \in [1, 2]$ la propietat de la mitjana implica aleshores que h és nul·la a $[1, 2]$ i així successivament. Això dóna $h = 0$ i $u = v$ és lineal. $\square$

Acabem de veure que a la recta les funcions que tenen la propietat de la mitjana són les lineals, és a dir, les funcions harmòniques. Ens proposem de provar això mateix en qualsevol dimensió. Abans de la definició 7.5 ja hem observat que si u és dues vegades diferenciable i té la propietat de la mitjana, aleshores u és harmònica. Ara bé, resulta que la propietat de la mitjana per a u implica que u és infinitament derivable. En efecte, sigui χ una funció de classe C^∞ amb suport compacte dins de la bola $B(0, 1)$, radial (és a dir, de la forma $\chi(x) = \psi(|x|)$ per a alguna funció ψ) i normalitzada

per $\int \chi(x) dV(x) = 1$. Posem $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi(x/\varepsilon)$. Si $d(x, U^c) > \varepsilon$, la funció $y \mapsto \chi_\varepsilon(x - y)$ té suport contingut a $B(x, \varepsilon) \subset U$ i hom té

$$\begin{aligned} (u * \chi_\varepsilon)(x) &= \int_{B(x, \varepsilon)} u(y) \chi_\varepsilon(x - y) dV(y) = \int_{B(0, \varepsilon)} u(x - y) \chi_\varepsilon(y) dV(y) = \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} u(x - y) \varepsilon^{-n} \chi(y/\varepsilon) dV = \int_{\mathbb{B}} u(x - \varepsilon y) \chi(y) dV(y) = \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{S}} u(x - \varepsilon r y) \psi(r) r^{n-1} d\sigma(y) dr = \\ &= c_n u(x) \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} dr = u(x) \int_{\mathbb{B}} \chi(x) dV(x) = u(x). \end{aligned}$$

Així, hem vist que $(u * \chi_\varepsilon)$ —la convolució de u i χ_ε — coincideix amb u a $\{x: d(x, U) > \varepsilon\}$ si u té la propietat de la mitjana. Com que ε és arbitrari i $u * \chi_\varepsilon$ és clarament de classe C^∞ (vegeu la proposició 7.36), resulta $u \in C^\infty(U)$.

Hem demostrat, per tant, una part del teorema següent:

Teorema 7.7. *Una funció contínua al domini U té la propietat de la mitjana si i només si és harmònica a U .*

Demostració. Només ens falta veure que tota funció harmònica té la propietat de la mitjana. Mirem, senzillament, la derivada respecte de r del valor mitjà $M(u, a, r)$ de la funció harmònica u a $S(a, r)$: hom té

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} M(u, a, r) &= \frac{d}{dr} \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} u(a + rw) d\sigma(w) = \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} \sum_i D_i u(a + rw) w_i d\sigma(w) = \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(a + rw) d\sigma(w) = \\ &= \frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{S(a, r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(x) dA(x) = 0 \end{aligned}$$

d'acord amb (7.9) aplicat al domini $B(a, r)$. Per tant, $M(u, a, r)$ és constant respecte de r , i com que $\lim_{r \rightarrow 0} M(u, a, r) = u(a)$, resulta $M(u, a, r) = u(a)$. Així, hem acabat la prova del teorema. $\square$

Observem que hem provat també que tota funció harmònica és de classe C^∞ .

Si una funció u té la propietat de la mitjana al domini U en el sentit de la definició 7.5, també té la propietat de la mitjana respecte de boles, en el sentit següent:

$$u(a) = \frac{n}{c_n r^n} \int_{B(a,r)} u(x) dV(x) \quad \text{si } \overline{B}(a,r) \subset U. \quad (7.12)$$

El coeficient que porta la integral està justificat perquè el volum de la bola $B(a,r)$ és $\int_0^r t^{n-1} c_n dt = \frac{c_n r^n}{n}$. Per a provar (7.12) integrem en coordenades polars i fem servir la propietat de la mitjana respecte d'esferes:

$$\begin{aligned} \int_{B(a,r)} u(x) dV(x) &= \int_0^r \int_S u(a + sw) s^{n-1} d\sigma(w) ds = \\ &= \int_0^r s^{n-1} c_n u(a) ds = \frac{r^n}{n} c_n u(a). \end{aligned}$$

Una conseqüència útil de la propietat de la mitjana és la següent:

Teorema 7.8 (Teorema de Liouville per a funcions harmòniques).

Una funció harmònica i acotada a $\mathbb{R}^n$ és constant.

Demostració. Si la funció u compleix les hipòtesis del teorema, aplicant (7.12) per a cada $a \in \mathbb{R}^n$ i cada $r > 0$, resulta

$$u(a) - u(0) = \frac{n}{c_n r^n} \left\{ \int_{|x-a|<r} u(x) dV(x) - \int_{|x|<r} u(x) dV(x) \right\}.$$

Posant $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$ tenim

$$\begin{aligned} |u(a) - u(0)| &\leq \frac{n}{c_n r^n} \|u\|_\infty \left\{ \int_{|x-a|<r, |x|>r} dV(x) + \int_{|x-a|>r, |x|<r} dV(x) \right\} \leq \\ &\leq \frac{n}{c_n r^n} \|u\|_\infty dV(\{x : r - |a| < |x| < r + |a|\}) = \\ &= \frac{\|u\|_\infty}{r^n} ((r + |a|)^n - (r - |a|)^n) = O(r^{-1}). \end{aligned}$$

Fent $r \rightarrow +\infty$ veiem que $u(a) = u(0)$, per a tot punt $a \in \mathbb{R}^n$. □

En el cas $n = 2$, podem utilitzar la relació entre funcions holomorfes i funcions harmòniques per a donar una versió més forta del teorema anterior.

Teorema 7.9. *Si u és una funció harmònica en el pla i es compleix*

$$u(z) = c \operatorname{Log} |z| + O(1), \text{ quan } |z| \rightarrow \infty, \text{ amb } c \text{ constant,}$$

llavors u és constant. En les mateixes condicions, si $u(z) = c \operatorname{Log} |z| + o(1)$, llavors u és idènticament nula.

Demostració. Si f és una funció entera amb $\operatorname{Re} f = u$, llavors $F = e^f$ és també entera i

$$|F(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(z)} = O(|z|^N)$$

per a algun N , natural. Per l'exercici 11 del capítol 4, F és un polinomi i, essent de la forma $F = e^f$, F no té zeros, i en conseqüència F és constant. Això implica que f i u també són constants. $\square$

7.3 Potencials newtonians i logarítmics. Fórmules de descomposició de Riesz

Quins exemples de funcions harmòniques en un domini U de $\mathbb{R}^n$ coneixem? Quan $n = 2$, en tenim molts perquè només cal prendre $u = \operatorname{Re} f$ amb f holomorfa, però si $n > 2$, només apareixen de manera òbvia funcions com les lineals, $u(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$ amb $a_i, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 7.10. Evidentment, si $m < n$ i u és una funció harmònica de m de les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, aquesta mateixa funció interpretada a $\mathbb{R}^n$ com a funció independent de les $n - m$ variables restants és també harmònica allà on estigui ben definida. Per exemple, si i, j són índexs arbitraris diferents, la funció $\operatorname{Log}(x_i^2 + x_j^2)$ és una funció harmònica a $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i^2 + x_j^2 \neq 0\}$. Si $2 < k < n$ i prenem k coordenades de x , per exemple les k primeres, la funció $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)^{1-\frac{k}{2}}$ és harmònica a $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \neq 0\}$. $\square$

Atès que el laplaciana commuta amb les rotacions (les transformacions unitàries), sembla natural mirar també les funcions radials. Com ha de ser una funció $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ per tal que $u(x) = \varphi(|x|)$ sigui harmònica? Posant $r = |x|$ resulta, per càlcul directe,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{r}, & \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \varphi'(r) \frac{x_i}{r}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \varphi''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r) \frac{1}{r} - \varphi'(r) x_i \frac{x_i}{r^3} \\ \Delta u &= \varphi''(r) + n\varphi'(r) \frac{1}{r} - \varphi'(r) \frac{1}{r} = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ens trobem, per tant, amb l'equació $\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = 0$, que dóna $\varphi'(r) = Cr^{1-n}$, C constant, i

$$\varphi(r) = k_1 r^{2-n} + k_2 \quad \text{si } n > 2$$

$$\varphi(r) = k_1 \operatorname{Log} r + k_2 \quad \text{si } n = 2,$$

amb k_1, k_2 constants. Aquestes funcions tenen una singularitat per a $r = 0$, és a dir, tendeixen a ∞ quan $r \rightarrow 0$. Per tant, no hi ha funcions harmòniques radials en un disc que no siguin constants. Hi ha també una relació directa entre el fet que una funció radial i harmònica en una bola sigui constant i la propietat de la mitjana. D'una banda, és evident que si u és radial a una bola centrada en a i té la propietat de la mitjana (és a dir, és harmònica), llavors u ha de ser constant, $u = u(a)$. D'altra banda, si u és harmònica, la invariància del laplacà respecte del grup Σ de les rotacions implica que la funció

$$v = \frac{1}{c_n} \int_{\Sigma} (u \circ g) dg \quad \left(v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta} z) d\theta, \quad \text{si } n = 2 \right)$$

també és harmònica i, essent radial, ha de ser constant.

La funció

$$G(x) = \begin{cases} d_n |x|^{2-n} & \text{si } n > 2 \\ d_n \operatorname{Log} |x| & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

s'anomena *solució fonamental del laplacà amb pol a l'origen*. La constant d_n és una constant de normalització que triarem més endavant. Sabem que $G(x)$ és una funció harmònica a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Traslladant a un punt $a \in \mathbb{R}^n$, $G(x - a)$ s'anomena *solució fonamental del laplacà amb pol a*. Com que $G(x - a)$ és harmònica per a $x \neq a$, resulta que la funció

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i G(x - a_i)$$

és harmònica a $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ si c_i són constants i $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^n$.

També podem considerar “sumes infinites”, és a dir integrals, en lloc de sumes finites i posar

$$u(x) = \int_K \phi(y) G(x - y) dV(y),$$

on K és un compacte de $\mathbb{R}^n$ i ϕ és contínua sobre K .

Per a donar sentit a aquestes integrals necessitem provar la integrabilitat local de G .

Lema 7.11. *Fixat $x \in \mathbb{R}^n$, la funció $y \mapsto G(x - y)$ és integrable sobre cada compacte de $\mathbb{R}^n$.*

Demostració. És suficient provar que $G(y)$ és integrable sobre una bola $B(0, R)$. Treballant en polars, si $n > 2$, hom té

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R)} G(y) dV(y) &= \int_{B(0, R)} d_n |y|^{2-n} dV(y) = \\ &= d_n \int_0^R r^{2-n} r^{n-1} c_n dr = \text{const } R^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Si $n = 2$ el càlcul és una mica diferent,

$$\begin{aligned} \int_{D(0, R)} G(y) dm(y) &= \int_{D(0, R)} d_2 \text{Log } |y| dm(y) = 2\pi d_2 \int_0^R r \text{Log } r dr = \\ &= 2\pi d_2 \left[\frac{r^2}{2} \text{Log } r - \frac{r^2}{4} \right]_0^R = 2\pi d_2 \left[\frac{R^2}{2} \text{Log } R - \frac{R^2}{4} \right] < +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Si ϕ és una funció contínua sobre un compacte K de mesura positiva, ϕ és acotada i el lema 7.11 implica que la funció

$$u(x) = G(\phi)(x) = \int_K \phi(y) G(x - y) dV(y) \quad (7.14)$$

està ben definida per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Fora de K , u és clarament harmònica perquè

$$\Delta u(x) = \int_K \phi(y) \Delta_x G(x - y) dV(y) = 0.$$

Així mateix, pel teorema de la convergència dominada, $G(\phi)$ és nul·la a l'infinit. La funció u definida per (7.14) s'anomena *potencial de Riesz* de ϕ .

Quan $n = 3$, la funció

$$u(x) = G(\phi)(x) = d_3 \int_K \frac{\phi(y)}{|x - y|} dV(y)$$

és el potencial creat per la distribució de càrrega (o de massa) donada per la funció densitat ϕ . En efecte, un càlcul immediat demostra que $\vec{\nabla}_x \frac{1}{|x - y|} = -\frac{\vec{r}(x, y)}{|x - y|^3}$, on $\vec{r}(x, y)$ és el vector $y - x$. Per tant, a $\mathbb{R}^3 \setminus K$, és

$$\vec{\nabla} u(x) = -d_3 \int_K \phi(y) \frac{\vec{r}(x, y)}{|x - y|^3} dV(y),$$

que, per la llei de Newton, és el camp de forces creat per la densitat ϕ . Per aquest motiu u s'anomena *potencial newtonià*. Quan $n = 2$, els potencials corresponents

$$u(x) = G(\phi)(x) = d_2 \int_U \phi(y) \operatorname{Log} |x - y| dm(y),$$

s'anomenen *potencials logarítmics*.

Tot potencial en dimensió $k < n$ es pot interpretar com la restricció a $\mathbb{R}^k$ d'un potencial a $\mathbb{R}^n$, $n > k$. Posem $\mathbb{R}^n$ com el producte $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ i utilitzem la notació $x = (x', x'')$, amb $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$. Considerem un potencial corresponent a una funció $\phi(y)$ independent de y'' , és a dir, del tipus

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{K' \times \mathbb{R}^{n-k}} \phi(y') |x - y|^{2-n} dV(y) = \\ &= \int_{K'} \phi(y') \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} |x - y|^{2-n} dV(y'') \right) dV(y'), \end{aligned}$$

on K' és un compacte de $\mathbb{R}^n$. Suposem $k > 2$; si avaluem en un punt $x \in \mathbb{R}^k$ ($x'' = 0$) la integral interior, dona un múltiple constant de $|x' - y'|^{2-k}$ i hom té que $u(x', 0)$ és, llevat de constants, el potencial k -dimensional de ϕ . Per obtenir els potencials logarítmics ($k = 2$) considerem el potencial n -dimensional de $\phi(y') \mathbb{1}_N(y'')$, on $\mathbb{1}_N$ indica la funció característica de $\{y'' \in \mathbb{R}^{n-k} : |y''| \leq N\}$. Aleshores la integral interior passa a ser

$$\int_{B(0, N)} |x - y|^{2-n} dV(y''),$$

que amb el canvi $y'' = tr'\omega$, $|\omega| = 1$, on $r' = |x' - y'|$ es reconeix com a múltiple de

$$\int_0^{\frac{N}{r'}} \frac{t^{n-3} dt}{(1 + t^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

Amb N fixat, aquesta darrera integral és de l'ordre de $\operatorname{Log} r'$ per a r' petit i ens trobem amb el potencial logarítmic de $\phi(y')$. Aquest càlcul explica l'interès dels potencials logarítmics, encara que hi hagi un interès especial pels potencials newtonians.

Exemple 7.12. Els potencials de Riesz tan sols poden calcular-se explícitament en situacions on hi ha molta simetria. Suposem, per exemple, que ϕ és una funció radial de la forma $\phi(x) = h(|x|)$, on h és una funció contínua

suportada a $[1, 2]$. Llavors, el potencial $G(\phi)$ també és radial a la bola $B(0, 1)$ i a l'exterior de la bola $B(0, 2)$; en efecte, si T és una transformació lineal donada per una matriu unitària, hom té

$$G(\phi)(Tx) = \int_{1 < |y| < 2} G(Tx - y)h(|y|) dV(y) = \int_{1 < |y| < 2} G(x - T^{-1}y)h(|y|) dV(y),$$

i fent el canvi $y = Tz$ trobem $G(\phi)(x)$. Com que $G(\phi)$ és harmònica i radial a la bola $B(0, 1)$, ha de ser constant:

$$\int_{1 < |y| < 2} G(x - y)h(|y|)dV(y) = C, \quad |x| < 1.$$

A l'exterior de $B(0, 2)$, pel mateix motiu, $G(\phi)$ ha de ser de la forma

$$G(\phi)(x) = k_1 G(x) + k_2, \quad k_1, k_2 \text{ constants.}$$

Si $n > 2$, fent $|x| \rightarrow \infty$ veiem que $k_2 = 0$, i llavors multiplicant per $|x|^{n-2}$ i fent novament $|x| \rightarrow \infty$ trobem $k_1 = d_n \int \phi(y) dV(y)$. A aquesta mateixa conclusió s'hi arriba en el cas $n = 2$ mirant directament el comportament per a $|x|$ gran. $\square$

En la secció 7.7 estudiarem detalladament els potencials de Riesz i provarem que compleixen l'equació $\Delta G(\phi) = \phi$, en un cert sentit, en el compacte K que suporta la funció ϕ . De moment, veurem que aquests potencials apareixen de manera natural en la fórmula de descomposició de Riesz, que és l'anàloga de la fórmula de Cauchy-Green per al laplaciana. És el teorema següent, el qual inclou la tria de la constant d_n en la definició de $G(x - y)$. La notació $\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y}$ indica que es deriva en la direcció de la normal a la frontera del domini respecte de la variable y .

Teorema 7.13 (Fórmula de descomposició de Riesz). *Segui $U \subset \mathbb{R}^n$ un domini acotat amb frontera regular orientada per la normal exterior $\vec{N}$. Si u és una funció dues vegades diferenciable en un entorn de $\bar{U}$ amb Δu continu a $\bar{U}$, llavors, per a $x \in U$, hom té*

$$\begin{aligned} u(x) = \int_{\partial U} \left\{ u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) - G(x - y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) \right\} dA(y) + \\ + \int_U G(x - y) \Delta u(y) dV(y). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Demostració. Procedim igual que en la demostració de la fórmula de Cauchy-Green. Fixat $x \in U$, considerem $\overline{B}(x, \varepsilon) \subset U$ i apliquem la segona identitat de Green a $U \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$ i a les funcions u i $v(y) = G(x, y)$, la qual dóna

$$\begin{aligned} & \left(\int_{|y-x|=\varepsilon} + \int_{\partial U} \right) \left\{ u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) \right\} dA(y) = \\ &= \int_{U \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)} \{u(y) \Delta_y G - G(x-y) \Delta u(y)\} dV(y) = \\ &= - \int_{U \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)} G(x-y) \Delta u(y) dV(y). \end{aligned}$$

Per a $|y-x| = \varepsilon$, la derivada normal exterior unitària és l'oposada de la derivada radial, $\frac{\partial}{\partial r}$, on r és la distància a x . Com que $G(x-y) = d_n r^{2-n}$ si $n > 2$ i $G(x-y) = d_2 \text{Log } r$ si $n = 2$, tenim $\frac{\partial}{\partial r} G(x-y) = d_n(2-n)r^{1-n}$ si $n > 2$ i $\frac{\partial}{\partial r} G(x-y) = d_2 r^{-1}$ si $n = 2$. Per tant,

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x|=\varepsilon} \left\{ u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) \right\} dA(y) = \\ &= - \left\{ \begin{array}{c} d_n(2-n)\varepsilon^{1-n} \\ d_2\varepsilon^{-1} \end{array} \right\} \int_{|y-x|=\varepsilon} u(y) dA(y) + \left\{ \begin{array}{c} d_n\varepsilon^{2-n} \\ d_2 \text{Log } \varepsilon \end{array} \right\} \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r}(y) dA(y). \end{aligned}$$

El segon terme és $O(\varepsilon^{2-n})O(\varepsilon^{n-1}) = O(\varepsilon)$ si $n > 2$, i $O(\text{Log } \varepsilon)O(\varepsilon) = O(\varepsilon \text{Log } \varepsilon)$ si $n = 2$, i en tots dos casos tendeix a 0 quan $\varepsilon \rightarrow 0$. El primer terme, si triem $d_n(2-n) = \frac{1}{c_n}$ si $n > 2$ i $d_2 = \frac{1}{2\pi}$ si $n = 2$, és la mitjana de u sobre $\{y: |x-y| = \varepsilon\}$ i, per tant, té límit $u(x)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$.

D'altra banda, com que $\Delta u(y)G(x-y)$ és integrable en y sobre U pel lema 7.11, el límit de la seva integral sobre $U \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$ és la integral sobre tot el domini U . $\square$

Tal com hem dit, en la demostració del teorema anterior hem fixat $d_n = 1/2\pi$ si $n = 2$ i $d_n = 1/(2-n)c_n$ si $n > 2$, on c_n és la mesura $(n-1)$ -dimensional de l'esfera unitat.

Una integral del tipus

$$\int_{\partial U} \phi(y) G(x-y) dA(y)$$

s'anomena *potencial de capa simple* i és, clarament, una funció harmònica a $\mathbb{R}^n \setminus \partial U$.

Exemple 7.14. Novament, els potencials de capa simple només es poden calcular explícitament quan hi ha determinades simetries. D'una forma anàloga a l'exemple 7.12, és fàcil veure que si ϕ és constant igual a C a l'esfera $S(0, R)$, el potencial de capa simple $C \int_{|y|=R} G(x-y) dA(y)$ és constant a la bola $B(0, R)$ i val $k_1 G(x)$, amb k_1 constant, a l'exterior d'aquesta bola. El valor de la constant a $B(0, R)$ és el valor en $x = 0$, és a dir,

$$C \int_{S(0,R)} G(y) dA(y) = C \frac{R}{2-n}$$

si $n > 2$ i $CR \log R$ si $n = 2$. El valor de k_1 és

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{G(x)} C \int_{S(0,R)} G(x-y) dA(y) = C c_n R^{n-1},$$

amb la qual cosa el potencial per a $|x| > R$ val $C \frac{R^{n-1}}{(2-n)|x|^{n-2}}$ si $n > 2$ i $CR \log |x|$ si $n = 2$. Això significa, en particular, que el camp elèctric creat per una esfera carregada homogeniament és zero a l'interior de l'esfera. Observem també que aquest potencial és una funció contínua a $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exemple 7.15. Pensem altre cop $\mathbb{R}^n$ com el producte $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ i utilitzem la notació $x = (x', x'')$, amb $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$. Considerem el potencial

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \phi(y') G(x - y') dV(y'),$$

que està definit per a $x \notin \mathbb{R}^k$, és a dir, $x'' \neq 0$, sempre que

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\phi(y')| |y'|^{2-n} dV(y') < \infty.$$

Quan $k = n - 1$ és formalment un potencial de capa simple a la vora d'un semiespai de $\mathbb{R}^n$. La funció u és una funció harmònica de x i, per definició, depèn solament de $|x''|$; en conseqüència, és de la forma $u(x) = c_1 \log |x''| + c_2$ si $k = n - 2$, i de la forma $u(x) = c_1 |x''|^{2-n+k} + c_2$ si $k < n - 2$ amb c_1, c_2 constants. $\square$

Una integral del tipus

$$\int_{\partial U} \phi(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) dA(y)$$

s'anomena *potencial de capa doble*. La raó és que si posem

$$\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(x - y - \varepsilon \vec{N}(y)) - G(x - y)}{\varepsilon},$$

llavors, formalment, la integral anterior s'escriu com

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{\partial U} \phi(y) G(x - y - \varepsilon \vec{N}(y)) dA(y) - \int_{\partial U} \phi(y) G(x - y) dA(y) \right\} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{(\partial U)_\varepsilon} \phi(y) G(x - z) dA(z) - \int_{\partial U} \phi(y) G(x - y) dA(y) \right\}, \end{aligned}$$

on $(\partial U)_\varepsilon$ consta dels punts $y + \varepsilon \vec{N}(y)$, $y \in \partial U$. Els potencials de capa doble són també funcions harmòniques a $\mathbb{R}^n \setminus \partial U$; per veure això és suficient establir que la funció $\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y)$ és harmònica en x , per a $y \in \partial U$. En efecte, si $\vec{N}_y$ té components $(A_1(y), \dots, A_n(y))$, llavors és

$$\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) = \sum_{i=1}^n A_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} G(x - y)$$

i cada terme $\frac{\partial}{\partial y_i} G(x - y)$ és una funció harmònica en x , perquè $\Delta_x \frac{\partial}{\partial y_i} G(x - y) = \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_x G(x - y) = 0$.

Així, la fórmula de descomposició de Riesz expressa u com a suma d'una funció harmònica a U , que a la vegada és la suma d'un potencial de capa simple i d'un potencial de capa doble, més un altre terme que és un potencial de Riesz i que només depèn de Δu . Recordem que, de manera anàloga, la fórmula de Cauchy-Green descompon una funció u en la suma d'una funció holomorfa més un altre terme que depèn de $\bar{\partial}u$ i del nucli de Cauchy.

Corol·lari 7.16. *Si U és un domini acotat amb vora regular orientada i u és harmònica en un entorn de $\bar{U}$, llavors hom té*

$$u(x) = \int_{\partial U} \left\{ u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) - G(x - y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) \right\} dA(y), \quad \text{si } x \in U.$$

Vegem ara quina forma pren aquesta fórmula en dimensió $n = 2$. Posem $w = u + iv$, $z = x + iy$, $G(w) = \frac{1}{2\pi} \text{Log } |w|$ i

$$\vec{N}_w = A_1(w) + iA_2(w), \quad \frac{\partial}{\partial \vec{N}_w} = A_1(w) \frac{\partial}{\partial u} + A_2(w) \frac{\partial}{\partial v},$$

on $A_1(w)$, $A_2(w)$ són dues funcions reals. Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{N}_w} \text{Log } |z - w| &= A_1(w) \frac{u - x}{|z - w|^2} + A_2(w) \frac{v - y}{|z - w|^2} = \\ &= \text{Re} \frac{A_1(w) + iA_2(w)}{w - z} = \text{Re} \frac{\vec{N}_w}{w - z}. \end{aligned}$$

Si U és un domini acotat de $\mathbb{C}$ amb vora regular orientada positivament i $w = \gamma(t)$ una parametrització local de ∂U , llavors és $\vec{N}_w = -i\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$, $ds = |\gamma'(t)|dt$ i $dw = \gamma'(t)dt$. Resulta, doncs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} \vec{N}(w) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_w} \operatorname{Log} |z - w| ds(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} u(w) \operatorname{Re} \frac{-i\gamma'(t)}{w - z} dt = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{u(w)}{w - z} dw. \end{aligned}$$

Això demostra:

Corol·lari 7.17. *Si U és un domini acotat de $\mathbb{C}$ amb vora regular orientada positivament i u és harmònica en un entorn de $\bar{U}$, llavors u s'expressa com la suma $u = u_1 + u_2$, on $u_1 = \operatorname{Re} f$ amb f holomorfa a U i u_2 és un potencial logarítmic harmònic a U .*

Suposem ara que, en el teorema 7.13, U és la bola de centre x i radi R . El mateix càlcul que hem fet en la prova d'aquest teorema dóna

$$\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) = \frac{-1}{c_n R^{n-1}},$$

on d'acord amb la dimensió és, per a $y \in S(x, R)$,

$$G(x - y) = \begin{cases} d_n R^{2-n}, & d_n < 0 \text{ si } n > 2 \\ d_2 \operatorname{Log} R, & \text{si } n = 2 \end{cases} \quad (7.16)$$

i, per la fórmula (7.7), tenim també, si u és dues vegades diferenciable a $\bar{B}(x, R)$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} G(x - y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) &= \begin{Bmatrix} d_n R^{2-n} \\ d_2 \operatorname{Log} R \end{Bmatrix} \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) = \\ &= \begin{Bmatrix} d_n R^{2-n} \\ d_2 \operatorname{Log} R \end{Bmatrix} \int_U \Delta u dV(y). \end{aligned}$$

Amb això el teorema 7.13 dóna el resultat següent:

Corol·lari 7.18. *Si u és dues vegades diferenciable en un entorn de la bola tancada $\bar{B}(x, R)$ amb Δu continu en aquesta bola, hom té,*

$$u(x) = \frac{1}{c_n R^{n-1}} \int_{S(x, R)} u(y) dA(y) + \int_{B(x, R)} G_{B(x, R)}(x, y) \Delta u(y) dV(y),$$

on $G_{B(x,R)}(x,y) = d_n(|x-y|^{2-n} - R^{2-n})$ si $n > 2$ i $G_{B(x,R)}(x,y) = d_2 \operatorname{Log} \frac{|x-y|}{R}$ si $n = 2$.

Observem que el corollari anterior torna a provar que una funció u , amb les condicions de regularitat indicades, té la propietat de la mitjana si i només si és harmònica.

La funció $G_{B(x,R)}(x,y)$ del corollari 7.18 és sempre més petita o igual que zero (vegeu la proposició 7.24 i la secció 7.9). Això implica que si $\Delta u \geq 0$ en un obert U i $\overline{B}(x,R) \subset U$, llavors és

$$u(x) \leq \frac{1}{c_n R^{n-1}} \int_{S(x,R)} u(y) dA(y),$$

és a dir, la funció u està sempre per sota de la seva mitjana sobre esferes. Quan una funció contínua a U té aquesta propietat, es diu que és *subharmònica* a U . Les funcions u dues vegades diferenciables que són subharmòniques són exactament les que compleixen $\Delta u \geq 0$. En dimensió $n = 1$, les funcions subharmòniques són les que satisfan la condició

$$u(x) \leq \frac{1}{2}(u(x+h) + u(x-h)), \quad \text{per a } x, h \in \mathbb{R},$$

és a dir, les funcions convexes.

De les funcions subharmòniques en tornarem a parlar en la secció 9.4.

Observació 7.1. És convenient veure quin significat tenen les consideracions anteriors en el cas $n = 1$. En primer lloc, la solució fonamental és $G(x) = c|x|$, c constant. L'anàleg de (7.15) és, per a $u \in C^2([a,b])$,

$$\frac{1}{c}u(x) = u(b) + u(a) - (|x-b|u'(b) - |x-a|u'(a)) + \int_a^b |x-y|u''(y) dy.$$

Aquesta fórmula es pot obtenir integrant per parts. La darrera integral és

$$\begin{aligned} \int_a^x u''(y)(x-y) dy + \int_x^b u''(y)(y-x) dy &= \\ &= [u'(y)(y-x)]_x^b - \int_x^b u'(y) dy + [u'(y)(x-y)]_a^x + \int_a^x u'(y) dy = \\ &= u'(b)(b-x) - u(b) + u(x) - u'(a)(x-a) + u(x) - u(a). \end{aligned}$$

Veiem, per tant, que $c = \frac{1}{2}$ i $G(x) = \frac{1}{2}|x|$ és la solució fonamental quan $n = 1$.

7.4 Principi del màxim. Problemes homogenis de Dirichlet i de Neumann

Recordem que quan parlem de funcions harmòniques, ens referim sempre a funcions que prenen valors reals. Si la funció u és harmònica en un entorn de l'adherència d'un domini U acotat amb frontera regular orientada per la normal exterior $\vec{N}$, tenim, per (7.8),

$$\int_{\partial U} u \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} dA = \int_U |\vec{\nabla} u|^2 dV.$$

Això implica que si u val zero a ∂U , llavors u és nul·la a U , perquè $\int_U |\vec{\nabla} u|^2 dV = 0$ significa $\vec{\nabla} u = 0$, és a dir, u és constant i essent zero sobre ∂U aquesta constant és zero. Per tant, tota funció harmònica a $\overline{U}$ està determinada pel seus valors a ∂U . Equivalentment, tota funció u dues vegades diferenciable amb Δu continu està determinada a U pels seus valors a ∂U i per Δu : si $u_1 = u_2$ a ∂U i $\Delta u_1 = \Delta u_2$ a U , aleshores $u = u_1 - u_2$ val 0 a ∂U i és harmònica a U i, per tant, $u_1 = u_2$.

Les mateixes consideracions s'apliquen substituint el valor de u sobre ∂U pel valor de la derivada respecte de la normal, $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$, també sobre ∂U . Ara resulta que si u és harmònica a $\overline{U}$ i $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$ a ∂U , llavors u és constant. Tota funció harmònica a $\overline{U}$ està determinada, llevat de constants, per $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$ a ∂U . Equivalentment, tota funció u dues vegades diferenciable, amb Δu continu, està determinada a U , llevat de constants, pels valors de $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$ a ∂U i per Δu a U .

El que acabem de dir mostra que forçosament hi ha alguna redundància en l'enunciat del corollari 7.16. En aquest resultat s'expressa el valor de la funció u en els punts del domini U en termes dels valors de u i de $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$ sobre ∂U , mentre que, segons hem dit, hauria de ser possible expressar els valors de u a U només en termes de u sobre ∂U o bé, llevat de constants, només en termes de $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$ sobre ∂U .

Atès que per a considerar els valors de u sobre ∂U no cal cap condició sobre la regularitat de ∂U , el problema de Dirichlet (homogeni) s'enuncia per a un domini U acotat qualsevol: si U és un domini de $\mathbb{R}^n$ acotat i φ és una funció definida i contínua sobre la frontera de U , el problema de Dirichlet consisteix a trobar una funció u , harmònica a U , tal que per a cada punt $y \in \partial U$ es compleixi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in U}} u(x) = \varphi(y).$$

Una altra manera d'expressar les propietats de la funció u és dir que $u \in C(\overline{U})$, u és harmònica a U i $u|_{\partial U} = \varphi$. En particular, u ha de ser acotada.

Hi ha una versió més general del problema on no se suposa que U sigui acotat; en aquest cas, cal imposar que $\varphi \in C(\partial U)$ sigui acotada i buscar una solució u , també acotada a U .

El problema de Dirichlet modelitza, per exemple, la distribució estacionària de temperatures (independent del temps) a U quan ∂U té una distribució, també estacionària, donada per φ (per exemple, la temperatura ambient exterior). Una altra situació modelitzada pel problema de Dirichlet es dona en electrostàtica. Suposem que $U \subset \mathbb{R}^3$ representa una regió en un medi conductor carregat i que posem una càrrega elèctrica q en un punt $P \in U$. Aleshores hi ha una redistribució de les càrregues a ∂U fins a assolir un nou equilibri sobre ∂U . Anomenem u el potencial electrostàtic originat per la distribució de càrrega de ∂U ; tal com s'ha explicat en l'apartat 7.1.2, u és una funció harmònica a U . El potencial total a U és $u + \frac{q}{R}$, on R és la funció distància a P ($\frac{q}{R}$ és el potencial a causa de la càrrega que hi ha en el punt P). L'equilibri de càrregues sobre ∂U significa que el potencial $u + \frac{q}{R}$ és zero a ∂U . Per tant, u és la solució del problema de Dirichlet a U amb dada $-\frac{q}{R}$ a ∂U .

Segons hem vist ja, quan ∂U és regular, la fórmula (7.8) prova la unicitat de solució del problema de Dirichlet. Per a provar-la en general necessitem el principi del màxim.

Teorema 7.19 (Principi del màxim). *Sigui U un domini de $\mathbb{R}^n$ i u una funció contínua a U que té la propietat de la mitjana, és a dir, u és harmònica a U . Suposem que hi ha una constant $M \geq 0$ de manera que $u(x) \leq M$, per a tot $x \in U$ i que hi ha un punt $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = M$. Llavors és $u(x) = M$ per a tot $x \in U$.*

Demostració. Considerem $A = \{x \in U : u(x) = M\}$ que és un tancat de U i no és buit perquè $x_0 \in A$. Veiem que A és obert: si $a \in A$ i $\overline{B}(a, r) \subset U$, per la propietat de la mitjana sobre boles, hom té

$$M = u(a) = \frac{n}{c_n r^n} \int_{B(a, r)} u(x) dV(x),$$

que escrivim en la forma

$$\frac{1}{V(B(a, r))} \int_{B(a, r)} (u(x) - u(a)) dV(x) = 0.$$

Com que $u(x) - u(a) = u(x) - M$ és una funció contínua, sempre més petita o igual que zero i té integral zero a $B(a, r)$, ha de ser idènticament zero; per tant, $u(x) = M$ a $B(a, r)$, és a dir, $B(a, r) \subset A$ i A és obert. $\square$

Evidentment, també tindrem un principi del mínim canviant u per $-u$.

Corol·lari 7.20. Si U és un domini acotat de $\mathbb{R}^n$, $u \in C(\overline{U})$ i u és harmònica real a U , llavors els valors màxim i mínim de u sobre $\overline{U}$ s'agafen a ∂U . En conseqüència, si $u = 0$ a ∂U , llavors $u \equiv 0$ a U . Si $u_1, u_2 \in C(\overline{U})$ són harmòniques a U i $u_1 = u_2$ a ∂U , aleshores $u_1 \equiv u_2$ a U .

Demostració. Com que $\overline{U}$ és compacte i $u \in C(\overline{U})$, u té un màxim absolut: $u(x) \leq u(x_0) = M$, per a tot $x \in U$, amb $x_0 \in \overline{U}$. Si $x_0 \in \partial U$ no hi ha res a provar. Si $x_0 \in U$, llavors, pel principi del màxim, $u \equiv M$ a U , i la conclusió és òbvia. Raonant amb $-u$ trobem el resultat per al mínim. $\square$

Corol·lari 7.21. La solució del problema de Dirichlet, si existeix, és única.

Demostració. Suposem que donada $\varphi \in C(U)$ hi ha $u_1, u_2 \in C(\overline{U})$ amb $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$ a U i $u_1 = u_2 = \varphi$ a ∂U . Llavors $u = u_1 - u_2$ és 0 a ∂U i $\Delta u = 0$ a U . Pel corol·lari 7.20, u ha de ser idènticament nul·la a U . $\square$

Exemple 7.22. Considerem a $\mathbb{R}^3$ el polinomi harmònic $P(x, y, z) = x^3 - 3xy^2 + x^2 + y^2 - 2z^2$. El màxim i el mínim absoluts de P sobre la bola unitat tancada són els mateixos que sobre l'esfera i podem calcular-los amb el mètode dels extrems condicionats de Lagrange. Els punts obtinguts com a solució són $(\pm 1, 0, 0), (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), (0, 0, \pm 1)$, el màxim absolut és 2 i el mínim absolut és -2. $\square$

El problema de Neumann (homogeni) es planteja en un domini acotat U amb ∂U regular i orientada. Si $\vec{N}$ designa el camp normal exterior a ∂U , unitari i $\varphi \in C(\partial U)$ és una funció donada, el problema de Neumann consisteix a trobar una funció $u \in C^1(\overline{U})$, harmònica a U , tal que $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \varphi$ a ∂U . Per (7.9), la dada, $\varphi \in C(\partial U)$, ha de complir la condició necessària

$$\int_{\partial U} \varphi dA = 0.$$

Aquest problema modelitza, per exemple, una distribució estacionària de temperatures en un domini U quan hi ha un flux tèrmic controlat, $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \varphi$, a ∂U . La solució al problema de Neumann, si existeix, és única llevat de constants, perquè si u_1, u_2 en són solucions, $u = u_1 - u_2$ és harmònica a U i $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$ a ∂U , fet que per (7.8) implica $\vec{\nabla} u \equiv 0$, és a dir, u és constant.

Evidentment, el problema de Dirichlet és trivial si $n = 1$, però tanmateix convé mencionar-lo. Recordem que, en aquest cas, les funcions harmòniques són les funcions lineals. En un obert connex $U = (a, b)$, donar $\varphi \in C(\partial U)$ és

donar dos valors en a, b diguem-ne A, B . Llavors la solució del problema de Dirichlet és la funció que té per gràfic la recta que uneix (a, A) amb (b, B) , és a dir,

$$y - A = \frac{B - A}{b - a}(x - a).$$

7.5 La funció de Green. El nucli de Poisson

Sigui U un domini acotat de $\mathbb{R}^n$ amb frontera regular i orientada pel camp normal exterior unitari $\vec{N}$. Tal com acabem de veure, tota funció u de classe C^2 en un entorn de $\bar{U}$ queda determinada pels valors de Δu a U i pels valors de u a ∂U . En particular, si u és harmònica, queda determinada per $u|_{\partial U}$. Com a estratègia per estudiar l'existència de solucions del problema de Dirichlet esbrinarem, en primer lloc, de quina manera u queda determinada per Δu i $u|_{\partial U}$. Dit d'una altra manera, suposarem que tenim una solució del problema de Dirichlet i intentarem expressar-la directament en termes de la dada a la frontera. Per a això, ens cal eliminar el terme en $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}$ en la fórmula de descomposició de Riesz (teorema 7.13).

Suposem, doncs, donada una funció $u \in C^2(\bar{U})$ i que v és qualsevol funció, també de classe C^2 al voltant de $\bar{U}$, harmònica a U . Per la segona identitat de Green, hom té

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U u \Delta v \, dV(x) = \int_{\partial U} \left\{ u(y) \frac{\partial v}{\partial \vec{N}}(y) - v(y) \frac{\partial \vec{N}}{\partial \vec{N}}(y) \right\} dA(y) + \\ &\quad + \int_U v(y) \Delta u(y) \, dV(y). \end{aligned}$$

Restant aquesta igualtat de (7.15), queda

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial U} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} (G - v) - (G - v) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \right) dA(y) + \\ &\quad + \int_U (G - v)(y) \Delta u(y) \, dV(y). \end{aligned}$$

La idea és ara, fixat $x \in U$, triar v_x de manera que $v_x(y) = G(x - y)$ si $y \in \partial U$. En aquest cas, la funció $G_U(x, y) = G(x - y) - v_x(y)$ compliria

$$u(x) = \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G_U(x, y) \, dA(y) + \int_U G_U(x, y) \Delta u(y) \, dV(y). \quad (7.17)$$

Així voldríem trobar v_x , harmònica, de manera que $v_x(y) = G(x-y)$ si $y \in \partial U$. Es tracta de resoldre un problema de Dirichlet *particular*, un per a cada punt $x \in U$. Si d'alguna manera trobem una solució d'aquest problema particular, tindríem definida la funció G_U i podríem esperar que la solució del problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ a U , $u|_{\partial U} = \varphi$, amb $\varphi \in C(\partial U)$ estigués donada per

$$u(x) = \int_{\partial U} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G_U(x, y) dA(y).$$

La funció $G_U(x, y)$ s'anomena *primera funció de Green de U amb pol x* . Si $G_U(x, y)$ existeix i tot té sentit, la funció $P_U(x, y) = \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G_U(x, y)$, $x \in U$, $y \in \partial U$ s'anomena *nuchi de Poisson de U* . La solució del problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ a U , $u = \varphi$ a ∂U seria llavors

$$u(x) = \int_{\partial U} P_U(x, y) \varphi(y) dA(y).$$

L'existència de la funció de Green pot considerar-se per a qualsevol domini U acotat, no necessàriament amb frontera regular, perquè es tracta de resoldre un problema de Dirichlet amb dada $G(x-y)$ a la frontera; en cas d'existir, és l'única funció $G_U(x, y)$ harmònica a $U \setminus \{x\}$, com a funció de y , que compleix $G_U(x, y) = 0$ si $y \in \partial U$ i $G_U(x, y) = G(x-y) - v_x(y)$ amb v_x harmònica.

Proposició 7.23. *Sigui U un domini acotat de $\mathbb{R}^n$; si la funció de Green $G_U(x, y)$ existeix, llavors compleix $G_U(x, y) = G_U(y, x)$, per a $x, y \in U$, $x \neq y$.*

Demostració. La prova d'aquest resultat per a un domini acotat qualsevol és delicada i va més enllà del nivell d'aquest llibre. Aquí donarem només una idea de la prova per tal de justificar-ne el resultat. En el cas especial que el domini tingui la frontera regular, llavors la demostració rigorosa és elemental.

En general, si v_x designa la solució del problema de Dirichlet amb dada $\varphi(y) = G(x-y)$, cal veure que $v_x(y) = v_y(x)$. En primer lloc, observem que, pel principi del màxim, si $x_1, x_2 \in U$, hom té

$$|v_{x_1}(y) - v_{x_2}(y)| \leq \max_{z \in \partial U} |G(x_1 - z) - G(x_2 - z)|, \quad y \in U,$$

desigualtat que implica que $v_x(y)$ és contínua respecte de x a U . Veurem tot seguit que aquesta funció és harmònica en x , comprovant la validesa de la propietat de la mitjana. Si $B(x, r)$ és una bola de centre x inclosa a U , la mitjana

$$f(y) = \frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{S(x, r)} v_z(y) dA(z)$$

és una funció harmònica en y i contínua a $\overline{U}$, els valors frontera de la qual són

$$\frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} G(z-y) dA(z), \quad y \in \partial U.$$

Com que $G(z-y)$ és harmònica en z , aquests valors frontera són $G(x-y)$. Per tant, f és harmònica amb valors frontera $G(x-y)$, és a dir, $f = v_x$. Amb això hem vist que $v_x(y)$ és harmònica en x . Per a provar que $v_x(y) = v_y(x)$, és suficient veure, per la unicitat de solució del problema de Dirichlet, que $v_x(y)$ té una extensió contínua a $x \in \partial U$ i que val $G(x-y)$. Quan $y \in \partial U$, això és cert per construcció, i per a veure-ho quan $y \in U$, cal una versió més elaborada del principi del màxim que la que conté el teorema 7.19.

Per a tenir una demostració rigorosa suposant ara que U té la frontera regular, només cal aplicar la segona identitat de Green a $U \setminus (\overline{B}_\varepsilon(x) \cup \overline{B}_\varepsilon(y))$ per a $\varepsilon > 0$ prou petit i a les funcions $u(z) = G_U(x, z)$, $v(z) = G_U(y, z)$, per a obtenir

$$\int_{S(x,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \right) dA(z) = - \int_{S(y,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \right) dA(z).$$

El límit, quan $\varepsilon \rightarrow 0$, del terme de l'esquerra és $-v(x) = -G_U(y, x)$ i el del terme de la dreta és $-u(y) = -G_U(x, y)$, tal com s'ha vist a la prova del teorema 7.13, i això dóna el resultat enunciat. $\square$

Proposició 7.24. *Si la funció de Green $G_U(x, y)$ existeix, llavors compleix $G_U(x, y) \leq 0$, per a $x, y \in U$, $x \neq y$.*

Demostració. Tal com hem dit, $G_U(x, y)$ és harmònica respecte de y a $U \setminus \{x\}$. Considerem $U \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$. Quan $y \in \partial U$, $G_U(x, y)$ val zero, i si $|y-x| = \varepsilon$, $G_U(x, y) = G(x, y) - v_x(y)$ tendeix a $-\infty$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$. Pel principi del màxim, concloem que $G(x, y) \leq 0$. $\square$

Per a resoldre el problema de Neumann, ens podríem plantejar, de manera anàloga, trobar una funció harmònica v_x tal que $\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} v_x = \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y)$ si $y \in \partial U$, per a $x \in U$ fixat. En general, això és inconsistent, perquè sabem que $\int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \vec{N}} v_x dA = 0$ en ser v_x harmònica. Posem, llavors,

$$m = \frac{1}{A(\partial U)} \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y) dA(y),$$

amb $A(\partial U) = \int_{\partial U} dA$.

Com que $G(x - y)$ és harmònica a $U \setminus \{x\}$, hom té, per a $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) dA(y) = - \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y) dA(y) = 1,$$

on l'última igualtat es desprèn de (7.16). Per tant, $m = 1/A(\partial U)$ és independent de x . Ara plantegem el problema de Neumann particular $\Delta v_x = 0$ a U , $\frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} v_x = \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G - m$ a ∂U , de manera que ara la dada a la frontera sí que té integral zero. Si trobem d'alguna manera la solució v_x d'aquest problema, la funció $H_U(x, y) = v_x(y) - G(x - y)$ complirà

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{A(\partial U)} \int_{\partial U} u(y) dA(y) + \int_{\partial U} H_U(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) - \\ &\quad - \int_U H_U(x, y) \Delta u dV(y) \end{aligned}$$

i podem esperar que la solució del problema de Neumann $\Delta u = 0$ a U , $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \varphi$ a ∂U (amb $\varphi \in C(\partial U)$ i $\int_{\partial U} \varphi dA = 0$) sigui

$$u(x) = c + \int_{\partial U} H_U(x, y) \varphi(y) dA(y), \quad c \text{ constant.} \quad (7.18)$$

La funció H_U s'anomena *segona funció de Green de U amb pol x* .

Exemple 7.25. Novament, és il·lustratiu considerar el cas $n = 1$. Calculem la primera funció de Green de $U = (a, b)$ amb pol $x \in (a, b)$. Ara és $G(x - y) = \frac{1}{2}|x - y|$. Per tant, v_x és la funció lineal a (a, b) que en a val $\frac{1}{2}|a - x|$ i en b val $\frac{1}{2}|b - x|$; és a dir,

$$\begin{aligned} v_x(y) &= \frac{1}{2}|a - x| + \frac{1}{2} \frac{(|b - x| - |a - x|)}{b - a} (y - a) = \\ &= \frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2} \frac{b - x - (x - a)}{b - a} (y - a) = \\ &= \frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2} \frac{b + a - 2x}{b - a} (y - a) \end{aligned}$$

i resulta

$$G_U(x, y) = \frac{1}{2}|x - y| - v_x(y) = \begin{cases} \frac{(a - y)(b - x)}{b - a} & \text{si } y < x \\ \frac{(x - a)(y - b)}{b - a} & \text{si } x < y, \end{cases}$$

on es veu que $G_U(x, y) \leq 0$. □

7.6 Dominis plans: mètodes específics de variable complexa. Els problemes de Dirichlet i de Neumann al disc unitat

La relació que hi ha entre funcions harmòniques i funcions holomorfes fa que en dimensió dos es puguin aplicar mètodes específics de variable complexa per a resoldre els problemes de Dirichlet i de Neumann. En primer lloc, veurem com es pot trobar la funció de Green del disc unitat d'una forma directa i, en conseqüència, resoldre el problema de Dirichlet al disc. Més endavant veurem que les transformacions holomorfes deixen invariants les funcions harmòniques i els problemes de Dirichlet i de Neumann. Aquest fet permetrà resoldre aquests problemes en altres dominis plans fent servir representacions conformes.

7.6.1 La primera funció de Green i el nucli de Poisson del disc unitat

D'acord amb la secció anterior, per a obtenir la primera funció de Green del disc unitat $\mathbb{D}$ cal que trobem, per a $z \in \mathbb{D}$ fixat, una funció harmònica v a $\overline{\mathbb{D}}$ tal que $v(w) = G(z - w) = \frac{1}{2\pi} \text{Log} |z - w|$ si $w \in \partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$, és a dir, si $|w| = 1$. Si $z = 0$, evidentment ens serveix $v \equiv 0$. Ara bé, si $|w| = 1$, hom té $|z - w| = |1 - w\bar{z}|$, de manera que la funció

$$v(w) = \frac{1}{2\pi} \text{Log} |1 - w\bar{z}|,$$

efectivament, compleix $v(w) = G(z - w)$ si $|w| = 1$. Com que $1 - w\bar{z}$ és holomorfa respecte de w amb un únic zero en el punt $\frac{1}{\bar{z}}$, que queda fora del disc, sabem que $\text{Log} |1 - w\bar{z}|$ és harmònica a $\mathbb{D}$. Així doncs, trobem com a primera funció de Green del disc la funció

$$G_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z - w}{1 - w\bar{z}} \right|.$$

Calculem ara el nucli de Poisson, $P_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{\partial}{\partial \bar{N}_w} G_{\mathbb{D}}(z, w)$. Per a això, posem $w = re^{i\theta}$ i observem que $r \frac{\partial}{\partial r} = w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$. Si $r = |w| = 1$, és

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{D}}(z, w) &= \frac{\partial}{\partial r} G_{\mathbb{D}}(z, w) = \left(w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) G_{\mathbb{D}}(z, w) = \\ &= \left(w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \frac{1}{4\pi} \text{Log} \left| \frac{z - w}{1 - w\bar{z}} \right|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \left(w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \left(\log \frac{z-w}{1-wz} + \log \frac{\bar{z}-\bar{w}}{1-\bar{w}z} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-w\bar{z}|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}.
\end{aligned}$$

Amb això la fórmula (7.17) queda, en el cas del disc unitat,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^2} u(w) d\sigma(w) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log \left| \frac{z-w}{1-w\bar{z}} \right| \Delta u(w) dm(w),$$

on recordem que $d\sigma$ és l'element de longitud sobre el cercle unitat, és a dir, $d\sigma(w) = d\theta$ si $w = e^{i\theta}$.

La discussió de la secció 7.5 mostra també que si u és una funció harmònica a $\mathbb{D}$ i contínua a $\bar{\mathbb{D}}$, llavors u queda determinada pels seus valors a $\mathbb{T}$ per la fórmula

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^2} u(w) d\sigma(w). \quad (7.19)$$

En conseqüència, per a resoldre el problema de Dirichlet a $\mathbb{D}$ amb dada $\varphi \in C(\mathbb{T})$, hem de considerar la funció

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-w|^2} \varphi(w) d\sigma(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (7.20)$$

Per a provar que, efectivament, la funció definida per (7.20) és la solució del problema de Dirichlet necessitem algunes propietats de $P_{\mathbb{D}}(z, w)$:

- 1) Per a tot punt $w \in \mathbb{T}$, el nucli $P_{\mathbb{D}}(z, w)$ és una funció harmònica en $z \in \mathbb{D}$ i compleix $P_{\mathbb{D}}(z, w) \geq 0$.
- 2) $\int_{\mathbb{T}} P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w) = 1$, per a $z \in \mathbb{D}$.
- 3) Fixats $w_0 \in \mathbb{T}$ i $\delta > 0$, hom té $\lim_{z \rightarrow w_0} \int_{|w-w_0| \geq \delta} P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w) = 0$.

La propietat 1) es pot comprovar directament, és a dir, calculant $\Delta_z P_{\mathbb{D}}(z, w)$, però ens serà més útil mostrar que el nucli de Poisson és la part real d'una funció holomorfa en z . Escrivim $G_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|$ i observem que $G_{\mathbb{D}}$ és la part real de $\frac{1}{2\pi} \log \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ i que aquesta funció, per a w fixat amb $|w| \leq 1$, és una funció holomorfa a $D(0, |w|)$. Per tant, $P_{\mathbb{D}}(z, w)$ és la part real de la funció

holomorfa en z ,

$$\begin{aligned} \left(w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \Big|_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{w}{w-z} + \frac{\bar{w}z}{1-z\bar{w}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{w - \bar{w}z^2}{(1-z\bar{w})(w-z)} = \frac{1}{2\pi} \frac{w^2 - z^2}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{w+z}{w-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}} = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1-z\bar{w}} - 1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

La propietat 2) s'obté de (7.19) especificant a la funció $u \equiv 1$. La propietat 3) és immediata: si $|w-w_0| \geq \delta$ i $|z-w_0| \leq \frac{\delta}{2}$, llavors és $|w-z| \geq \frac{\delta}{2}$ i $P_{\mathbb{D}}(z, w) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\delta^2} (1-|z|^2)$; per tant,

$$\int_{|w-w_0| \geq \varepsilon} P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w) \leq \frac{4}{\delta^2} (1-|z|^2) \xrightarrow{z \rightarrow w_0} 0.$$

Teorema 7.26 (Solució del problema de Dirichlet al disc unitat). *Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$, la funció u definida per la igualtat (7.20) és harmònica a $\mathbb{D}$ i compleix*

$$\lim_{z \rightarrow w} u(z) = \varphi(w), \quad \text{per a cada } w \in \mathbb{T}.$$

Demostració. En primer lloc,

$$\Delta u(z) = \Delta \int_{\mathbb{T}} P_{\mathbb{D}}(z, w) \varphi(w) d\sigma(w) = \int_{\mathbb{T}} \Delta_z P_{\mathbb{D}}(z, w) \varphi(w) d\sigma(w) = 0,$$

per la propietat 1) i u és harmònica a $\mathbb{D}$.

Ara cal demostrar que $\lim_{z \rightarrow w_0} u(z) = \varphi(w_0)$, si $|w_0| = 1$. Fent servir la propietat 2) i $P_{\mathbb{D}}(z, w) \geq 0$ tenim, per a $\delta > 0$:

$$u(z) - \varphi(w_0) = \int_{\mathbb{T}} \{\varphi(w) - \varphi(w_0)\} P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w),$$

$$\begin{aligned} |u(z) - \varphi(w_0)| &\leq \int_{\mathbb{T}} |\varphi(w) - \varphi(w_0)| P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w) \leq \\ &\leq \int_{|w-w_0| \geq \delta} + \int_{|w-w_0| \leq \delta} = \text{I} + \text{II}. \end{aligned}$$

La part II es pot estimar així,

$$\begin{aligned} \text{II} &\leq \sup_{|w-w_0| \leq \delta} |\varphi(w) - \varphi(w_0)| \int_{|w-w_0| \leq \delta} P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w) \leq \\ &\leq \sup_{|w-w_0| \leq \delta} |\varphi(w) - \varphi(w_0)|, \end{aligned}$$

de manera que, donat $\varepsilon > 0$ podem aconseguir $\text{II} \leq \varepsilon/2$ per a tot z , si $\delta > 0$ és prou petit, per la continuïtat uniforme de φ . Ara, fixat aquest δ , per la propietat 3) tindrem també

$$\text{I} \leq 2\|\varphi\|_{\infty} \int_{|w-w_0| \geq \delta} P_{\mathbb{D}}(z, w) d\sigma(w) \leq \varepsilon/2$$

si z és prou proper a w_0 , i això acaba la demostració. $\square$

És convenient, de vegades, expressar la solució u —que s'anomena *transformada de Poisson* de φ i es representa per $P[\varphi]$ — en una forma lleugerament diferent. Posem $w = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $z = re^{i\theta}$; llavors $|z - w|^2 = |re^{i\theta} - e^{it}|^2 = 1 + r^2 - 2 \operatorname{Re} r\bar{w}e^{i\theta} = 1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)$. Així, definint les funcions u_r per $u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$, $0 \leq r < 1$, resulta

$$u_r(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} \varphi(e^{it}) dt,$$

és a dir, u_r és la *convolució* de la dada φ amb la funció

$$P_r(t) = P(r, e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t}$$

com a funcions definides sobre el grup multiplicatiu $\mathbb{T}$. De manera resumida, és

$$u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) = (\varphi * P_r)(e^{i\theta}).$$

El fet que la solució s'expressi d'aquesta manera s'explica, també, perquè el problema de Dirichlet és *invariant per rotacions* en el sentit següent: si tenim dues dades φ_1, φ_2 i una s'obté de l'altra component amb una rotació, $\varphi_2(w) = \varphi_1(\lambda w)$ amb $|\lambda| = 1$, llavors les solucions respectives u_1, u_2 compleixen la mateixa relació, $u_2(w) = u_1(\lambda w)$. El fet rellevant és que tot operador $\varphi \mapsto u$ que tingui aquesta propietat, s'expressa sempre com una convolució de φ per un nucli determinat.

Ara calcularem l'expressió de la funció harmònica u en sèrie de potències de z i $\bar{z}$ (teorema 4.19) i veurem com depenen els coeficients d'aquest desenvolupament dels coeficients de Fourier de φ . Primer observem que val la igualtat

$$\frac{2}{1 - z\bar{w}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (z\bar{w})^n, \quad \text{uniformement per a } w \in \mathbb{T}, \quad \text{si } |z| < 1.$$

Per tant, per (7.21), hom té

$$\begin{aligned} 2\pi P_{\mathbb{D}}(z, w) &= \operatorname{Re} \left(\frac{2}{1 - z\bar{w}} - 1 \right) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (z\bar{w})^n - 1 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z\bar{w})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{z}w)^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (z\bar{w})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{z}w)^n, \end{aligned}$$

també uniformement a $\mathbb{T}$. Ara, recordant que l'enèsim coeficient de Fourier de φ és $\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \bar{w}^n d\sigma(w)$, trobem

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{\varphi}(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \hat{\varphi}(-n).$$

Dit d'una altra manera, $P_r(t) = P(r, e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$ i si $\varphi(t) \sim \sum \hat{\varphi}(n) e^{int}$, llavors

$$u(z) = (\varphi * P_r)(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \hat{\varphi}(n) e^{int}, \quad z = re^{it}. \quad (7.22)$$

La solució corresponent a $\varphi(t) = e^{int}$ és $z^n = r^n e^{int}$ si $n \geq 0$ i $\bar{z}^n = r^{|n|} e^{int}$ si $n < 0$.

Exemple 7.27. Calculem la solució del problema de Dirichlet al disc unitat quan la dada és $\varphi(e^{it}) = \cos^2 t$. Trobem primer el desenvolupament de Fourier de φ , el qual podem aconseguir senzillament expressant $\cos t$ en termes d'exponencials complexes: $\varphi(e^{it}) = (\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}))^2 = \frac{1}{4}(e^{2it} + 2 + e^{-2it})$. La solució és, per tant, $u(z) = \frac{1}{4}(z^2 + 2 + \bar{z}^2) = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2)$.

Amb aquest mètode es pot veure que si la dada φ és un polinomi en $\cos t$ i $\sin t$, llavors la solució u és la suma d'un polinomi en z i un polinomi en $\bar{z}$. $\square$

Tàcitament, en la formulació i en la solució del problema de Dirichlet al disc unitat hem suposat que tractem amb funcions reals, és a dir, que la dada φ és una funció contínua a $\mathbb{T}$ real i la solució u és una funció harmònica real a $\mathbb{D}$.

Evidentment, considerant separatament parts reals i parts imaginàries, podem considerar un problema de Dirichlet complex: donada qualsevol funció contínua $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, hi ha una única funció harmònica $u: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$, amb $u|_{\mathbb{T}} = \varphi$, que té les mateixes expressions (7.20) i (7.22). Així, si representem per $h(\mathbb{D})$ l'espai de les funcions harmòniques a $\mathbb{D}$, tenim una correspondència bijectiva

$$\begin{aligned} C(\mathbb{T}) &\longrightarrow C(\overline{\mathbb{D}}) \cap h(\mathbb{D}) \\ \varphi &\longrightarrow u = P[\varphi] \end{aligned}$$

que assigna a φ la funció $u = P[\varphi]$, l'única funció contínua a $\overline{\mathbb{D}}$ i harmònica a $\mathbb{D}$ tal que $u|_{\mathbb{T}} = \varphi$.

Un subespai de $h(\mathbb{D})$ és l'espai $H(\mathbb{D})$ format per les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$. La classe $C(\overline{\mathbb{D}}) \cap H(\mathbb{D})$ que consta, per tant, de les funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ que tenen una extensió contínua a $\overline{\mathbb{D}}$ s'anomena *àlgebra del disc* i es designa per $A(\mathbb{D})$. En la correspondència bijectiva $\varphi \rightarrow u = P[\varphi]$, al subespai $A(\mathbb{D}) \subset C(\overline{\mathbb{D}}) \cap h(\mathbb{D})$ li correspon el subespai $A(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$ format per les funcions $\varphi \in C(\mathbb{T})$ tals que $P[\varphi] \in H(\mathbb{D})$; a la vista de (7.22), hom té

$$A(\mathbb{T}) = \{\varphi \in C(\mathbb{T}) : \widehat{\varphi}(n) = 0, n \in \mathbb{Z}, n < 0\}.$$

Convé tenir present ara que, pel teorema de Weierstrass, tota funció de $C(\mathbb{T})$ és el límit uniforme a $\mathbb{T}$ d'una successió de polinomis en x, y , que és el mateix que dir una successió de polinomis en $z, \bar{z}$. Observem, però, que si

$$\sum' a_{nm} z^n \bar{z}^m$$

és un polinomi en $z, \bar{z}$, utilitzant el fet que $z\bar{z} = 1$ si $|z| = 1$, resulta que la restricció a $\mathbb{T}$ del polinomi anterior és la suma d'un polinomi en z i un polinomi en $\bar{z}$. Així, quan resollem el problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ a $\mathbb{D}$, $u = \varphi$ a $\mathbb{T}$ per a una dada $\varphi \in C(\mathbb{T})$ mitjançant la funció $u = P[\varphi]$ estem exhibint explícitament polinomis en $z, \bar{z}$ que aproximen φ uniformement a $\mathbb{T}$. Si volem un polinomi $P(z, \bar{z})$ tal que $|\varphi(z) - P(z, \bar{z})| < \varepsilon$ si $|z| = 1$, com que

$$\varphi(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} u(re^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{int}$$

i la sèrie convergeix uniformement a $\mathbb{T}$, en primer lloc triem r de manera que $|\varphi(e^{it}) - u(re^{it})| < \varepsilon/2$ i després una suma parcial $\sum_{|n| \leq N} \widehat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{int}$ amb N prou gran per tal que $|u(re^{it}) - \sum_{|n| \leq N} \widehat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{int}| < \varepsilon/2$, utilitzant la convergència uniforme en el cercle $|z| = r$. Així, no és cert que

$$\varphi(e^{it}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \widehat{\varphi}(n) e^{int} \quad \text{uniformement en } t,$$

però sí que ho és

$$\varphi(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{\varphi}(n) r^{|n|} e^{int} \quad \text{uniformement en } t.$$

Si $\varphi \in A(\mathbb{T})$, els polinomis que aproximen φ –les sumes parcials anteriors– són polinomis només en z . Convé destacar que, tal com hem dit, *no és cert* en general que els polinomis trigonomètrics

$$S_N(\varphi) = \sum_{|n| \leq N} \hat{\varphi}(n) e^{int}$$

convergeixin cap a φ uniformement a $\mathbb{T}$ si $\varphi \in C(\mathbb{T})$ (sí que és cert, però, si a més φ té variació acotada). Una altra forma clàssica de construir polinomis que aproximen uniformement una funció $\varphi \in C(\mathbb{T})$ és utilitzant les sumes de Fejer $\sigma_N(\varphi)$, mitjanes aritmètiques dels polinomis $S_N(\varphi)$, definides per

$$\sigma_N(\varphi) = \frac{1}{N+1} (S_0(\varphi) + \cdots + S_N(\varphi)).$$

En l'enunciat següent, que descriu l'espai $A(\mathbb{T})$, l'item a) diu que $A(\mathbb{T})$, és la “meitat” de $C(\mathbb{T})$, la part engendrada pels polinomis en z .

Proposició 7.28. *a) $A(\mathbb{T})$ és el subespai de $C(\mathbb{T})$ format per les funcions $\varphi \in C(\mathbb{T})$ que es poden aproximar uniformement a $\mathbb{T}$ per polinomis en z .*

b) Una funció $\varphi \in C(\mathbb{T})$ pertany a $A(\mathbb{T})$ si i només si $\int_{\mathbb{T}} \varphi(z) z^n dz = 0$, per a $n \geq 0$.

c) Una funció $\varphi \in C(\mathbb{T})$ pertany a $A(\mathbb{T})$ si i només si

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(z)}{z-w} dz = 0, \quad \text{per a } |w| > 1.$$

d) Les funcions $\varphi \in C(\mathbb{T})$ que es poden aproximar uniformement a $\mathbb{T}$ per polinomis en $\bar{z}$ són les de $\bar{A}(\mathbb{T})$ i es caracteritzen per la condició

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \bar{z}^n d\bar{z} = 0, \quad \text{per a } n \geq 0,$$

o bé per

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) dt, \quad |w| < 1.$$

e) Si $A_0(\mathbb{T})$ designa el subespai de les funcions $\varphi \in A(\mathbb{T})$ amb $\widehat{\varphi}(0) = 0$ (condició que significa que la funció $u \in A(\mathbb{D})$ amb valors frontera φ compleix $u(0) = 0$), llavors una funció $\varphi \in C(\mathbb{T})$ pertany a l'espai $A_0(\mathbb{T})$ si i només si φ és perpendicular a $A(\mathbb{T})$ pel producte escalar de $L^2(\mathbb{T})$ definit per

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \overline{\psi(e^{it})} dt.$$

Demostració. Ja hem vist que $\varphi \in A(\mathbb{T})$ si i només si $\widehat{\varphi}(m) = 0$ per a $m < 0$; si $m = -n$, $n > 0$, llavors és

$$\widehat{\varphi}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) z^{n-1} dz$$

i tenim b). En les consideracions que hem fet abans de l'enunciat ja hem observat que tota funció $\varphi \in A(\mathbb{T})$ s'aproxima uniformement per polinomis en z sobre $\mathbb{T}$. El recíproc és immediat, ja que tot polinomi en $z = e^{it}$ només dóna coeficients de Fourier efectius per a $n \geq 0$. La integral de c) es pot escriure, desenvolupant en sèrie geomètrica l'integrand, com

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(z)}{z-w} dz &= - \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \frac{1}{w(1-\frac{z}{w})} dz = \\ &= - \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} dz = - \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) z^n dz, \end{aligned}$$

i llavors c) és conseqüència de b). Conjugant a b) tenim $\varphi \in \overline{A(\mathbb{T})}$ si i només si $\int \varphi(z) \bar{z}^n dz = 0$, $n \geq 0$ o, equivalentment, $\int \varphi(z) z^m dz = 0$, $m \leq -2$. La integral de d) és aleshores

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) dt.$$

La part e) és evident, perquè $\overline{A_0(\mathbb{T})}$ està generat per les funcions $\bar{z}^n$ amb $n \geq 1$ i $A(\mathbb{T})$ per les funcions z^m amb $m \geq 0$ i

$$\langle z^m, \bar{z}^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m+n)t} dt = 0. \quad \square$$

El càlcul fet per a provar l'item d) de la proposició anterior demostra que la integral de Cauchy d'una funció $\varphi \in C(\mathbb{T})$ és exactament

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(z)}{z-w} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) w^n.$$

Ara bé, aquesta funció no és necessàriament contínua a $\overline{\mathbb{D}}$.

En el capítol 10 donarem una versió més general de la proposició 7.28.

7.6.2 Relacions entre el nucli de Cauchy i el nucli de Poisson

Si f és una funció holomorfa en un entorn del disc unitat tancat $\overline{\mathbb{D}}$, la fórmula integral de Cauchy es pot escriure, posant $w = e^{i\theta}$ si $|w| = 1$, i fent intervenir la mesura $d\sigma(w) = d\theta$, en la forma següent:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{1 - \overline{w}z} d\sigma(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta}z} d\theta, \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Una funció holomorfa és harmònica, i, per tant, també tenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(w) \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2} d\sigma(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (7.24)$$

Així, tant el nucli de Cauchy com el nucli de Poisson són nuclis reproductors per a les *funcions holomorfes* a partir dels seus valors sobre $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. La diferència entre els dos nuclis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2} - \frac{1}{1 - \overline{w}z} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \overline{w}z} \left\{ \frac{1 - |z|^2}{1 - \overline{w}z} - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{w\overline{z} - |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2} = \frac{\overline{z}(w - z)}{2\pi(1 - \overline{w}z)(1 - w\overline{z})} = \frac{\overline{z}}{2\pi\overline{w}(1 - w\overline{z})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\overline{z}w}{1 - \overline{z}w} \end{aligned}$$

és, per tant, un nucli que anul·la les funcions holomorfes en el sentit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(w) \frac{\overline{z}w}{1 - \overline{z}w} d\sigma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(w) \frac{\overline{z} dw}{1 - \overline{z}w} = 0.$$

Aquesta igualtat també és conseqüència del teorema de Cauchy si tenim en compte que la funció $f(w) = \frac{1}{1 - \overline{z}w}$ és holomorfa en un entorn de $\overline{\mathbb{D}}$.

Una altra manera d'obtenir la fórmula de Poisson per a la funció holomorfa f és aplicar la fórmula de Cauchy, fixat z , a la funció $h(w) = f(w)/(1 - \overline{z}w)$. Llavors resulta

$$\frac{f(z)}{1 - |z|^2} = h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{h(w)}{1 - \overline{w}z} d\sigma(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{|1 - \overline{w}z|^2} d\sigma(w).$$

És important observar que el nucli de Cauchy és un nucli *universal*, és a dir, és el mateix per a tots els dominis, mentre que el nucli de Poisson depèn del domini (així mateix, en el primer cas integrem respecte dw –també universal– i en el segon, respecte $d\sigma(w)$ que depèn del domini). El nucli de Poisson només és explícit en dominis amb moltes simetries, com és el cas del disc.

Si escrivim el nucli de Cauchy, $C(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dw}{w-z}$, en la forma $C(z, w) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma(w)}{1-\bar{w}z}$, tal com hem fet abans, i fem servir (7.21), trobem la relació següent entre el nucli de Poisson i el nucli de Cauchy.

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{D}}(z, w) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{1-z\bar{w}} - 1 \right\} = 2 \operatorname{Re} C(z, w) - 1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad |w| = 1. \end{aligned}$$

Aquesta fórmula té una conseqüència interessant relacionada amb l'observació següent. Sabem que una funció f holomorfa a $\mathbb{D}$ està determinada per la seva part real llevat d'una constant imaginària. Aquesta part real és una funció harmònica que està determinada pels seus valors a $\mathbb{T}$. En conclusió, f està determinada, llevat d'una constant imaginària, per la seva part real a $\mathbb{T}$. Doncs bé, el nucli $\frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}}$ fa explícita la reconstrucció de f a $\mathbb{D}$ a partir dels valors de $\operatorname{Re}(f)$ sobre $\mathbb{T}$.

Teorema 7.29. *Si la funció f és holomorfa en un entorn de $\bar{\mathbb{D}}$ i $u = \operatorname{Re} f$, llavors hom té*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}} u(w) d\sigma(w) + i \operatorname{Im} f(0), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostració. La integral defineix una funció holomorfa a $\mathbb{D}$ que, pel que acabem de veure, té part real u . La diferència amb f té part real zero i, per tant, és una constant imaginària. $\square$

En conseqüència, la funció harmònica conjugada de u , posem $v = \operatorname{Im} f$, que compleixi $v(0) = 0$ està donada per

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Im} \frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}} u(w) d\sigma(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\operatorname{Im} z\bar{w}}{|1-z\bar{w}|^2} u(w) d\sigma(w).$$

El nucli

$$\frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}}$$

que apareix en el teorema 7.29 s'anomena *nucli de Herglotz*, i la fórmula que representa la funció f en aquest teorema s'escriu també

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt + i \operatorname{Im} f(0), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Corol·lari 7.30. *Tota funció f holomorfa en un entorn de $\overline{\mathbb{D}}$ sense zeros a $\overline{\mathbb{D}}$, s'expressa en termes dels valors de $|f|$ sobre $\mathbb{T}$ mitjançant la fórmula*

$$f(z) = \lambda \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + z\overline{w}}{1 - z\overline{w}} \operatorname{Log} |f(w)| d\sigma(w), \quad z \in \mathbb{D}$$

amb $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Demostració. Només cal aplicar el teorema 7.29 a una determinació de la funció $\log f$. $\square$

Exemple 7.31. Apliquem la fórmula del teorema 7.29 a la determinació principal del logaritme de $f(z) = z - a$, amb a real i $a < -1$:

$$\operatorname{Log}(z - a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \operatorname{Log} |e^{it} - a| dt.$$

Fent $z = 0$ trobem

$$\operatorname{Log} |a| = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 + a^2 - 2a \cos t) dt.$$

Com que $\operatorname{Log} |e^{it} + 1|$ encara és integrable, podem fer tendir a a -1 i obtenim

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 + \cos t) dt = -2\pi \log 2. \quad \square$$

7.6.3 La solució del problema de Neumann al disc unitat

Per a calcular la segona funció de Green del disc unitat $\mathbb{D}$ cal trobar, fixat $z \in \mathbb{D}$, una funció harmònica, $v = v_z$, a $\overline{\mathbb{D}}$ tal que $\frac{\partial v}{\partial N} = \frac{\partial G}{\partial N} - \frac{1}{2\pi}$ si $|w| = 1$. En primer lloc, calculant, hom té

$$\frac{\partial G}{\partial N}(w) = w \frac{\partial}{\partial w} + \overline{w} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \Big|_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \log |z - w| \right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{w}{w - z} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \overline{w}z},$$

$$\frac{\partial G}{\partial N} - \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \overline{w}z} - 1 \right\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\overline{w}z}{1 - \overline{w}z}.$$

Ara es veu que serveix la funció $v(w) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |1 - \bar{w}z|$, perquè

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{N}} = w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \Big|_{\mathbb{T}} \left(-\frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |1 - \bar{w}z| \right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\bar{w}z}{1 - \bar{w}z}.$$

Així doncs, $H_{\mathbb{D}}(z, w) = v(w) - G(z - w) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Log}(|z - w| |1 - \bar{w}z|)$, és la segona funció de Green de $\mathbb{D}$.

Teorema 7.32. *Suposem que $\varphi \in C(\mathbb{T})$ compleix la condició de compatibilitat $\int_{\mathbb{T}} \varphi d\sigma = 0$. Llavors l'única solució del problema $\Delta u = 0$ a $\mathbb{D}$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{N}} = \varphi$ a $\mathbb{T}$ que val 0 a l'origen, és la funció*

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} H_{\mathbb{D}}(z, w) \varphi(w) d\sigma(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostració. D'acord amb (7.18) aquesta és la solució esperada. Comprovem que ho és. Quan $|w| = 1$, hom té $H_{\mathbb{D}}(z, w) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Log} |z - w|$, que és harmònica en z , i per tant u és harmònica. Pel mateix càlcul que acabem de fer, resulta

$$\frac{\partial}{\partial \bar{N}} H_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{z}{w - z} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{\bar{w}z - |z|^2}{|w - z|^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2} - 1 \right).$$

Això significa que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{N}}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} \varphi(w) d\sigma(w) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(w) d\sigma(w) = P[\varphi](z).$$

És a dir, $\frac{\partial u}{\partial \bar{N}}$ és la transformada de Poisson de φ i, per tant, val φ a $\mathbb{T}$. $\square$

Observació 7.2. Estrictament parlant, la funció u no és de classe C^1 a $\bar{\mathbb{D}}$. Tan sols hem vist que $\frac{\partial u}{\partial \bar{N}}$ és contínua a $\bar{\mathbb{D}}$, i per establir la continuïtat de tot el gradient, $\vec{\nabla} u$, cal que φ compleixi unes propietats addicionals.

7.7 L'equació de Poisson a $\mathbb{R}^n$

7.7.1 El potencial de Riesz d'una mesura

L'equació de Poisson és l'equació

$$\Delta u = \phi,$$

on, de moment, suposarem que ϕ és una funció contínua amb suport compacte a $\mathbb{R}^n$. Si aquesta equació té una solució u dues vegades diferenciable, llavors en

té infinites perquè sumant a u qualsevol funció harmònica obtindrem una altra solució. Per tal de distingir una solució d'entre totes les possibles cal imposar alguna altra condició. El principi del màxim ens indica quina pot ser aquesta condició, ja que, segons sabem, tota funció u queda determinada en un domini per Δu i els valors de u a la frontera del domini.

Proposició 7.33. *a) Si u és una funció dues vegades diferenciable a $\mathbb{R}^n$, nula a l'infinit (és a dir: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0$) i tal que Δu és continu amb suport compacte (en particular si $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$), llavors hom té*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \Delta u(y) dV(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Donada una funció $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, si hi ha una solució u dues vegades diferenciable de l'equació $\Delta u = \phi$, nula a l'infinit, aquesta solució és única i és el potencial de Riesz

$$u = G(\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \phi(y) dV(y).$$

Quan $n = 2$, una condició necessària per a l'existència de la solució u de l'apartat b) és que es compleixi la condició $\int \phi dV = 0$.

Demostració. Suposem, de moment, $n > 2$ i apliquem el corol·lari 7.18. Designant per K el suport de Δu i fent servir que $u(x) \rightarrow 0$ quan $|x| = R \rightarrow +\infty$, resulta

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(x,R)} H_R(x-y) \Delta u(y) dV(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_K H_R(x-y) \Delta u(y) dV(y) = \\ &= \int_K G(x-y) \Delta u(y) dV(y) - \lim_{R \rightarrow +\infty} d_n R^{2-n} \int_K \Delta u(y) dV(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \Delta u(y) dV(y). \end{aligned}$$

Si $n = 2$, R^{2-n} se substitueix per $\text{Log } R$. En aquest cas, l'existència del límit implica que $\int_K \Delta u(y) dV(y) = 0$ i a) queda demostrat. Òbviament b) és una conseqüència de a) (observem que la unicitat es també conseqüència del principi del mòdul màxim). La condició necessària quan $n = 2$ és conseqüència del fet que en aquest cas, tal com hem dit, es compleix $\int_K \Delta u dV = 0$. $\square$

La particularitat del cas $n = 2$ en l'apartat b) s'explica amb l'observació següent: si $n > 2$, tot potencial de Riesz $u = G(\phi)$ d'una funció contínua ϕ

amb suport compacte K és nul a l'infinit perquè hom té $\sup_{y \in K} |x - y|^{2-n} \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow \infty$. Si $n = 2$, això ja no és així, però si $\int_K \phi(y) dV(y) = 0$, llavors

$$\int_K \text{Log } |x - y| \phi(y) dV(y) = \int_K (\text{Log } |x - y| - \text{Log } |x|) \phi(y) dV(y),$$

i ara sí que $\text{Log } \frac{|x-y|}{|x|} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ uniformement per a $y \in K$.

La part *b*) de la proposició 7.33 no demostra que donada una funció $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (amb $\int \phi dV = 0$ si $n = 2$) el potencial de Riesz $u = G(\phi)$ sigui solució de $\Delta u = \phi$, nul·la a l'infinit; tan sols diu que si hi ha solució, és aquesta. Per a estudiar l'existència de solucions de l'equació de Poisson, cal analitzar les propietats dels potencials de Riesz. Amb aquesta finalitat i també de cara a les aplicacions, és convenient estendre la definició de potencial de Riesz que hem donat a (7.14) substituint ϕdV per una mesura real μ definida a $\mathbb{R}^n$ amb suport compacte K i de variació total finita, $|\mu|(K) < +\infty$. Recordem que el suport d'una mesura μ , $\text{spt}(\mu)$, és el complementari de l'obert més gran en el qual μ s'anul·la. Cal pensar en μ com una distribució de càrregues o de masses, que pot ser absolutament contínua com és el cas $\mu = \phi dV$, o, en l'altre extrem, poden ser càrregues puntuals $\mu = \sum c_i \delta_{a_i}$, amb $\sum |c_i| < +\infty$ i δ_{a_i} representant la massa 1 en el punt a_i (delta de Dirac en a_i). En una situació intermèdia, μ pot ser la mesura d'integració sobre una corba o sobre una hipersuperfície o, per exemple, una distribució de càrregues sobre una esfera.

Donada, doncs, una mesura real μ a $\mathbb{R}^n$ amb suport compacte K i $|\mu|(K) < +\infty$, considerarem el *potencial de Riesz* de μ :

$$u(x) = \int_K G(x - y) d\mu(y) \stackrel{\text{def}}{=} G(\mu)(x). \quad (7.25)$$

Així els potencials de capa simple

$$\int_{\partial U} \phi(y) G(x - y) dA(y)$$

que apareixen a la fórmula de descomposició de Riesz, en són un cas particular. Si $\mu = \sum_i c_i \delta_{a_i}$ és una mesura discreta, llavors hom té $u(x) = \sum_i c_i G(x - a_i)$.

Comencem per precisar la definició de la funció $G(\mu)$.

Proposició 7.34. *El potencial $G(\mu)$ està definit a tot punt que no pertany a $K = \text{spt}(\mu)$ i és una funció harmònica a $\mathbb{R}^n \setminus K$.*

Demostració. Fem la prova si $n > 2$. Si $x \notin K$, tenim $|x - y| \geq d(x, K) > 0$ per a $y \in K$; llavors $G(x - y)$ és acotada a K i $G(\mu)(x)$ està ben definit. També

$G(x - y)$ és de classe C^1 en un entorn de x i contínua a K ; per tant,

$$|G(x - y) - G(z - y)| \leq C(x)|x - z|, \quad y \in K$$

per a $|x - z| < \frac{1}{2}d(x, K)$ i alguna funció $C(x)$. Aleshores $|G(\mu)(x) - G(\mu)(z)| \leq C(x)|z - x|$, desigualtat que prova que $G(\mu)$ és contínua a $\mathbb{R}^n \setminus K$. Un cop s'ha vist que $G(\mu)$ és contínua a $\mathbb{R}^n \setminus K$, per a provar que $G(\mu)$ és harmònica podem utilitzar la propietat de la mitjana. Si B és una bola disjunta amb K de centre x_0 , hom té, pel teorema de Fubini,

$$\frac{1}{A(\partial B)} \int_{\partial B} G(\mu)(x) dA(x) = \int_K \left\{ \frac{1}{A(\partial B)} \int_{\partial B} G(x - y) dA(x) \right\} d\mu(y).$$

Ara, $G(x - y)$ és harmònica en x , per a $y \in K$; per tant, la integral interior és $G(x_0 - y)$ i obtenim $G(\mu)(x_0)$. $\square$

Té sentit la funció $u(x) = G(\mu)(x)$ en els punts $x \in K$? En general, la resposta és que no. El cas més obvi és quan prenem com a μ una massa puntual en y , $\mu = \delta_y$; llavors $u(x) = G(x - y)$ tendeix a ∞ quan $x \rightarrow y$.

En alguns casos especials sí que el potencial està definit en els punts del suport de la mesura; per exemple, això passa genèricament per als potencials de capa simple. Si μ és la mesura d'integració sobre una varietat M de dimensió k , a l'espai $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, llavors la funció $|x - y|^{2-n}$ és integrable localment sobre M si i només si $2 - n + k > 0$, és a dir, si $k > n - 2$. Si $k \leq n - 2$, (per exemple $n = 3$ i M és una recta) $u(x)$ es fa infinita a M . Si $n = 2$, $\log|x - y|$ és integrable sobre rectes i corbes. Quan $G(x - y)$ sigui integrable respecte de μ , en general u serà contínua; altrament presentarà discontinuïtats. Així, en general, els potencials de capa simple són funcions contínues.

Exemple 7.35. Quan μ és la mesura d'integració sobre $S(0, R)$, $R > 0$, hem vist en l'exemple 7.14 que el potencial (de capa simple) corresponent val $\frac{1}{2-n}R$ ($R \log R$ si $n = 2$) si $|x| < R$ i $\frac{R^{n-1}}{(2-n)|x|^{n-2}}$ ($R \log|x|$ si $n = 2$) si $|x| > R$. En aquest cas el potencial és una funció contínua en els punts x amb $|x| = R$, però les derivades presenten discontinuïtats. $\square$

A continuació analitzarem detalladament els potencials del tipus

$$G(\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y)\phi(y)dV(y),$$

on ϕ és una funció acotada amb suport compacte. Es tracta de la *convolució* de les funcions G i ϕ , i per això és convenient disposar d'algunes propietats

generals de les convolucions. Recordem que $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és l'espai de les funcions mesurables a $\mathbb{R}^n$ que són integrables sobre cada compacte de $\mathbb{R}^n$ i $L^1_c(\mathbb{R}^n)$ és l'espai de les funcions integrables a $\mathbb{R}^n$ i amb suport compacte. Anàlogament, $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ designa l'espai de les funcions mesurables que són essencialment acotades sobre compactes i $L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ el de les funcions mesurables, essencialment acotades i amb suport compacte.

Proposició 7.36. *Considerem una convolució*

$$(k * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\phi(y)dV(y)$$

amb $k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i $\phi \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Llavors hom té:

a) La funció $k * \phi$ està definida i és una funció contínua a $\mathbb{R}^n$.

b) Si $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, llavors $k * \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ i hom té

$$\frac{\partial(k * \phi)}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y)k(y)dV(y),$$

és a dir, $D_i(k * \phi) = k * D_i\phi$, $i = 1, 2, \dots, n$.

c) Si existeixen les derivades parcials $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ gairebé a tot punt de $\mathbb{R}^n$ i $\frac{\partial k}{\partial x_i} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per a $i = 1, \dots, n$, llavors $k * \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ i hom té

$$\frac{\partial(k * \phi)}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \frac{\partial k}{\partial x_i}(x-y)dV(y),$$

és a dir, $D_i(k * \phi) = (D_i k) * \phi$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Les hipòtesis $k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ per a la conclusió a) es poden substituir per $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ o bé $k \in L^1_c(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Així mateix, per a b) es pot suposar $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\vec{\nabla} \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ i per a c): $\frac{\partial k}{\partial x_i} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

El significat de les parts b), c) és que, essent commutativa la convolució,

$$(k * \phi)(x) = \int \phi(y)k(x-y)dV(y) = \int k(y)\phi(x-y)dV(y) = (\phi * k)(x),$$

hom pot derivar sota el signe integral en qualsevol de les dues integrals sempre que la integral resultant sigui absolutament convergent.

Abans de fer la prova de la proposició 7.36, recordem la regla general de derivació d'integrals dependents d'un paràmetre. Designem per (x, y) un punt

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ i sigui $f(x, y)$ una funció definida a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que és integrable en y per a cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixat. Posem $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dV(y)$ i suposem que existeixen les derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y)$, $i = 1, \dots, n$ gairebé a tot punt (x, y) i, a més, per a cada punt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hi ha un entorn $U(x_0)$ de x_0 a $\mathbb{R}^n$ i una funció integrable H de manera que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \right| \leq H(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad x \in U(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Llavors existeixen les derivades parcials $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ i es compleix $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dV(y)$, $i = 1, \dots, n$. Això és una conseqüència del teorema de la convergència dominada (vegeu [12, pàg. 721]).

Demostració de la proposició 7.36. Totes les conclusions són de caràcter local, i fixat $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tan sols cal analitzar $(k * \phi)(x)$ a la bola $B(x_0, 1)$. Si $k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i $\phi \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ té suport a $B(0, r)$, llavors per a $x \in B(x_0, 1)$ podem substituir k per $k\chi$, on χ és una funció de $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ que valgui 1 en un entorn convenient de x_0 , sense canviar $k * \phi$ a $B(x_0, 1)$. Suposarem, per tant, que $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La convolució és contínua perquè, essent contínua l'operació de traslladar en l'espai $L^1(\mathbb{R}^n)$, hom té

$$\begin{aligned} |(k * \phi)(x + h) - (k * \phi)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(x + h - y) - k(x - y)| |\phi(y)| dV(y) \leq \\ &\leq \|\phi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |k(z + h) - k(z)| dV(z) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

En les hipòtesis de b) és

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x - y) k(y) \right| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, y) \right| |k(y)| \leq C |k(y)|, \quad C \text{ constant},$$

i la igualtat de b) queda justificada per la regla de derivació d'integrals dependents d'un paràmetre, i per a) resulta que $\frac{\partial}{\partial x_i}(k * \phi)$ és una funció contínua per a $i = 1 \dots n$, és a dir $k * \phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

La demostració de c) és similar. Cal veure:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left\{ \frac{k(x_0 + he_i - y) - k(x_0 - y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 - y) \right\} dV(y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

i és suficient comprovar:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{k(x_0 + he_i - y) - k(x_0 - y)}{h} - \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 - y) \right| dV(y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Escrivint $k(x_0 + he_i - y) - k(x_0 - y) = h \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 + the_i - y) dt$ resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 + the_i - y) - \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 - y) \right) dt \right| dV(y) &\leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left| \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 + the_i - y) - \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 - y) \right| dt dV(y) = \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 + the_i - y) - \frac{\partial k}{\partial x_i}(x_0 - y) \right| dV(y) dt. \end{aligned}$$

Finalment, la continuïtat de la translació a $L^1(\mathbb{R}^n)$ aplicada a la funció integrable $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ permet veure que aquesta última expressió és arbitràriament petita, si $h \rightarrow 0$. $\square$

Proposició 7.37. Si $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, llavors el potencial $G(\phi)$ és una funció de classe C^2 a $\mathbb{R}^n$ i compleix $\Delta G(\phi) = \phi$. Si $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, llavors $G(\phi)$ també és de classe C^k a $\mathbb{R}^n$.

Demostració. La funció G és localment integrable, pel lema 7.11. Aplicant dues vegades la part b) de la proposició 7.36 i sumant respecte de $i = 1 \dots n$, resulta

$$\Delta(G * \phi)(x) = G * \Delta\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) \Delta\phi(x - y) dV(y).$$

Per l'apartat a) de la proposició 7.33, aquesta integral val $\phi(x)$. $\square$

Aquest resultat es pot millorar substancialment utilitzant el fet que les derivades parcials de G ,

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{c_n} \frac{x_i}{|x|^n}, \quad c_n = A(\partial B(0, 1)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

són encara localment integrables, perquè

$$\int_{B(0, R)} \frac{|x_i|}{|x|^n} dV(x) \leq \int_{B(0, R)} |x|^{1-n} dV(x) = c \cdot \int_0^R dr = c \cdot R,$$

amb c constant. Així, aplicant les parts b) i c) de la proposició 7.36 hom veu que $G(\phi)$ és de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ si $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, perquè podem aplicar una derivada a cada factor de l'integrand de la integral que defineix $G(\phi)$:

$$\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial G}{\partial x_i}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x - y) dV(y), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

En particular, és

$$\Delta G(\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i}(x-y) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) dV(y).$$

Es pot comprovar que aquesta expressió coincideix amb $\phi(x)$ utilitzant les identitats de Green; veurem, però, més endavant que si $G(\phi)$ és de classe C^2 , automàticament es compleix $\Delta G(\phi) = \phi$.

Si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, el potencial $G(\phi)$ no és necessàriament de classe C^2 , però s'hi acostava molt:

Proposició 7.38. *Si $\phi \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, llavors el potencial $G(\phi)$ és de classe C^1 a $\mathbb{R}^n$ i totes les seves derivades de primer ordre compleixen una condició de Lipschitz del tipus*

$$|\vec{\nabla} G(\phi)(x) - \vec{\nabla} G(\phi)(z)| \leq C_L |x - z| \operatorname{Log} \frac{1}{|x - z|}, \quad (7.26)$$

sobre tot compacte $L \subset \mathbb{R}^n$, amb una constant C_L que depèn de L .

Demostració. Ja hem observat que $\vec{\nabla} G \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$; per tant, per la proposició 7.36 c), hom té, si K és el suport de ϕ :

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{c_n} \int_K \phi(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} dV(y), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ara, si L és un compacte i $x, z \in L$, tenim

$$D_i G(\phi)(x) - D_i G(\phi)(z) = \frac{1}{c_n} \int_K \phi(y) \left\{ \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \frac{z_i - y_i}{|z - y|^n} \right\} dV(y)$$

i és suficient provar la desigualtat

$$\int_K \left| \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \frac{z_i - y_i}{|z - y|^n} \right| dV(y) \leq C(L, K) |x - z| \operatorname{Log} \frac{1}{|x - z|}, \quad x, z \in L,$$

on $C(K, L)$ és una constant que depèn de L i de K .

Segui $\delta = |x - y|$ i trenquem la integral sobre K en les integrals corresponents

a les quatre regions (fig. 7.1) definides per

$$\begin{aligned} I &= \left\{ y : |y - x| < |y - z|, |y - x| < \frac{\delta}{4} \right\}, \\ II &= \left\{ y : |y - x| < |y - z|, |y - x| > \frac{\delta}{4} \right\}, \\ III &= \left\{ y : |y - x| > |y - z|, |y - x| < \frac{\delta}{4} \right\}, \\ IV &= \left\{ y : |y - x| > |y - z|, |y - x| > \frac{\delta}{4} \right\}. \end{aligned}$$

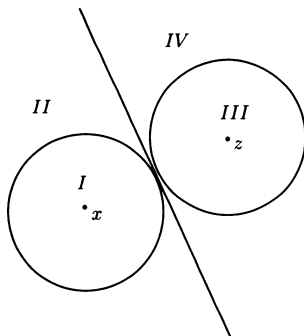


Figura 7.1

A la regió I acotem l'integrand per la suma de mòduls:

$$\int_{|y-x| < \delta/2} (|x - y|^{1-n} + |z - y|^{1-n}) dV(y).$$

La integral del primer sumand és $0(\delta)$, i la del segon està acotada per

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-n} V\left(B(x, \frac{\delta}{2})\right) = 0(\delta).$$

Anàlogament, la contribució de la regió III és de l'ordre de $0(\delta)$. A la regió II tenim l'estimació

$$\left| \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \frac{z_i - y_i}{|z - y|^n} \right| = \frac{|(x_i - y_i)|z - y|^n - (z_i - y_i)|x - y|^n|}{|x - y|^n |z - y|^n}.$$

El numerador d'aquesta expressió coincideix amb $(x_i - z_i)|z - y|^n + (z_i - y_i)(|z - y|^n - |x - y|^n)$. Utilitzant la desigualtat

$$|A^n - B^n| = |(A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})| \leq n|A - B|[\max(A, B)]^{n-1},$$

per a $A, B > 0$, veiem que

$$||z - y|^n - |x - y|^n| \leq n|z - x| \max(|z - y|, |x - y|)^{n-1} = n|z - x| |y - z|^{n-1}.$$

Amb tot això el numerador de l'integrand està dominat per $|x - z| |y - z|^n$ a la regió II, i la contribució de la integral corresponent s'acota per

$$|x - z| \int_{|y-x| \geq \delta/2, y \in K} |x - y|^{-n} dV(y) = 0 \left(\delta \log \frac{1}{\delta} \right).$$

Una estimació semblant val per a la integral sobre la regió IV. $\square$

Exemple 7.39. Suposem que la funció ϕ està donada per $\phi(x) = h(|x|)$, on h és una funció contínua a $(0, +\infty)$ tal que $\int_0^{+\infty} t|h(t)| dt < +\infty$ si $n > 2$ i $\int_0^{+\infty} t|\log t||h(t)| dt < +\infty$ si $n = 2$. D'acord amb l'exemple 7.12, el potencial $G(\phi)$ és una funció radial, $G(\phi)(x) = H(|x|)$. Fem el càlcul de la funció H en el cas $n > 2$: si $|x| = s$, és

$$H(s) = \int_{\mathbb{R}^n} h(|y|)G(x - y) dV(y) = \int_0^{+\infty} h(r) \left(\int_{S(0,r)} G(x - y) dA(y) \right) dr.$$

La integral sobre l'esfera $S(0, r)$ ha estat calculada en l'exemple 7.14; el seu valor és $\frac{r}{2-n}$ si $s < r$ i $\frac{r^{n-1}}{(2-n)s^{n-2}}$ si $s > r$. Amb això queda

$$H(s) = \frac{1}{2-n} \left(s^{2-n} \int_0^s r^{n-1} h(r) dr + \int_s^{+\infty} r h(r) dr \right).$$

La hipòtesi sobre h garanteix que H i, per tant, $G(\phi)$ és contínua. També podem derivar H , dues vegades,

$$H'(s) = s^{1-n} \int_0^s r^{n-1} h(r) dr,$$

$$H''(s) = (1-n)s^{-n} \int_0^s r^{n-1} h(r) dr + h(s).$$

A l'equació (7.13) hi ha el càlcul del laplacià d'una funció radial i resulta

$$\Delta G(\phi)(x) = H''(s) + \frac{n-1}{s} H'(s).$$

Substituint H' i H'' per les expressions trobades s'arriba a la igualtat $\Delta G(\phi)(x) = h(s) = \phi(x)$. $\square$

7.7.2 Solucions febles

La proposició 7.34 es pot millorar perquè, de fet, el potencial de Riesz d'una mesura està definit gairebé a tot punt, respecte de la mesura de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$:

Proposició 7.40. *La integral que defineix el potencial $u(x) = G(\mu)(x)$ d'una mesura μ amb suport compacte a (7.25) és absolutament convergent gairebé per a tot punt $x \in \mathbb{R}^n$ i defineix una funció localment integrable a $\mathbb{R}^n$.*

Demostració. Si L és un compacte de $\mathbb{R}^n$ i $K = \text{spt}(\mu)$, pel teorema de Fubini hom té

$$\begin{aligned} \int_L |u(x)| dV(x) &\leq \int_L \int_K |G(x-y)| d|\mu|(y) dV(x) = \\ &= \int_K \left\{ \int_L |G(x-y)| dV(x) \right\} d|\mu|(y) \leq \\ &\leq \int_K \left\{ \int_{L-K} |G(x-y)| dV(x) \right\} d|\mu|(y). \end{aligned}$$

Aquí hem posat $L-K = \{x-y: x \in L, y \in K\}$. Com que $L-K$ és compacte, està inclòs en una bola $B(0, R)$ i el lema 7.11 implica que la integral sobre $L-K$ està dominada per una constant $C(R)$. Finalment, doncs, és

$$\int_K |u(x)| dV(x) \leq C(R) |\mu|(K) < +\infty$$

i, en particular, $|u(x)| < +\infty$ gairebé per a tot x . □

Com que en general, el potencial $G(\mu)$ d'una mesura o fins i tot el potencial $G(\phi)$ d'una funció no està definit a tots els punts ni, molt menys, és dues vegades derivable, no té sentit aplicar-hi l'operador Δ . Per tractar la qüestió de saber si $G(\phi) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ i compleix la igualtat $\Delta G(\phi) = \phi$ (a part del cas $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ que hem considerat a la proposició 7.37), és molt convenient donar un sentit més general al concepte de solució de l'equació $\Delta u = \phi$, o més generalment $\Delta u = \mu$, on μ és una mesura, que no requereixi exigir d'entrada la diferenciabilitat de u .

Definició 7.41. *Donada una mesura μ de massa localment finita en un domini U de $\mathbb{R}^n$, direm que una funció $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$ és una solució de l'equació $\Delta u = \mu$ a U en el sentit feble, si per a tota funció $\varphi \in C_c^2(U)$ hom té*

$$\int_U u(x) \Delta \varphi(x) dV(x) = \int_U \varphi(x) d\mu(x). \quad (7.27)$$

Observació 7.3. La hipòtesi sobre la mesura μ vol dir que $|\mu|(K) < +\infty$ per a tot compacte $K \subset U$. Observem que els dos membres de (7.27) tenen sentit.

Una mesura μ a U queda determinada per les integrals $\int_U \varphi(x) d\mu(x)$ amb $\varphi \in C_c^2(U)$; per tant, si $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$ i $\Delta u = \mu$, en el sentit feble, la mesura μ és única i està ben determinada per u . Una observació important –i que justifica la definició– és la següent: si $u \in C^2(U)$ i $v = \Delta u \in C(U)$ és el laplacià definit clàssicament, $v = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, llavors també és $\Delta u = v dV$ en el sentit feble, és a dir, hom té

$$\int_U u(x) \Delta \varphi(x) dV(x) = \int_U \varphi(x) v(x) dV(x), \quad \varphi \in C_c^2(U).$$

Això es dedueix de la segona identitat de Green (7.6) aplicada a un domini $\tilde{U}$ amb vora regular orientada i tal que $\text{spt}(\varphi) \subset \tilde{U} \subset U$. En conseqüència, si $u \in C^2(U)$ i $\Delta u = \mu$ en el sentit feble, llavors $\mu = v dV$, perquè tant v com μ són laplacians febles de u . Dit d'una altra manera, aquest és un concepte –el de laplacià feble– que, estenent el concepte de laplacià clàssic sense canviar-lo quan $u \in C^2(U)$, permet parlar de Δu per a funcions $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$ no diferenciables.

Teorema 7.42. Si u és el potencial de Riesz d'una mesura μ de massa total finita a $\mathbb{R}^n$ i amb suport compacte, hom té $\Delta u = \mu$ a $\mathbb{R}^n$ en el sentit feble. En conseqüència, si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ i $G(\phi)$ és de classe C^2 , hom té $\Delta G(\phi) = \phi$ en el sentit clàssic.

Demostració del teorema. Pel teorema de Fubini, si $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, és

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta \varphi(x) dV(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) d\mu(y) \right\} \Delta \varphi(x) dV(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \Delta \varphi(x) dV(x) \right\} d\mu(y). \end{aligned}$$

Ara només cal observar que la integral interior val $\varphi(y)$ per la part a) de la proposició 7.33. $\square$

Exemple 7.43. Com a cas particular del teorema 7.42 prenent $\mu = \delta_0$, la massa de Dirac a l'origen, resulta que la funció $G(x)$ compleix $\Delta G(x) = \delta_0$ en el sentit feble. És per aquest fet que $G(x)$ s'anomena solució fonamental del laplacià, tal com hem dit en la secció 7.3. De la mateixa forma, la funció de Green $G_U(x, y)$ amb pol $x \in U$ compleix $\Delta_y G_U(x, y) = \delta_x$ en el sentit feble, i val zero a la frontera. $\square$

Exemple 7.44. No totes les funcions $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ tenen definit un laplaciana feble que sigui una mesura μ . Considerem, per exemple, $u(x) = |x|^\alpha$ a $\mathbb{R}^n$, amb $\alpha > -n$ per tal que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Com que u és de classe C^∞ a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si hi hagués una mesura μ de manera que $\Delta u = \mu$ a $\mathbb{R}^n$, en el sentit feble, forçosament μ hauria de ser el laplaciana clàssic fora del zero; prenent $\varphi(r) = r^\alpha$ a (7.13) es veu que aquest laplaciana és $\Delta u = \alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2} + \frac{n-1}{|x|}\alpha|x|^{\alpha-1} = |x|^{\alpha-2}[\alpha(\alpha - 1) + n - 1]$. En particular, hauria de ser

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-2}[\alpha(\alpha - 1) + n - 1]\varphi(x) dV(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x)$$

sempre que φ tingui suport compacte a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Això implica que $|x|^{\alpha-2}[\alpha(\alpha - 1) + n - 1]$ ha de ser també localment integrable, fet que és impossible si $-n < \alpha < -n + 3$. Per exemple, si $n > 2$ i $\alpha = 1 - n$, llavors la funció $u = |x|^{1-n}$ és de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, però no hi pot haver cap mesura μ amb suport compacte tal que $\Delta u = \mu$, en el sentit feble. $\square$

Observem que no és una conseqüència directa de la definició 7.41 el fet que si una funció u compleixi $\Delta u = 0$ en el sentit feble, llavors u sigui harmònica. Aquest fet, que és cert, és el contingut del resultat següent.

Teorema 7.45 (Lema de Weyl). Si $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ i $\Delta u = 0$ en el sentit feble, llavors u és harmònica, és a dir, $\Delta u = 0$ en el sentit clàssic a U .

Demostració. Provarem que u és contínua i que compleix la propietat de la mitjana a U . Llavors el teorema 7.7 dona l'harmonicitat de u .

Prenguem una funció $\phi \in C_c^\infty(B(0, 1))$ amb $\int \phi dV = 1$ i posem $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$ i $U_\varepsilon = \{x: d(x, U^c) \geq \varepsilon\}$. Si $\psi \in C_c^\infty(U_\varepsilon)$, llavors és $\psi * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(U)$ i $u * \phi_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. Aleshores, per la segona identitat de Green (7.6) aplicada en un obert amb vora regular comprès entre U_ε i U , hom té, entenent que totes les integrals estan esteses a $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \int \Delta(u * \phi_\varepsilon)\psi dV &= \int (u * \phi_\varepsilon)\Delta\psi dV = \\ &= \iint u(x - y)\phi_\varepsilon(y) dV(y)\Delta\psi(x) dV(x) = \\ &= \iint u(y)\phi_\varepsilon(x - y) dV(y)\Delta\psi(x) dV(x) = \\ &= \int u(y) \int \phi_\varepsilon(x - y)\Delta\psi(x) dV(x) dV(y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int u(y) \int \phi_\varepsilon(z) \Delta \psi(y+z) dV(z) dV(y) = \\
&= \int u(y) \Delta \left(\int \phi_\varepsilon(z) \psi(y+z) dV(z) \right) dV(y).
\end{aligned}$$

La hipòtesi és que $\int u(y) \Delta \chi(y) dV(y) = 0$ si $\chi \in C_c^\infty(U)$. Aquest és el cas quan $\chi(y) = \int \phi_\varepsilon(z) \psi(y+z) dV(z)$. Per tant, $\Delta(u * \phi_\varepsilon) = 0$, és a dir, $u * \phi_\varepsilon$ és harmònica a U_ε . Escrivint la propietat de la mitjana sobre boles per a la funció $u * \phi_\varepsilon$ tenim

$$(u * \phi_\varepsilon)(x) = \frac{n}{r^n c_n} \int_{B(0,r)} (u * \phi_\varepsilon)(x+y) dV(y), \quad (7.28)$$

per a $x \in U$, $r > 0$ prou petit. Atès que $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$, és $u * \phi_\varepsilon \rightarrow u$ a $L_{\text{loc}}^1(U)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i, en particular, a $L^1(B)$ per a tota bola $B \subset U$. La fórmula (7.28) aplicada a $u * \phi_\varepsilon - u * \phi_\delta$ fa veure aleshores que $u * \phi_\varepsilon$ és uniformement convergent sobre compactes. Així, $u * \phi_\varepsilon$ tendeix a u uniformement sobre compactes i, per tant, u és contínua. Fent $\varepsilon \rightarrow 0$ a (7.28) es veu que u té la propietat de la mitjana. $\square$

El lema de Weyl implica, per exemple, que les propietats $\Delta_y G_u(x, y) = \delta_x$ i $G_U(x, y) = 0$ si $y \in \partial U$ caracteritzen la funció de Green d'un domini, en cas d'existir.

Observació 7.4. En tota aquesta secció hem suposat, tàcitament, que $n \geq 2$, però és interessant considerar també el cas $n = 1$. Recordem que en aquest cas $G(x) = \frac{1}{2}|x|(d_1 = \frac{1}{2})$; l'anàleg de la proposició 7.33 a) és

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(y) |x-y| dy \quad \text{si } \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n). \quad (7.29)$$

El teorema 7.42 afirma, ara, que la funció

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y| d\mu(y)$$

té laplaciana feble $\Delta u = \mu$, si μ és una mesura amb suport compacte. Una versió clàssica elemental d'aquest fet és quan $\mu = f dx$ amb f contínua amb suport compacte. Aleshores

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y| f(y) dy$$

compleix $u'' = f$. En efecte, hom té

$$2u(x) = \int_{-\infty}^x + \int_x^{+\infty} = \int_{-\infty}^x (x-y)f(y) dy + \int_x^{+\infty} (y-x)f(y) dy$$

i, derivant dues vegades,

$$2u'(x) = \int_{-\infty}^x f(y) - \int_x^{+\infty} f(y), \quad 2u''(x) = f(x) - (-f(x)) = 2f(x).$$

Ara tornem al cas $n > 1$.

Teorema 7.46. Si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ és localment lipschitziana, és a dir, compleix una condició local de Lipschitz amb exponent positiu:

$$|\phi(y) - \phi(x)| \leq c(x)|y - x|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad c(x) \geq 0, \quad \text{sempre que } |y - x| \leq \delta(x),$$

llavors el potencial $u = G(\phi)$ és de classe C^2 a $\mathbb{R}^n$ i compleix $\Delta u = \phi$.

Demostració. Ja hem vist a la prova de la proposició 7.38 que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ i que valen les igualtats

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} dV(y), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ara no podem tornar a derivar sota el signe integral com abans, perquè

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} = \frac{\delta_{ij}}{|x - y|^n} - n \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^{n+2}}$$

és de l'ordre de $|x - y|^{-n}$ i ja no és localment integrable. Aquest fet quedarà compensat per l'observació que la integral sobre tota esfera centrada a x és zero,

$$\int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} dA(y) = 0 \quad (7.30)$$

(si $i \neq j$ l'integrand és senar respecte l' i -èsim eix, i si $i = j$ els dos termes que resulten en derivar tenen la mateixa integral). En particular, és

$$\int_{R \geq |y-x| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} dV(y) = 0, \quad \text{si } 0 < \varepsilon < R.$$

Fixem x i sigui R tal que el suport de ϕ estigui dins de la bola $B(x, R)$. Agafem una funció $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi(t) = 0$ a $(-1, 1)$ i $\chi(t) = 1$ si $|t| \geq 2$ i considerem

$$v_\varepsilon^i(x) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \chi\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon}\right) dV(y),$$

de manera que $v_\varepsilon^i(x) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$, si $\varepsilon \rightarrow 0$, puntualment (de fet, uniformement sobre compactes). A la funció $v_\varepsilon^i(x)$ hi podem aplicar la proposició 7.36 per a obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{c_n} \int_{B(x,R)} \phi(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) \chi \left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) dV(y) + \\ &+ \frac{1}{c_n} \int_{B(x,R)} \phi(y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \frac{1}{\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^n} \chi' \left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) dV(y). \end{aligned}$$

Utilitzant (7.30) i el fet que χ i χ' són radials, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{c_n} \int_{B(x,R)} (\phi(y) - \phi(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) \chi \left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) dV(y) + \\ &+ \frac{1}{c_n} \int_{B(x,R)} \phi(y) \frac{1}{\varepsilon} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^{n+1}} \chi' \left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) dV(y) = \\ &= A_\varepsilon(x) + C_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

En coordenades polars, $y = x + rw$, tenim

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(x) &= \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{T}} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \phi(x + rw) \frac{1}{\varepsilon} \frac{w_i w_j}{r^{n-1}} r^{n-1} \chi' \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) dr d\sigma(w) = \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{T}} \int_1^2 \phi(x + t\varepsilon w) w_i w_j \chi'(t) dt d\sigma(w). \end{aligned}$$

Si $i \neq j$, és $\int_{\mathbb{T}} w_i w_j d\sigma(w) = 0$ i

$$C_\varepsilon(x) = \frac{1}{c_n} \int_1^2 \int_{\mathbb{T}} (\phi(x + t\varepsilon w) - \phi(x)) w_i w_j \chi'(t) dt d\sigma(w).$$

és de l'ordre de $0(\varepsilon^\alpha)$, uniformement per a x en un compacte. Si $i = j$, és $\int_{\mathbb{T}} w_i^2 d\sigma(w) = c_n/n$ i queda

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(x) &= \frac{1}{c_n} \int_1^2 \int_{\mathbb{T}} (\phi(x + t\varepsilon w) - \phi(x)) w_i^2 j \chi'(t) dt d\sigma(w) + \\ &+ \frac{1}{c_n} \phi(x) \left(\int_1^2 \chi'(t) dt \right) \left(\int_{\mathbb{T}} w_i^2 d\sigma(w) \right) = 0(\varepsilon^\alpha) + \frac{1}{n} \phi(x). \end{aligned}$$

Així, $C_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ si $i \neq j$ i $C_\varepsilon(x) \rightarrow \frac{1}{n} \phi(x)$ si $i = j$, uniformement sobre compactes quan $\varepsilon \rightarrow 0$. D'altra banda, com que $|\phi(y) - \phi(x)| = 0(|y - x|^\alpha)$ i

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) = 0(|x - y|^{-n}),$$

la integral

$$A(x) = \int_{B(x, \varepsilon)} (\phi(y) - \phi(x)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) \right) dV(y)$$

és absolutament convergent perquè té integrand $0(|x - y|^{\alpha-n})$. A més,

$$|A_\varepsilon(x) - A(x)| \leq c \int_{B(x, 2\varepsilon)} |x - y|^{\alpha-n} dV(y) = 0(\varepsilon^\alpha), \quad c \text{ constant.}$$

Resumint, hem demostrat:

$$\frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) \longrightarrow \int_{B(x, R)} (\phi(y) - \phi(x)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) \right) dV(y) + C(x)$$

per a $\varepsilon \rightarrow 0$, on $C(x) = 0$ si $i \neq j$ i $C(x) = \frac{1}{n}\phi(x)$ si $i = j$ i la convergència és uniforme sobre compactes. Això implica que u és de classe C^2 a $\mathbb{R}^n$. El fet que $\Delta u = \phi$ es dedueix aleshores del teorema 7.42; tanmateix, també es veu amb el càlcul anterior, atès que

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial x_i}(x) = \\ &= \int_{B(x, R)} (\phi(y) - \phi(x)) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) \right) dV(y) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \phi(x) = \phi(x), \end{aligned}$$

perquè $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \right) = 0$ si $y \neq x$ (és el laplaciana de $G(x - y)$). □

Resumint els resultats d'aquesta secció, podem enunciar:

Teorema 7.47. *Si μ és una mesura de massa total finita amb suport compacte, el potencial $u = G(\mu)$ és una funció de $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Delta u = \mu$ a $\mathbb{R}^n$ en el sentit feble. Si $n > 2$, és l'única solució de $\Delta u = \mu$ en el sentit feble que és nula a l'infinit; si $n = 2$, és l'única solució de $\Delta u = \mu$ en el sentit feble que compleix $u(x) = c \log|x| + o(1)$, $|x| \rightarrow +\infty$ i, en aquest cas, és $c = \frac{1}{2\pi} \mu(K)$ si μ té suport a K . Si $\mu = \phi dV$ i ϕ és acotada, llavors u és de classe C^1 a $\mathbb{R}^n$ i $\vec{\nabla} u$ compleix localment una condició del tipus*

$$|\vec{\nabla} u(x) - \vec{\nabla} u(z)| = 0 \left(|z - x| \log \frac{1}{|z - x|} \right).$$

Si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ és localment lipschitziana, aleshores $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ i $\Delta u = \phi$ en el sentit clàssic.

7.8 L'equació de Poisson i els problemes de Dirichlet i de Neumann no homogenis en un domini de $\mathbb{R}^n$

L'equació de Poisson $\Delta u = \phi$ també es pot plantejar en un domini acotat $U \subset \mathbb{R}^n$. Donada, per exemple, una funció $\phi \in C(U)$, voldríem resoldre l'equació $\Delta u = \phi$ amb una funció $u \in C^2(U)$. Una solució possible passa senzillament per considerar la mesura $\mu = \phi dV$ i el potencial corresponent

$$G(\phi)(x) = \int_U G(x-y)\phi(y)dV(y),$$

només en els punts $x \in U$, per a la qual cosa convindrà suposar $\phi \in L^1(U)$. Segons els resultats de l'apartat 7.7.2, hom tindrà $G(\phi) \in L^1(U)$ i $\Delta G(\phi) = \phi$ en el sentit feble a U . Observem que ara no podem escriure $G(\phi)(x) = \int_U G(y)\phi(x-y)dV(y)$.

Per tal de poder aplicar els resultats que hem obtingut en la secció 7.7 suposarem que ϕ és una funció acotada a U . En aquest cas, la proposició 7.38 i el teorema 7.46 donen directament:

Teorema 7.48. *Si ϕ és una funció acotada en un domini acotat U de $\mathbb{R}^n$, llavors el potencial $G(\phi)$ és una funció de classe C^1 a U i $\nabla G(\phi)$ compleix una condició de Lipschitz del tipus (7.26). Si ϕ és localment lipschitziana, llavors $G(\phi) \in C^2(U)$ i $\Delta G(\phi) = \phi$ en U en el sentit clàssic.*

D'altra banda, es pot provar que si $\phi \in C(U)$, llavors sempre hi ha una funció $u \in C^1(U)$ que compleix $\Delta u = \phi$ en el sentit feble i a més $u \in C^2(U)$, si ϕ compleix localment una condició de Lipschitz. Per al cas $n = 2$, això serà demostrat en el capítol 10.

A diferència del cas $U = \mathbb{R}^n$, en el cas d'un domini qualsevol, el potencial de Riesz $G(\phi)$ no és una solució distingida de l'equació $\Delta u = \phi$ a U . La solució general s'obté afegint a $G(\phi)$ una funció harmònica a U i per a determinar una solució particular és necessari imposar alguna *condició de contorn*. Per exemple, així com a $\mathbb{R}^n$, $G(\phi)$ és l'única solució nul·la a l'infinit, fóra natural considerar entre totes les solucions de $\Delta u = \phi$ a U aquella que és nul·la a la frontera, si existeix. Més generalment, en el *problema de Dirichlet no homogeni* o problema de Dirichlet general, es parteix de dues dades al domini acotat $U \subset \mathbb{R}^n$: una funció $\varphi \in C(\partial U)$ i una funció $\phi \in L^\infty(U)$. El problema consisteix a trobar una funció $u \in C(\overline{U})$ que compleixi

$$\begin{cases} \Delta u = \phi & \text{a } U \\ u|_{\partial U} = \varphi & \text{a } \partial U, \end{cases} \quad (D)$$

on la igualtat $\Delta u = \phi$ s'entén en el sentit feble.

La solució a aquest problema, si existeix, és única perquè si u_1, u_2 en són solucions, llavors $u = u_1 - u_2$ és harmònica, pel lema de Weyl, i val 0 a ∂U , amb la qual cosa $u = 0$ a U i $u_1 = u_2$.

El problema (D) es desdobra en dos problemes corresponents a $\varphi = 0$ i a $\phi = 0$, respectivament:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{a } U \\ u = \varphi & \text{a } \partial U \end{cases} \quad (D_1) \qquad \begin{cases} \Delta u = \phi & \text{a } U \\ u = 0 & \text{a } \partial U \end{cases} \quad (D_2),$$

on les igualtats del laplacà són en el sentit feble.

El primer problema o problema de Dirichlet homogeni ja l'hem considerat en la secció 7.4. El problema (D_2) es redueix al problema (D_1) de la manera següent: considerem el potencial

$$v(x) = G(\phi)(x) = \int_U G(x-y)\phi(y) dV(y).$$

Pel teorema 7.47 es compleix $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ i $\Delta u = \phi$ en el sentit feble a U . Sigui $\varphi \in C(\partial U)$ la restricció de v a ∂U i sigui u_0 la solució de $\Delta u_0 = 0$ a U , $u_0 = \varphi$ a ∂U . Llavors $u = v - u_0$ compleix $\Delta u = \Delta v - \Delta u_0 = \phi$ a U i $u|_{\partial U} = 0$ a ∂U . Amb això hem provat el resultat següent:

Proposició 7.49. *Si el problema de Dirichlet homogeni (D_1) té solució per a tota funció $\varphi \in C(\partial U)$, llavors el problema de Dirichlet general (D) té solució per a tot parell de funcions $\varphi \in C(\partial U)$, $\phi \in L^\infty(U)$.*

Si el domini U admet primera funció de Green, llavors la solució de (D_2) existeix i és explícita:

Teorema 7.50. *Si el domini acotat U admet funció de Green, $G_U(x, y)$, la solució del problema (D_2) per a $\phi \in L^\infty(U)$ és*

$$u(x) = \int_U G_U(x, y)\phi(y)dV(y), \quad x \in U.$$

Si ϕ és localment lipschitziana, aleshores $u \in C^2(U)$ i $\Delta u = \phi$ en el sentit clàssic.

Demostració. Recordem que $G_U(x, y) = G(x - y) - v_x(y)$ on $v_x \in C(\overline{U})$ compleix $v_x(y) = G(x - y)$, $y \in \partial U$ i v_x és harmònica a U . Amb això, u té

l'estructura indicada abans,

$$u(x) = \int_U G(x-y)\phi(y) dV(y) - \int_U v_x(y)\phi(y) dV(y) = G(\phi)(x) - u_0(x),$$

i només cal comprovar que u_0 és la solució del problema (D_1) amb dada $\varphi = G(\phi)$ a ∂U . Demostrem en primer lloc que $u_0 \in C(\overline{U})$. Per la proposició 7.24 és

$$G(x-y) - v_x(y) = G_U(x-y) \leq 0;$$

per tant, hom té $|v_x(y)| \leq |G(x-y)|$ si $n > 2$ i $|v_x(y)| \leq |G(x,y)| + K(U)$ si $n = 2$, on $K(U)$ és una constant que només depèn del domini U . D'altra banda, per la proposició 7.23 tenim $v_x(y) = v_y(x)$, que és contínua a $\overline{U}$ en una de les variables fixada l'altra. Això permet provar que $u_0 \in C(\overline{U})$. En efecte, tenim

$$u_0(x) - u_0(z) = \int_U (v_x(y) - v_z(y))\phi(y) dV(y).$$

Triem $\delta > 0$, $x, z \in \overline{U}$ amb $|z-x| < \frac{\delta}{2}$ i trenquem la integral en dues parts I, II corresponents, respectivament, a les regions d'integració $U \cap B(x, \delta)$ i $U \setminus B(x, \delta)$. Quan $z \rightarrow x$, la part II tendeix a zero pel teorema de la convergència dominada; utilitzant l'estimació de v_x que acabem de veure, la part I està majorada per

$$\int_{U \cap B_\delta(x)} (|G(y-z)| + |G(y-x)|) dV(y),$$

que també tendeix a zero quan $\delta \rightarrow 0$. Com que $v_x(y) = v_y(x)$ és harmònica en x , la propietat de la mitjana i el teorema de Fubini impliquen que u_0 és harmònica a U . Finalment, quan $x \in \partial U$, $v_x(y) = G(x-y)$ i, per tant, $u_0 = G(\phi)$ a ∂U .

Si ϕ és localment lipschitziana a U , ϕ és automàticament contínua i el teorema 7.47 permet afirmar que $G(\phi)$ és de classe C^2 a U . Llavors u també ho és (u_0 és harmònica i, per tant, $u_0 \in C^\infty(U)$) i $\Delta u = \Delta G(\phi) = \phi$ en el sentit clàssic. $\square$

La funció u del teorema 7.50 s'anomena *potencial de Green de la funció ϕ a U* .

Com a conseqüència del teorema 7.50, resulta que si U té frontera regular (orientada pel camp $\vec{N}$) i el nucli de Poisson associat a G_U , $P_U(x, y) = \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G_U(x, y)$, resol el problema (D_1) a U , llavors la solució del problema de Dirichlet general (D) està donada per

$$u(x) = \int_{\partial U} \varphi(y) P_U(x, y) dA(y) + \int_U G_U(x, y) \phi(y) dV(y).$$

Exemple 7.51. En el cas particular que U sigui el disc unitat, $\mathbb{D}$, el teorema 7.26 i el teorema 7.50 donen la funció

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(w) \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} d\sigma(w) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \text{Log} \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| \phi(w) dm(w) \quad (7.31)$$

com a solució del problema (D).

Un cop sabem resoldre el problema de Dirichlet al disc $\mathbb{D}$, el sabem resoldre en qualsevol altre disc $D(a, R)$. Senzillament passem d'un disc a l'altre mitjançant les transformacions $z \mapsto \zeta = a + Rz$, $\zeta \mapsto z = \frac{\zeta - a}{R}$. Si u és de classe C^2 a $\overline{D}(a, R)$, llavors la funció $v(z) = u(a + Rz)$ és de classe C^2 a $\mathbb{D}$ i tenim la fórmula

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v(w) \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} d\sigma(w) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| \Delta v(w) dm(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u(a + Rw) \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} d\sigma(w) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| R^2 \Delta u(a + Rw) dm(w). \end{aligned}$$

Quan $|w| = 1$, $\xi = a + Rw$ recorre $\{\xi: |\xi - a| = R\}$ i és $ds(\xi) = R d\sigma(w)$; quan $|w| < 1$, $\xi = a + Rw$ recorre $\{\xi: |\xi - a| \leq R\}$ i és $dm(\xi) = R^2 dm(w)$. Fent el canvi de variable $\xi = a + Rw$ en les integrals anteriors obtenim

$$\begin{aligned} u(a + Rz) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{C(a, R)} u(\xi) \frac{1 - |z|^2}{\left| z - \frac{\xi - a}{R} \right|^2} ds(\xi) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{D(a, R)} \text{Log} \left| \frac{z - \frac{\xi - a}{R}}{1 - \frac{\bar{\xi} - \bar{a}}{R} z} \right| \Delta u(\xi) dm(\xi), \end{aligned}$$

que, reescrit en termes de $\zeta = a + Rz$, queda en la forma

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{C(a, R)} u(\xi) \frac{R^2 - |\zeta - a|^2}{|\xi - \zeta|^2} ds(\xi) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{D(a, R)} \text{Log} \left| \frac{(\xi - \zeta)R}{R^2 - (\bar{\xi} - \bar{a})(\zeta - a)} \right| \Delta u(\xi) dm(\xi). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Així, la funció de Green de $D(a, R)$ és

$$G_{D(a, R)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{\xi - \zeta}{R^2 - (\bar{\xi} - \bar{a})(\zeta - a)} \right|.$$

Observem que no és res més que la composició de la funció de Green de $\mathbb{D}$ amb la transformació $\zeta \rightarrow \frac{\zeta - a}{R}$. En particular, és $G_{D(a, R)} \leq 0$. Si fem $\zeta = a$, trobem

$$u(a) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C(a, R)} u(\xi) ds(\xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{D(a, R)} \log \left| \frac{\xi - a}{R} \right| \Delta u(\xi) dm(\xi).$$

Així mateix el nucli de Poisson del disc $D = D(a, R)$ és

$$P_D(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |\zeta - a|^2}{|\xi - \zeta|^2}, \quad |\xi - a| = R, \quad |\zeta - a| < R. \quad \square$$

El potencial u del teorema 7.50 té sentit per a funcions que no siguin necessàriament acotades a U ; fins i tot podem considerar-lo substituint ϕdV per una mesura μ de massa localment finita, tal com hem fet amb els potencials de Riesz, i definir

$$u(x) = \int_U G_U(x, y) d\mu(y)$$

sempre que la integral sigui convergent. Per exemple, en el cas del disc unitat $\mathbb{D}$, on tenim ben explícita la funció $G_{\mathbb{D}}$, es pot fer aquesta anàlisi detalladament.

Proposició 7.52. *Sigui μ una mesura de massa localment finita a $\mathbb{D}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2) d|\mu|(w) < +\infty.$$

Llavors el potencial

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \operatorname{Log} \left| \frac{z - w}{1 - w\bar{z}} \right| d\mu(w)$$

defineix una funció $u \in L^1(\mathbb{D})$ que compleix $\Delta u = \mu$ a $\mathbb{D}$ en el sentit feble.

Demostració. Hom té

$$\int_{\mathbb{D}} |u(z)| dm(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} d|\mu|(w) \int_{\mathbb{D}} \left| \operatorname{Log} \left| \frac{z - w}{1 - w\bar{z}} \right| \right| dm(z).$$

Si apliquem la fórmula (7.31) a la funció $u(z) = |z|^2$ per a la qual $\phi = \Delta u = 4$, trobem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \operatorname{Log} \left| \frac{z - w}{1 - w\bar{z}} \right| dm(z) = \frac{1}{4} (|w|^2 - 1),$$

de manera que

$$\int_{\mathbb{D}} |u(z)| dm(z) \leq \frac{1}{4} \int (1 - |w|^2) d|\mu|(w),$$

quantitat que és finita per hipòtesi. Per veure que $\Delta u = \mu$ en el sentit feble, repetim la prova del teorema 7.42. Per a $\varphi \in C_c^2(D)$ hom té

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} u(z) \Delta \varphi(z) dm(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} d\mu(w) \int_{\mathbb{D}} \operatorname{Log} \left| \frac{z-w}{1-w\bar{z}} \right| \Delta \varphi(z) dm(z) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(w) d\mu(w), \end{aligned}$$

perquè la fórmula 7.31, tenint en compte que $\varphi(z) = 0$ si $|z| = 1$, dóna

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \operatorname{Log} \left| \frac{z-w}{1-w\bar{z}} \right| \Delta \varphi(z) dw(z). \quad \square$$

Exemple 7.53. Suposem que ϕ és radial al disc $\mathbb{D}$ amb $\phi(w) = h(|w|)$, on h compleix

$$\int_0^1 (1-r)|h(r)| dr < +\infty.$$

Llavors el potencial de Green de la funció ϕ a $\mathbb{D}$ és:

$$u(z) = \int_0^1 h(r)r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{z-re^{it}}{1-re^{it}\bar{z}} \right| dt \right) dr.$$

La integral interior tan sols depèn de $|z| = s$; com que la funció $\operatorname{Log} |1-rs\eta|$ és harmònica respecte de η per a $|\eta| \leq 1$ i val 0 a l'origen, per la propietat de la mitjana, la integral de $\operatorname{Log} |1-rse^{it}|$ val zero. Així, la integral interior és

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |s-re^{it}| dt.$$

Si $s > r$ es tracta novament del valor mitjà d'una funció harmònica i coincideix amb el valor a l'origen, que és $\operatorname{Log} s$. Com que $|s-re^{it}| = |r-se^{it}|$, tenim que si $s < r$ el valor de la integral és $\operatorname{Log} r$. Amb això,

$$u(z) = \operatorname{Log} s \int_0^s rh(r) dr + \int_s^1 rh(r) \log r dr.$$

En aquest cas, podem comprovar directament que si h és contínua, la funció u és de classe C^2 i té laplaciana igual a ϕ . $\square$

Consideracions anàlogues es poden fer per al problema de Neumann general o *problema de Neumann no homogeni*. En un domini acotat U amb vora regular orientada per la normal exterior $\vec{N}$, les dades són ara $\varphi \in C(\partial U)$ i $\phi \in L^\infty(U)$. El problema consisteix a trobar una funció $u \in C^1(U)$ de manera que

$$\Delta u = \phi \quad \text{a } U \text{ en el sentit dèbil i } \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \varphi \quad \text{a } \partial U. \quad (\text{N})$$

Les dades φ, ϕ han de complir la condició de compatibilitat

$$\int_{\partial U} \varphi \, dA = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \, dA = \int_U \Delta u \, dV = \int_U \phi \, dV.$$

Igual que en el cas homogeni, aquest problema, si té solució, només en té una llevat de constants, perquè si u_1, u_2 són solucions, $u = u_1 - u_2$ és harmònica a U i $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$ a ∂U . Aleshores (7.8) implica

$$\int_U |\vec{\nabla} u|^2 \, dV = 0,$$

que diu que u és constant a U .

També podem descompondre el problema de Neumann en els dos problemes corresponents

$$\Delta u = 0 \quad \text{a } U, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \varphi \quad \text{a } \partial U \quad (N_1)$$

$$\Delta u = \phi \quad \text{a } U, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0 \quad \text{a } \partial U. \quad (N_2)$$

La manera com es tracta l'equació $\Delta u = \phi$ és semblant a com ho hem fet en el problema de Dirichlet. Primerament es busquen solucions en el sentit dèbil, i després s'analitza com les propietats de ϕ influeixen en la regularitat de u . Anàlogament a la proposició 7.49, hom té el resultat següent:

Proposició 7.54. *Si el problema (N_1) té solució per a tota funció $\varphi \in C(\partial U)$ complint $\int_{\partial U} \varphi \, dA = 0$, llavors el problema (N_2) té solució per a tota funció $\phi \in L^\infty(U)$ tal que $\int_U \phi \, dV = 0$. Si ϕ és localment lipschitziana, aleshores hi ha solució del problema (N_2) en el sentit clàssic.*

Demostració. Considerem el potencial de Riesz

$$G(\phi)(x) = \int_U G(x-y)\phi(y) \, dV(y).$$

Pel teorema 7.47, $G(\phi)$ és de classe C^1 a $\mathbb{R}^n$, és harmònica fora de $\bar{U}$ i compleix $\Delta G(\phi) = \phi$ a U , en el sentit feble. Com que $\int_U \phi \, dV = 0$, hom té

$$G(\phi)(x) = \int_U (G(x-y) - G(x))\phi(y) \, dV(y),$$

$$\vec{\nabla} G(\phi)(x) = \int_U (\vec{\nabla}_x G(x-y) - \vec{\nabla} G(x))\phi(y) \, dV(y).$$

Ara bé, un càlcul mostra que $|\vec{\nabla}_x G(x-y) - \vec{\nabla} G(x)| \leq c|x-y|^{-n}$, c constant, uniformement en $y \in U$ per a $|x|$ gran i, per tant, $|\vec{\nabla} G(\phi)(x)| = O(|x|^{-n})$ per a $|x| \rightarrow +\infty$. Apliquem ara (7.7) a la funció $G(\phi)$ i al domini $B(0, R) \setminus \bar{U}$ per a R gran. Resulta

$$\int_{S(0,R)} \frac{\partial G(\phi)}{\partial \vec{N}} \, dA - \int_{\partial U} \frac{\partial G(\phi)}{\partial \vec{N}} \, dA = \int_{B(0,R) \setminus \bar{U}} \Delta G(\phi) \, dV = 0.$$

Com que $\left| \int_{S(0,R)} \frac{\partial G(\phi)}{\partial \vec{N}} \, dA \right| \leq c \frac{R^{n-1}}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, c constant, veiem que $\varphi = \frac{\partial G(\phi)}{\partial \vec{N}}$ compleix $\int_{\partial U} \varphi \, dA = 0$. Si ara u_1 és una solució de (N_1) amb dada φ , tindrem que $u = G(\phi) - u_1$ és solució de (N_2) amb dada ϕ .

Si ϕ és localment lipschitziana, llavors $G(\phi)$ és de classe C^2 i $\Delta G(\phi) = \phi$ en el sentit clàssic. Per tant, també val $\Delta u = \phi$ en el sentit clàssic, ja que u_1 és harmònica. $\square$

Quan U admet segona funció de Green, H_U , de manera que la funció

$$u(x) = \int_{\partial U} H_U(x, y) \varphi(y) \, dA(y) + c, \quad c \text{ constant}$$

sigui la solució de (N_1) , d'acord amb (7.18), llavors tindrem que la funció

$$u(x) = - \int_U H_U(x, y) \phi(y) \, dV(y)$$

serà la solució de $\Delta u = \phi$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$ a ∂U si $\int \phi \, dV = 0$.

En conseqüència, la solució al problema general de Neumann (N) estarà donada per la funció

$$u(x) = \int_{\partial U} H_U(x, y) \varphi(y) \, dA(y) - \int_U H_U(x, y) \phi(y) \, dV(y) + c, \quad c \text{ constant.}$$

En el cas del disc unitat, la fórmula anterior amb $H_{\mathbb{D}}(z, w) = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(|z-w| |1-\bar{w}z|)$ (apartat 7.6.3) dóna, efectivament, la solució del problema general de Neumann.

7.9 La solució del problema de Dirichlet i del problema de Neumann a la bola

En el cas $n > 2$, també és possible explotar la simetria de la bola unitat $\mathbb{B} = B(0, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ per a calcular la funció de Green i el nucli de Poisson. En aquest cas, per a $x \in \mathbb{B}$ cal trobar una funció harmònica v_x tal que

$$v_x(y) = G(x - y) = d_n |x - y|^{2-n} \text{ per a } |y| = 1.$$

Si $x = 0$, òbviament és $v_x = d_n$; per a $x \neq 0$, sigui x' el punt que correspon a x per la inversió respecte de $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}$, és a dir, $x' = \frac{x}{|x|^2}$. Llavors, si $|y| = 1$, hom té

$$\begin{aligned} |x' - y|^2 &= \left| \frac{x}{|x|^2} - y \right|^2 = \frac{|x|^2}{|x|^4} + |y|^2 - \frac{2xy}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2} + 1 - \frac{2xy}{|x|^2} \\ &= \frac{1 + |x|^2 - 2xy}{|x|^2} = \frac{|x - y|^2}{|x|^2}. \end{aligned}$$

Per tant, $|x - y| = |x||x' - y|$ si $|y| = 1$ i prenem $v_x(y) = d_n |x|^{2-n} |x' - y|^{2-n}$ que és harmònica a $\mathbb{R}^n \setminus \{x'\}$. Així, la funció de Green de la bola $\mathbb{B}$ és

$$G_{\mathbb{B}}(x, y) = d_n (|x - y|^{2-n} - |x|^{2-n} |x' - y|^{2-n}).$$

Finalment, calculem el nucli de Poisson de $\mathbb{B}$. Observem que si $r = |y|$, és $\frac{\partial}{\partial N_y} = \frac{\partial}{\partial r} = \sum y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Resulta, doncs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} |x - y|^{2-n} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(|x|^2 + r^2 - \sum_i 2x_i y_i \right)^{1-\frac{n}{2}} = \\ &= \left(1 - \frac{n}{2} \right) (2r - 2x \cdot y) |x - y|^{-n} = \\ &= (2 - n)(r - x \cdot y) |x - y|^{-n} = (2 - n)(1 - x \cdot y) |x - y|^{-n}. \end{aligned}$$

De la mateixa manera

$$\frac{\partial}{\partial r} |x' - y|^{2-n} = (2 - n)(1 - x' \cdot y) |x' - y|^{-n},$$

amb la qual cosa obtenim

$$P_{\mathbb{B}}(x, y) = d_n (2 - n) |x - y|^{-n} \{1 - x \cdot y - (1 - x' \cdot y) |x|^2\} = \frac{1}{c_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n},$$

on, recordem-ho, c_n és l'àrea de l'esfera unitat de $\mathbb{R}^n$. Observem que aquest nucli té la mateixa estructura que en el cas del disc unitat. D'una manera totalment anàloga al teorema 7.26, es prova el resultat següent.

Teorema 7.55. *Si $\varphi \in C(\mathbb{S})$, la solució del problema de Dirichlet $u = \varphi$ a $\mathbb{S}$ i $\Delta u = 0$ a $\mathbb{B}$ és la funció*

$$u(x) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} \varphi(y) dA(y).$$

Exemple 7.56. Calculem la solució u_i corresponent a la restricció de la funció $\varphi_i(x) = x_i^2$ a $\mathbb{S}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Com que $x_i^2 - x_j^2$ és harmònica, hom té $u_i - u_j = x_i^2 - x_j^2$, és a dir, $u_i - x_i^2$ és independent de i . La suma de les funcions u_i és la solució del problema de Dirichlet corresponent a $\sum_i x_i^2$, que val 1 a $\mathbb{S}$; per tant, $\sum_i u_i(x) = 1$ per a $x \in \mathbb{B}$, i, en conseqüència, $\sum_i (u_i - x_i^2) = 1 - |x|^2$. Així, resulta $u_i(x) = x_i^2 + \frac{1}{n}(1 - |x|^2)$. $\square$

Com a aplicació de la solució del problema de Dirichlet per a les boles podem provar el principi de simetria. Direm que un domini U de $\mathbb{R}^n$ és simètric respecte de $\mathbb{R}^{n-1}$ si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ implica $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n) \in U$, i posarem $U^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U : x_n > 0\}$ per a indicar la part superior de U .

Proposició 7.57 (Principi de simetria per a funcions harmòniques).

Sigui U un domini $\mathbb{R}^n$ simètric respecte de $\mathbb{R}^{n-1}$ i u una funció harmònica a U^+ , contínua a $\overline{U}^+$ tal que $u = 0$ a $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Llavors l'extensió senar, v , de u a U definida per

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_n > 0 \\ -u(x_1, x_2, \dots, -x_n) & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

és harmònica a U .

Demostració. La funció v és clarament contínua a U i harmònica a $U \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. Fixem un punt $a \in U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ i sigui $B(a, r) \subset U$ una bola de centre a inclosa a U . Considerem la funció harmònica h a $B(a, r)$ que té per valor frontera la funció v (sobre $\partial B(a, r)$). Com que la dada v compleix $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = -v(x_1, x_2, \dots, -x_n)$ a $\partial B(a, r)$, la funció h compleix la mateixa propietat a $B(a, r)$ (això és conseqüència de la fórmula de Poisson o de la unicitat de la solució del problema de Dirichlet a la bola). L'antisimetria de h implica que $h = 0$ a $B(a, r) \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Llavors h i v són funcions harmòniques a $B^+(a, r)$ i a

$B^-(a, r)$ (la part superior i la part inferior de $B(a, r)$), contínues a $\overline{B}^+(a, r)$ i $\overline{B}^-(a, r)$ i coincideixen a les fronteres d'aquestes semiboles. Per la unicitat de solució del problema de Dirichlet resulta $h = v$ a $B(a, r)$, i v és harmònica en aquesta bola. El punt $a \in U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ és qualsevol i v és harmònica a U . $\square$

Pel que fa al problema de Dirichlet no homogeni $\Delta u = \phi$ a $\mathbb{B}$, $u|_{\mathbb{S}} = \varphi$ amb $\phi \in L^\infty(\mathbb{B})$ i $\varphi \in C(\mathbb{S})$, la solució serà, d'acord amb (7.17),

$$u(x) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} \varphi(y) dA(y) + \frac{1}{c_n(n-2)} \int_{\mathbb{B}} (|x - y|^{2-n} - |x|^{2-n} |x' - y|^{2-n}) \phi(y) dV(y).$$

En el cas de la bola de radi R , reescalant, obtenim com a solució del problema de Dirichlet homogeni la funció

$$u(x) = \frac{1}{c_n R} \int_{S(0, R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \varphi(y) dA(y) \quad (7.33)$$

El resultat següent és la versió de les desigualtats de Cauchy per a funcions harmòniques:

Proposició 7.58. *Si u és harmònica en una bola $B(0, R)$ i compleix $|u(x)| \leq M$ per a $|x| \leq R$, llavors hom té, per a tot multiíndex α ,*

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(0) \right| \leq C_\alpha \frac{M}{R^{|\alpha|}}$$

amb una constant C_α que només depèn del multiíndex α .

Demostració. Podem suposar que u és harmònica a $\overline{B}(0, R)$, de manera que tenim 7.33 amb $\varphi(y) = u(y)$. Si derivem sota el signe integral i avaluem en $x = 0$, trobem el resultat. $\square$

Com a aplicació estudiarem les singularitats aïllades de les funcions harmòniques.

Proposició 7.59. *Suposem que u és harmònica a $B(0, R) \setminus \{0\}$ i que*

$$|u(y)| = o(G(y)) \quad y \rightarrow 0,$$

on G és la solució fonamental del laplacià. Llavors u és harmònica a $B(0, R)$, és a dir, l'origen és una singularitat evitable de la funció u .

Demostració. Fem primer la prova si $n > 2$. Com que $|u(y)| = o(|y|^{2-n})$, si apliquem la proposició 7.58 a la bola $B(y, \frac{|y|}{2})$, obtindrem

$$|\vec{\nabla} u(y)| = o(|y|^{1-n}).$$

Fixat $x \neq 0$ i per a $|x| < R$, apliquem el corol·lari 7.16 a $U = B(0, R) \setminus \bar{B}(0, \varepsilon)$.

Tindrem,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{S(0, R)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) \right) dA(y) - \\ &\quad - \int_{S(0, \varepsilon)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y) - G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) \right) = v_1(x) - v_2(x). \end{aligned}$$

Ara bé,

$$|v_2(x)| \leq C(x) \varepsilon^{n-1} \left(\sup_{|y|=\varepsilon} |u(y)| + \sup_{|y|=\varepsilon} |\vec{\nabla} u(y)| \right) \rightarrow 0, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Per tant, $v_2(x) \equiv 0$ i $u(x) = v_1(x)$ és harmònica a $B(0, R)$.

En el cas $n = 2$, tenim $|u(y)| = o(|\log |y||)$ i $|\vec{\nabla} u(y)| = o\left(\frac{|\log |y||}{|y|}\right)$. Amb això el terme $\int_{C(0, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x-y) dA(y)$ ja tendeix a zero. Per a l'altre terme $\int_{C(0, \varepsilon)} G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y)$, només obtindríem $o(\log \varepsilon)$ i cal treballar una mica més. Escrivim

$$\begin{aligned} \int_{C(0, \varepsilon)} G(x-y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) &= G(x) \int_{C(0, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) + \\ &\quad + \int_{C(0, \varepsilon)} [G(x-y) - G(x)] \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y). \end{aligned}$$

Com que $|G(x-y) - G(x)| = o(\varepsilon)$, la darrera integral tendeix a zero amb ε . Ara veurem que $\int_{C(0, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y) = 0$ (tal com correspon a *posteriori* si u ha de ser harmònica a $B(0, R)$), és a dir, provarem que $\int_{C(0, \varepsilon)} u(y) dA(y)$ és constant respecte de ε . En efecte, considerem la funció

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(xe^{i\theta}) d\theta,$$

que també és harmònica a $B(0, R) \setminus \{0\}$, és radial i compleix $v(x) = o(\log |x|)$. Com que tota funció harmònica radial és del tipus $a \log |x| + b$ i $v(x) = o(\log |x|)$, la constant a ha de ser 0, v és constant i $\int_{C(0, \varepsilon)} u(y) dA(y)$ també ho és. $\square$

El càlcul de la segona funció de Green $H_{\mathbb{B}}(x, y)$ de la bola unitat de $\mathbb{R}^n$ és més complicat. En veurem una expressió no completament explícita, suficient per establir-ne l'existència i les propietats. En lloc de buscar, per a cada $x \in \mathbb{B}$, la funció $v = v_x$ harmònica tal que $\frac{\partial v}{\partial \vec{N}_y} = \frac{\partial}{\partial \vec{N}_y} G(x - y)$ per a $|y| = 1$, buscarem directament $H_{\mathbb{B}}(x, y) = v_x(y) - G(x - y)$. Recordem que $H_{\mathbb{B}}(x, y)$ ha de complir la igualtat següent, sempre que u sigui harmònica a $\overline{\mathbb{B}}$,

$$u(x) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} u(y) dA(y) + \int_{\mathbb{S}} H_{\mathbb{B}}(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y).$$

Utilitzem un fet que és específic de la bola i de la derivada respecte de la normal a la seva frontera: si u és harmònica, també ho és la funció $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, perquè

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + x_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} = 2\Delta u + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Ara bé, en coordenades esfèriques, $x = rw$, $w \in \mathbb{S}$, és $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = r \frac{\partial u}{\partial r}(rw)$, i, si apliquem la fórmula de representació de Poisson a aquesta funció harmònica, resulta

$$r \frac{\partial u}{\partial r}(rw) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} P_{\mathbb{B}}(rw, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y).$$

Ara voldríem dividir per r i integrar radialment per obtenir $u(rw)$, però $\frac{1}{r}$ no és integrable al voltant de l'origen; per evitar aquesta dificultat utilitzem el fet que $\int_{\mathbb{S}} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} dA(y) = 0$. Així, hom té

$$r \frac{\partial u}{\partial r}(rw) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} (P_{\mathbb{B}}(rw, y) - 1) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y)$$

i

$$u(rw) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{S}} \left\{ \int_0^r \frac{1}{s} (P_{\mathbb{B}}(sw, y) - 1) ds \right\} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(y) dA(y).$$

Posem $H_{\mathbb{B}}(x, y)$ per al nucli

$$H_{\mathbb{B}}(x, y) = \int_0^r \frac{1}{s} \{P_{\mathbb{B}}(sw, y) - 1\} ds = \int_0^1 \{P_{\mathbb{B}}(tx, y) - 1\} \frac{dt}{t}, \quad x \in \mathbb{B}, y \in \mathbb{S}.$$

El nucli de Poisson $P_{\mathbb{B}}(x, y)$ és harmònic en x ; per tant, també ho és $P_{\mathbb{B}}(tx, y)$ per a tot t i $H_{\mathbb{B}}(x, y)$ és, també, harmònic en x . Per construcció es compleix

$$\frac{\partial H_{\mathbb{B}}}{\partial r}(rw, y) = \frac{1}{r}(P_{\mathbb{B}}(x, y) - 1).$$

Amb això ja podem provar que el problema de Neumann a la bola

$$\Delta u = 0 \text{ a } \mathbb{B}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \varphi \text{ a } \mathbb{S}, \quad \text{amb } \int_{\mathbb{S}} \varphi dA = 0$$

té solució (única llevat de constants). Senzillament definim

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}} H_{\mathbb{B}}(x, y) \varphi(y) dA(y).$$

Com que $H_{\mathbb{B}}(x, y)$ és harmònica en x , la funció u és harmònica. També és

$$r \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \int_{\mathbb{S}} (P_{\mathbb{B}}(x, y) - 1) \varphi(y) dA(y) = \int_{\mathbb{S}} P_{\mathbb{B}}(x, y) \varphi(y) dA(y).$$

El terme de la dreta, la solució del problema de Dirichlet amb dada φ , té valor a la frontera φ , i en conseqüència tenim $\frac{\partial u}{\partial r} = \varphi$ a $\mathbb{S}$.

Finalment, segons la proposició 7.54 el problema

$$\Delta u = \phi \text{ a } \mathbb{B}, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0 \text{ a } \mathbb{S}$$

també té solució en el sentit clàssic si ϕ és localment lipschitziana.

7.10 Descomposició de camps

Recordem que en un domini arbitrari U de $\mathbb{R}^3$ un camp continu és conservatiu si i només si és un gradient i és solenoïdal si i només si és un rotacional. Amb hipòtesis de diferenciabilitat, els camps $\vec{X}$ localment conservatius (respectivament, localment solenoïdals) es caracteritzen per la condició $\text{rot } \vec{X} = 0$ (respectivament, $\text{div } \vec{X} = 0$). Aprofitant que ara tenim el llenguatge de les solucions en el sentit feble de l'equació de Poisson $\Delta u = \phi$, farem consideracions semblants per a les equacions $\text{div } \vec{X} = h$, $\text{rot } \vec{X} = \vec{Y}$ amb $h, \vec{Y}$ donats.

Un camp continu $\vec{X}$ en un domini U de $\mathbb{R}^3$ queda determinat pels productes escalars,

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_U \stackrel{\text{def}}{=} \int_U \langle \vec{X}(x), \vec{Y}(x) \rangle dV(x) = \int_U \left\{ \sum_{i=1}^3 X_i(x) Y_i(x) \right\} dV(x),$$

de $\vec{X}$ amb tots els camps $\vec{Y}$ de classe C^∞ amb suport compacte a U . Si $\vec{X}$ és de classe C^1 a U , llavors, quan $\vec{Y} = \vec{\nabla}\phi$ amb $\phi \in C_c^\infty(U)$, hom té

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, \vec{\nabla}\phi \rangle_U &= \int_U \left\{ \sum_{i=1}^3 \vec{X}_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \right\} dV(x) = \\ &= - \int_U \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial x_i}(x) \right) \phi(x) dV(x) = -\langle \operatorname{div} \vec{X}, \phi \rangle_U.\end{aligned}$$

Per aquest motiu posem aquesta definició:

Definició 7.60. Si $\vec{X}$ és un camp continu a U i $h \in L^1_{\text{loc}}(U)$, direm que val la igualtat $\operatorname{div} \vec{X} = h$ en el sentit feble a U si es compleix

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, \vec{\nabla}\phi \rangle_U &= \int_U \left\{ \sum_{i=1}^n \vec{X}_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \right\} dV(x) = \\ &= - \int_U h(x) \phi(x) dV(x), \quad \text{per a tota funció } \phi \in C_c^\infty(U).\end{aligned}$$

Anàlogament, si $\vec{X}$ és de classe C^1 a U i $\vec{X} = \operatorname{rot} \vec{Z}$, $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ amb $Z_i \in C_c^\infty(U)$, llavors és

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, \operatorname{rot} \vec{Z} \rangle_U &= \int_U \left[\vec{X}_1 \left(\frac{\partial Z_3}{\partial y} - \frac{\partial Z_2}{\partial z} \right) + \vec{X}_2 \left(\frac{\partial Z_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_3}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{X}_3 \left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} - \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) \right] dV(x) = \\ &= - \int_U \left[\left(Z_3 \frac{\partial \vec{X}_1}{\partial y} - Z_2 \frac{\partial \vec{X}_1}{\partial z} \right) + \left(Z_1 \frac{\partial \vec{X}_2}{\partial z} - Z_3 \frac{\partial \vec{X}_2}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(Z_2 \frac{\partial \vec{X}_3}{\partial x} - Z_1 \frac{\partial \vec{X}_3}{\partial y} \right) \right] dV(x) = \\ &= - \int_U \left[Z_1 \left(\frac{\partial \vec{X}_2}{\partial z} - \frac{\partial \vec{X}_3}{\partial y} \right) + Z_2 \left(\frac{\partial \vec{X}_3}{\partial x} - \frac{\partial \vec{X}_1}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + Z_3 \left(\frac{\partial \vec{X}_1}{\partial y} - \frac{\partial \vec{X}_2}{\partial x} \right) \right] dV(x) = -\langle \operatorname{rot} \vec{X}, \vec{Z} \rangle_U.\end{aligned}$$

Definició 7.61. Si $\vec{X}$ és un camp continu a U i $\vec{Y}$ és un camp localment integrable a U , direm que val la igualtat $\text{rot } \vec{X} = \vec{Y}$ en el sentit feble a U si es compleix

$$\langle \vec{X}, \text{rot } \vec{Z} \rangle_U = -\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_U,$$

per a tot camp $\vec{Z}$ tal que $Z_i \in C_c^\infty(U)$, $i = 1, 2, 3$.

Proposició 7.62. En un domini U qualsevol de $\mathbb{R}^3$, un camp continu $\vec{X}$ és localment conservatiu si i només si $\text{rot } \vec{X} = 0$ en el sentit feble, és a dir,

$$\langle \vec{X}, \text{rot } \vec{Z} \rangle_U = 0, \quad \text{per a } \vec{Z} \text{ amb } Z_i \in C_c^\infty(U), \quad i = 1, 2, 3.$$

Un camp continu $\vec{X}$ és localment solenoïdal a U si i només si $\text{div } \vec{X} = 0$ en el sentit feble, és a dir,

$$\langle \vec{X}, \vec{\nabla} \phi \rangle_U = 0, \quad \text{per a } \phi \in C_c^\infty(U).$$

Si U és simplement connex (respectivament, sense cavitats), podem substituir localment conservatiu per conservatiu (respectivament, localment solenoïdal per solenoïdal).

Per a les nocions de domini simplement connex i de domini sense cavitats vegeu l'apartat 3.7.1.

Demostració. És del tot similar a la proposició 6.20 (observació 6.5). Si $\vec{X}$ és de classe C^1 , el resultat és conseqüència de les consideracions anteriors. En general, aproximariem $\vec{X}$ per camps de classe C^∞ , uniformement sobre compactes, que continuen complint les mateixes hipòtesis. $\square$

Així doncs, si considerem, per simplificar, que U és un domini de $\mathbb{R}^3$ simplement connex i sense cavitats i suposem, a més a més, que ∂U és regular, tenim aquestes dues classes de camps continus a U :

A) $\vec{X}$ conservatiu $\Leftrightarrow \vec{X} = \vec{\nabla} \psi \Leftrightarrow \text{rot } \vec{X} = 0$, en el sentit feble.

B) $\vec{X}$ solenoïdal $\Leftrightarrow \vec{X} = \text{rot } \vec{Y} \Leftrightarrow \text{div } \vec{X} = 0$, en el sentit feble.

Teorema 7.63. Si un camp continu $\vec{X}$ és simultàniament conservatiu i solenoïdal en un domini U , llavors hi ha una funció harmònica ψ a U tal que $\vec{X} = \vec{\nabla} \psi$. En particular, $\vec{X}$ és automàticament de classe C^∞ . Si U té frontera regular orientada pel camp normal exterior $\vec{N}$ i es compleix $\langle \vec{X}, \vec{N} \rangle = 0$ a ∂U , llavors és $\vec{X} \equiv 0$ a U .

Demostració. Essent $\vec{X}$ conservatiu, és $\vec{X} = \vec{\nabla}\psi$, amb $\psi \in C^1(U)$. D'altra banda, $\operatorname{div} \nabla(\vec{\nabla}\psi) = 0$ en el sentit feble, és a dir,

$$\int_U \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV(x) = 0$$

per a $\phi \in C_c^\infty(U)$. Això equival a

$$\int_U \psi(x) \Delta \phi(x) dV(x) = 0, \quad \text{per a } \phi \in C_c^\infty(U),$$

que diu que $\Delta \psi = 0$ en el sentit feble. Pel lema de Weyl (teorema 7.45) ψ és harmònica. Com que $\langle \vec{X}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{\nabla}\psi, \vec{N} \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{N}}$, si la component normal de $\vec{X}$ és zero, llavors ψ és constant i $\vec{X} = \vec{\nabla}\psi = 0$. $\square$

Suposem que volem descompondre un camp $\vec{X}$, suficientment regular a $\overline{U}$, com a suma d'un camp del tipus A) més un camp del tipus B):

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2.$$

Aleshores, aplicant-hi l'operador divergència, tindriem

$$\operatorname{div} \vec{X}_1 = \operatorname{div} \vec{X} \stackrel{\text{def}}{=} h$$

en el sentit feble. Si posem abans $\vec{X}_1 = \vec{\nabla}\psi$, llavors seria

$$\Delta \psi = h$$

en el sentit feble. Per determinar ψ és suficient donar una condició de tipus Neumann sobre ∂U . Podem imposar, per exemple,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{N}} = \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle$$

de manera que $\langle \vec{X}_1, \vec{N} \rangle = \langle \vec{\nabla}\psi, \vec{N} \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{N}} = \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle$. Així, hem vist que en qualsevol possible descomposició $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$ amb $\vec{X}_1$ conservatiu i $\vec{X}_2$ solenoïdal, $\vec{X}_1$ està completament determinat si posem $\langle \vec{X}_1, \vec{N} \rangle = \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle$. Llavors el camp $\vec{X}_2 = \vec{X} - \vec{X}_1$ compleix $\operatorname{div} \vec{X}_2 = 0$, de manera que és solenoïdal, i a més $\langle \vec{X}_2, \vec{N} \rangle = 0$. D'altra banda, aquesta descomposició resulta ser ortogonal perquè

$$\langle \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle_U = \int_U \langle \vec{X}_1(x), \vec{X}_2(x) \rangle dV = \int_U \langle \vec{\nabla}\psi(x), \vec{X}_2 \rangle dV.$$

Però $\langle \vec{\nabla} \psi, \vec{X}_2 \rangle = \operatorname{div}(\psi \vec{X}_2) - \psi(\operatorname{div} \vec{X}_2) = \operatorname{div}(\psi \vec{X}_2)$ i

$$\langle \vec{X}_1, \vec{X}_2 \rangle_U = \int_U \operatorname{div}(\psi \vec{X}_2) dV = \int_{\partial U} \psi \langle \vec{X}_2, \vec{N} \rangle dA = 0.$$

Per construcció, aquesta descomposició és única perquè si $\vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{X}'_1 + \vec{X}'_2$ són dues descomposicions d'aquests tipus, llavors $\vec{X}_1 - \vec{X}'_1 = \vec{X}'_2 - \vec{X}_2$ és un camp simultàniament conservatiu i solenoïdal amb component normal zero i, per tant, és idènticament nul pel teorema 7.63. Les condicions sobre $\vec{X}$ per tal que $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ siguin camps de classe $C^1(\bar{U})$ són delicades, però és suficient la condició $\vec{X} \in C^{1+\alpha}(\bar{U})$; llavors la funció $h = \operatorname{div} \vec{X}$ és localment lipschitziana a U i segons la proposició 7.54 el problema $\Delta \psi = h$ a U , $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{N}} = \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle$ a ∂U , té una solució $\psi \in C^2(\bar{U})$ i resulta $\vec{X}_1 = \vec{\nabla} \psi \in C^1(\bar{U})$. Amb tot plegat, hem vist el teorema següent.

Teorema 7.64 (Helmholtz). *Si U és un domini acotat amb frontera regular orientada pel camp normal exterior $\vec{N}$, en el qual es pot resoldre el problema de Neumann i U és simplement connex i sense cavitats, llavors tot camp $\vec{X}$ suficientment regular a $\bar{U}$ (per exemple $\vec{X} \in C^{1+\alpha}(\bar{U})$, $\alpha > 0$) té una descomposició única*

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2,$$

amb $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ de classe C^1 a $\bar{U}$, on $\vec{X}_1$ és conservatiu i compleix $\langle \vec{X}_1, \vec{N} \rangle = \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle$ i $\vec{X}_2$ és solenoïdal i compleix $\langle \vec{X}_2, \vec{N} \rangle = 0$. A més, aquesta descomposició és ortogonal respecte del producte escalar de camps a U .

També és possible fer altres descomposicions: si triem ψ amb $\Delta \psi = h$ ($= \operatorname{div} \vec{X}$), complint la condició $\psi = 0$ a ∂U , llavors la descomposició també és ortogonal i $\vec{X}_1$ només té component normal a ∂U .

Hom es pot plantejar la descomposició anterior a tot l'espai $\mathbb{R}^3$, resolent l'equació $\Delta \psi = h = \operatorname{div} \vec{X}$ mitjançant el potencial newtonià

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} h(y) G(x - y) dV(y).$$

Teorema 7.65. *Suposem que $\vec{X}$ és un camp de classe C^1 a $\mathbb{R}^3$ amb $|\operatorname{div} \vec{X}(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ quan $|x| \rightarrow +\infty$ per a algun $\varepsilon > 0$. Llavors $\vec{X}$ té una descomposició única $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$, on $\vec{X}_1$ és conservatiu, $\vec{X}_2$ és solenoïdal i ambdós camps són continus i nuls a l'infinit.*

Demostració. Si $\vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{X}'_1 + \vec{X}'_2$, llavors el camp $\vec{X}_1 - \vec{X}'_1 = \vec{X}'_2 - \vec{X}_2$ és simultàniament conservatiu i solenoïdal i, per tant, és de la forma $\vec{\nabla} u$ amb u

harmònica i $\vec{\nabla}u(x)$ nul a l'infinit. Atès que la funció $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ és harmònica i nul·la a l'infinit, pel teorema de Liouville (teorema 7.8) ha de ser idènticament nul·la. Així, hem vist que la descomposició és única. Per a veure'n l'existència, definim $\vec{X}_1 = \vec{\nabla}\psi$, on ψ és la solució de $\Delta\psi = \operatorname{div} \vec{X}$ donada pel potencial newtonià, és a dir,

$$\vec{X}_1 = \vec{\nabla} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{X}(y) G(x-y) dV(y) = \frac{1}{c_3} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{X}(y) \frac{x-y}{|x-y|^3} dV(y).$$

Observem que la hipòtesi $|\operatorname{div} \vec{X}(y)| = O(|y|^{-1-\epsilon})$ garanteix la convergència de les integrals. Tan sols falta demostrar que el camp $\vec{X}_1$ és nul a l'infinit (és clar que $\vec{X}_2 = \vec{X} - \vec{X}_1$ és solenoïdal, perquè $\operatorname{div} \vec{X}_2 = 0$ i també és nul a l'infinit).

És suficient que vegem

$$\int_{\mathbb{R}^3} |y|^{-1-\epsilon} |x-y|^{-2} dV(y) = O(|x|^{-\epsilon})$$

i, per simetria, n'hi ha prou de considerar la contribució del semiespai $\{y: |y| \leq |y-x|\}$. La contribució de $\{y: |y| \leq \frac{|x|}{2}\}$ (on $|x-y|$ és com $|x|$) s'estima per

$$|x|^{-2} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |y|^{-1-\epsilon} dV(y) = |x|^{-2} O(|x|^{2-\epsilon}) = O(|x|^{-\epsilon})$$

i la contribució de $\{y: \frac{|x|}{2} \leq |y| \leq |y-x|\}$ (on $|y-x|$ és com $|y|$) està majorada per

$$\int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |y|^{-3-\epsilon} dV(y) = O(|x|^{-\epsilon}). \quad \square$$

Encara podem fer un pas més i explicitar el camp $\vec{X}_2$. Essent $\vec{X}_2$ solenoïdal, té un potencial vector, és a dir, $\vec{X}_2 = \operatorname{rot} \vec{Y}$. El camp $\vec{Y}$ no està determinat unívocament, perquè $\operatorname{rot}(\vec{X} + \vec{\nabla}f) = \operatorname{rot} \vec{Y}$ per a qualsevol camp conservatiu $\vec{\nabla}f$, amb f una funció. Una forma de normalitzar $\vec{Y}$ és demanar que $\vec{Y}$ sigui solenoïdal i nul a l'infinit: en efecte, si $\operatorname{rot} \vec{Y}_1 = \operatorname{rot} \vec{Y}_2$ i $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2$ són tots dos solenoïdals i nuls a l'infinit, llavors serà $\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2 = \vec{\nabla}u$ amb u harmònica i $\vec{\nabla}u$ nul a l'infinit, d'on es conclou $\vec{Y}_1 = \vec{Y}_2$.

Busquem, doncs, un camp solenoïdal $\vec{Y}$ tal que $\vec{X}_2 = \operatorname{rot} \vec{Y}$. Tenim

$$\operatorname{rot} \vec{X} = \operatorname{rot} \vec{X}_1 + \operatorname{rot} \vec{X}_2 = \operatorname{rot} \vec{X}_2 = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{Y}).$$

Ara bé,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{Y}) = \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{Y}) - \Delta \vec{Y},$$

on $\Delta \vec{Y}$ s'interpreta vectorialment. Si $\vec{Y}$ ha de ser solenoïdal, tindrem $\operatorname{div} \vec{Y} = 0$ i concloem que

$$\Delta \vec{Y} = -\operatorname{rot} \vec{X}.$$

Si $|\operatorname{rot} \vec{X}| = O(|y|^{-2-\varepsilon})$, l'única solució nul·la a l'infinit torna a ser

$$\vec{Y}(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} \vec{X}(y) G(x-y) dV(y),$$

per un càlcul anàleg al de la prova del teorema 7.65. D'altra banda, si també és $|\operatorname{div} \vec{X}(y)| = O(|y|^{-2-\varepsilon})$, la funció potencial ψ definida anteriorment per

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{X}(y) G(x-y) dV(y)$$

també serà nul·la a l'infinit. Tot això prova el resultat següent:

Teorema 7.66. *Si $\vec{X}$ és un camp de classe C^1 a $\mathbb{R}^3$ amb $|\operatorname{div} \vec{X}(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ i $|\operatorname{rot} \vec{X}(x)| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ quan $|x| \rightarrow \infty$, per a algun $\varepsilon > 0$, llavors la descomposició*

$$\vec{X} = \vec{\nabla} \psi + \operatorname{rot} \vec{Y}$$

amb

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{X}(y) G(x-y) dV(y)$$

$$\vec{Y}(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} \vec{X}(y) G(x-y) dV(y)$$

és l'única descomposició de $\vec{X}$ en suma d'un gradient, $\vec{\nabla} \psi$, i un rotacional, $\operatorname{rot} \vec{Y}$, amb $\psi, \vec{Y}$ nuls a l'infinit.

Acabem aquest apartat trobant una expressió del camp $\vec{X}_1 = \vec{\nabla} \psi$ en termes només de $\vec{X}$ que és útil en la mecànica de fluids. Aplicant el teorema de la

divergència a la component $\frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \vec{X}$ i al domini $B(x, R) \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$, resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_n} \int_{S(x, R)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA(y) - \frac{1}{c_n} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA(y) = \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{\varepsilon < |y - x| < R} \operatorname{div} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \vec{X} \right) dV(y) = \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{\varepsilon < |y - x| < R} (\operatorname{div} \vec{X}) \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} dV(y) + \\ &+ \frac{1}{c_n} \int_{\varepsilon < |y - x| < R} \left\langle \vec{\nabla}_y \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \right), \vec{X} \right\rangle dV(y). \end{aligned}$$

Si $\vec{X}$ és nul a l'infinit, hom té

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} \int_{S(x, R)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA(y) = 0.$$

D'altra banda,

$$\frac{1}{c_n} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \langle \vec{X}, \vec{N} \rangle dA(y) = \frac{1}{c_n} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \sum_j X_j(y) \frac{y_j - x_j}{|y - x|} dA(y).$$

El límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ d'aquesta última integral no canvia si substituïm $X_j(y)$ per $X_j(x)$; llavors els termes amb $j \neq i$ valen zero i el terme amb $j = i$ val $\frac{1}{n}$. Resumint, el seu límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ és $\frac{1}{n} X_i(x)$. Amb això queda

$$\vec{X}_1(x) = \frac{1}{n} \vec{X}(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{c_n} \int_{\varepsilon < |x - y|} \left\langle \vec{\nabla}_y \left(\frac{x - y}{|x - y|^3} \right), \vec{X} \right\rangle dV(y),$$

on $\vec{\nabla} \left(\frac{x - y}{|x - y|^3} \right)$ s'ha d'interpretar com la matriu

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{x_i - y_i}{|x - y|^3} \right) \right)_{i,j=1,2,3}.$$

7.11 Problema de Dirichlet i transformacions conformes

Per a resoldre el problema de Dirichlet o el problema de Neumann en dominis més generals que el disc o la bola, és natural analitzar com es comporten aquests

problemes quan es transforma un domini en un altre. Preguntem-nos, en primer lloc, com són les transformacions Ψ que preserven les funcions harmòniques, és a dir, que donen una funció $u = v \circ \Psi$ que és harmònica sempre que v també ho sigui. Fem aquesta anàlisi en dimensió n , arbitrària.

Cal remarcar que no demanem pas que es compleixi la igualtat $\Delta(v \circ \Psi) = (\Delta v) \circ \Psi$. En l'apartat 7.2.1 hem vist que $L = P(\Delta)$, on P és un polinomi, és l'expressió general dels operadors que compleixen $L(v \circ \Psi) = Lv \circ \Psi$ per a tot desplaçament Ψ . En particular, és $\Delta(v \circ \Psi) = \Delta v \circ \Psi$ per a tot desplaçament Ψ . Però Ψ pot preservar les funcions harmòniques sota condicions més generals. Per exemple, hi pot haver un factor E tal que

$$\Delta(v \circ \Psi) = [\Delta v \circ \Psi] \cdot E.$$

Signi, doncs, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ un difeomorfisme de classe C^2 entre dos oberts U, V de $\mathbb{R}^n$, $v \in C^2(V)$ i calculem $\Delta(v \circ \Psi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(v \circ \Psi) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\Psi(x)) \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i}(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(v \circ \Psi) &= \sum_{k, \ell=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell \partial y_k}(\Psi(x)) \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\Psi(x)) \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x_i^2}(x) \\ \Delta(v \circ \Psi)(x) &= \sum_{i, k, \ell=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell \partial y_k}(\Psi(x)) \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i}(x) + \sum_k \frac{\partial v}{\partial y_k}(\Psi(x)) \Delta \Psi_k(x). \quad (7.34) \end{aligned}$$

Imposem ara que aquesta expressió sigui zero sempre que $\Delta v = 0$. Prenent $v \equiv y_k$, veiem que ha de ser $\Delta \Psi_k = 0$, és a dir, que cada component Ψ_k de Ψ ha de ser harmònica. Prenent $v = y_\ell^2 - y_k^2$ obtenim

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi_\ell}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} \right)^2,$$

i prenent $v = y_k y_\ell$ amb $k \neq \ell$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_\ell}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i} = 0, \quad k \neq \ell.$$

Això significa que $J_\Psi(x) = \Psi'(x) \in \mathbb{R}O(n)$, és a dir, és un múltiple escalar d'una matriu ortogonal, que vol dir que l'aplicació lineal $\Psi'(x)$ conserva la magnitud dels angles i, per tant, és una semblança lineal, per a cada $x \in U$. Dit d'una altra manera, Ψ és conforme o anticonforme a cada punt de U .

Teorema 7.67. *Un difeomorfisme Ψ de classe C^2 entre dos oberts de $\mathbb{R}^n$ preserva les funcions harmòniques si i només si és conforme o anticonforme a cada punt i les components de Ψ són funcions harmòniques.*

Demostració. Acabem de veure que Ψ necessàriament és d'aquest tipus. En l'altre sentit, fixem-nos que en termes de la matriu hessiana H de v en el punt $\Psi(x)$ i de $\Psi'(x)$ la fórmula (7.34) és

$$\Delta(v \circ \Psi) = \text{traça}[\Psi'(x)^t H \Psi'(x)].$$

Essent $\Psi'(x)$ conforme, $\Psi'(x)^t$ és un múltiple de $\Psi'(x)^{-1}$ i llavors $\Delta(v \circ \Psi)$ és un múltiple de $\text{traça}[\Psi'(x)^{-1} H \Psi'(x)] = \text{traça}[H] = 0$. $\square$

En dimensió $n \geq 3$, el teorema de Liouville (teorema 2.29) afirma que si Ψ és conforme o anticonforme a cada punt, llavors Ψ és la restricció a U d'una semblança a $\mathbb{R}^n$ (composició de desplaçaments, dilatacions i inversions). En canvi, en dimensió $n = 2$ el teorema 7.67 afirma que totes les transformacions $w = \Psi(z)$ que són holomorfes o antiholomorfes preserven la classe de les funcions harmòniques.

En el cas $n = 2$, quan $w = \Psi(z)$ és holomorfa, la repetició del càlcul de $\Delta(v \circ \Psi)$ en termes dels operadors $\partial, \bar{\partial}$ és

$$\begin{aligned} \partial(v \circ \Psi) &= \frac{\partial v}{\partial w} \Psi'(z) + \frac{\partial v}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial w} (\Psi'(z)) \Psi'(z) \\ \bar{\partial} \partial(v \circ \Psi)(z) &= \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial \bar{w}} (\Psi(z)) |\Psi'(z)|^2 \\ \Delta(v \circ \Psi)(z) &= \Delta v(\Psi(z)) |\Psi'(z)|^2. \end{aligned}$$

El que acabem de dir s'expressa, amb més precisió, en el resultat següent.

Teorema 7.68 (Invariància del problema de Dirichlet per transformacions holomorfes). *Siguin U i V dos dominis acotats de $\mathbb{C}$ de manera que existeixi una funció bijectiva i holomorfa de U a V que s'estengui a un homeomorfisme de $\bar{U}$ sobre $\bar{V}$. Suposem que se sap resoldre el problema de Dirichlet no homogeni a U . Llavors, si $\varphi \in C(\partial V)$ i $\phi \in L^\infty(V)$, el problema de Dirichlet $\Delta v = \phi$ a V , $v = \varphi$ a ∂V té solució única (en el sentit feble). Si ϕ és localment lipschitziana, llavors la solució v és de classe C^2 a V i compleix $\Delta v = \phi$ en el sentit clàssic.*

Demostració. Sigui $\Psi: U \rightarrow V$ bijectiva i holomorfa que s'estén a un homeomorfisme de $\bar{U}$ sobre $\bar{V}$. Recordem que $\Psi'(z) \neq 0$, per a tot $z \in U$ i

$\Psi^{-1}: V \rightarrow U$ és holomorfa amb $(\Psi^{-1})'(\Psi(z)) = \Psi'(z)^{-1}$. Considerem el problema de Dirichlet a U amb dades $\varphi_0(z) = \varphi(\Psi(z))$, $\phi_0(z) = \phi(\Psi(z))|\Psi'(z)|^2$. Hom té

$$\int_U |\Psi'(z)|^2 dm(z) = \int_{\Psi(U)} dm(w) = m(V) < +\infty$$

i, per tant, ϕ_0 és integrable i localment acotada a U . Sigui u la solució del problema $\Delta u_0 = \phi_0$ a U , $u_0 = \varphi_0$ a $\partial(U)$. Llavors $v = u \circ \Psi^{-1}$ és contínua a $\bar{V}$ i compleix $v|_{\partial V} = \varphi$ i $\Delta v = \phi$ a V . $\square$

A més a més, tenim una fórmula per a la solució a V si la tenim a U . En el cas particular $U = \mathbb{D}$ i $\Psi: \mathbb{D} \rightarrow V$ bijectiva i holomorfa, tenim per (7.31) i fent servir la notació de la demostració anterior:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} \varphi_0(\zeta) d\sigma(\zeta) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \operatorname{Log} \left| \frac{z - \zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \right| \phi_0(\zeta) dm(\zeta) = u^I(z) + u^{II}(z). \end{aligned}$$

El segon terme $u^{II}(z)$ és la solució de $\Delta u = \phi_0$ a $\mathbb{D}$, $u = 0$ a $\mathbb{T}$. Fent el canvi de variable $\Psi(\zeta) = \eta$, la mesura $\phi_0(\zeta) dm(\zeta) = \phi(\Psi(\zeta))|\Psi'(\zeta)|^2 dm(\zeta)$ es transforma en $\phi(\eta) dm(\eta)$ i queda la funció

$$v^{II}(w) = u^{II}(\Psi(w)) = \frac{1}{2\pi} \int_V \operatorname{Log} \frac{|\Psi(w) - \Psi(\eta)|}{|1 - \overline{\Psi(w)}\Psi(\eta)|} \phi(\eta) dm(\eta)$$

com a solució del problema $\Delta v = \phi$ a V , $v = 0$ a ∂V . La funció

$$G_V(w, \eta) = \operatorname{Log} \frac{|\Psi(w) - \Psi(\eta)|}{|1 - \overline{\Psi(w)}\Psi(\eta)|}$$

fa el paper de la funció de Green de V . Quan ∂V és regular i Ψ és derivable al llarg de $\mathbb{T}$ amb $\Psi'(z) \neq 0$ també podem transformar la integral que defineix $u^I(z)$ amb el canvi $\eta = \Psi(\zeta)$. Llavors la mesura $\varphi_0(\zeta) d\sigma(\zeta)$ es transforma en $|(\Psi)'(\eta)|\varphi(\eta) ds(\eta)$ i la funció

$$v^I(w) = u^I(\Psi(w)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{1 - |\Psi(w)|^2}{|\Psi(w) - \Psi(\eta)|^2} |(\Psi)'(\eta)|\varphi(\eta) ds(\eta)$$

és la solució del problema $\Delta v = 0$ a V , $v = \varphi$ a ∂V . La funció

$$P(w, \eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\Psi(w)|^2}{|\Psi(w) - \Psi(\eta)|^2} |(\Psi)'(\eta)|$$

és el nucli de Poisson de V .

La mateixa idea es pot fer servir per al problema de Neumann. Suposem que U i V són dos dominis acotats de $\mathbb{C}$ amb vora regular orientada positivament i que Ψ és una transformació bijectiva i holomorfa d'un entorn de $\bar{U}$ en un entorn de $\bar{V}$ de manera que és un homeomorfisme de $\bar{U}$ sobre $\bar{V}$. En tots els exemples es podrà comprovar que es compleix aquesta hipòtesi.

Observem, en primer lloc, que Ψ compleix $J_\Psi(z) = |\Psi'(z)|^2 > 0$ i, per tant, conserva l'orientació. Així, Ψ transforma ∂U en ∂V , i quan z recorre ∂U en sentit positiu, el punt $\Psi(z) = w$ recorre ∂V en sentit positiu. Com que Ψ' conserva els angles en els punts $z \in \partial U$ i Ψ transforma ∂U en ∂V , resulta que si $\vec{N}_1(z)$ designa el vector normal unitari exterior a ∂U en el punt $z \in \partial U$, el vector $(d\Psi)(z)(\vec{N}_1(z)) = \Psi'(z)\vec{N}_1(z)$ és un vector normal exterior en el punt $w = \Psi(z)$ a ∂V . Així, si designem per $\vec{N}_2(w)$ el vector normal unitari exterior en el punt $w \in \partial V$, hom té

$$\vec{N}_2(w) = \frac{\Psi'(z)}{|\Psi'(z)|} \vec{N}_1(z).$$

Suposem ara que v és una solució del problema $\Delta v = \phi$ a V , $\frac{\partial v}{\partial \vec{N}_2} = \varphi$ a ∂V . Aleshores la funció $u = v \circ \Psi$ compleix $\Delta u(z) = \phi(\Psi(z))|\Psi'(z)|^2$ a U i

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{N}_1}(z) = \frac{\partial v}{\partial \vec{N}_2}(w)|\Psi'(z)| = \varphi(w)|\Psi'(z)|.$$

Amb això veiem que si volem resoldre el problema $\Delta v = \phi$ a V , $\frac{\partial v}{\partial \vec{N}_2} = \varphi$ a ∂V i sabem resoldre el problema

$$\Delta u(z) = \phi(\Psi(z))|\Psi'(z)|^2 \text{ a } U, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{N}_1}(z) = \varphi(\Psi(z))|\Psi'(z)| \text{ a } \partial U,$$

llavors $v(w) = u(\Psi(w))$ és la solució que busquem.

7.12 El principi de Dirichlet

Històricament, Dirichlet va plantejar la solució del problema que porta el seu nom, posem $\Delta u = 0$ en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$, $u = \varphi$ a ∂U , amb $\varphi \in C(\partial U)$ com un problema de càlcul de variacions. Ho feia basant-se en l'observació que l'equació de Laplace és l'equació d'Euler associada al funcional I que actua sobre una funció u , d'acord amb

$$I(u) = \int_U |\vec{\nabla} u|^2 dV. \quad (7.35)$$

Aquest funcional s'anomena *integral de Dirichlet*.

Donada la funció $\varphi \in C(\partial U)$, considerem la classe de funcions

$$\Sigma = \{u \in C^2(\overline{U}) : u = \varphi \text{ a } \partial U\}$$

i el funcional $I : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ definit per (7.35). Suposem que $u_0 \in \Sigma$ és un mínim absolut de I a Σ . Llavors, si fixem $\psi \in C_c^2(U)$, la funció $u_0 + \varepsilon\psi$ és de Σ per a tot $\varepsilon > 0$ i es compleix $I(u_0 + \varepsilon\psi) \geq I(u_0)$. La funció $\varepsilon \mapsto I(u_0 + \varepsilon\psi)$ té un mínim per a $\varepsilon = 0$, per la qual cosa té derivada zero en $\varepsilon = 0$, sempre que aquesta derivada existeixi. Calculem-la:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I(u_0 + \varepsilon\psi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_U |\vec{\nabla} u_0 + \varepsilon \vec{\nabla} \psi|^2 dV(x) = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_U \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 dV(x) = \\ &= 2 \int_U \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV(x). \end{aligned}$$

Fent $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta

$$\int_U (\vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} \psi) dV(x) = 0.$$

Per la primera identitat de Green, com que ψ té suport compacte a U , se'n dedueix

$$\int_U \Delta u_0(x) \cdot \psi(x) dV(x) = 0.$$

Com que aquesta igualtat és certa per a qualsevol $\psi \in C_c^2(U)$, hom té $\Delta u_0 \equiv 0$. Per tant, si u_0 és un mínim absolut de I a Σ , llavors u_0 és la solució del problema de Dirichlet. Aquest és l'enunciat del *principi de Dirichlet*. Com que I pren valors positius, pot semblar clar que aquest mínim absolut sempre existeix. Això portà (erròniament) a Dirichlet a donar el raonament anterior com una prova de l'existència de solució per al problema. Intentem, però, prosseguir l'argument, perquè veurem que es plantegen més qüestions relatives a la completitud dels espais de funcions, que en el temps de Dirichlet no estaven resoltes i que porten a allò que avui coneixem amb el nom de teoria dels espais de Hilbert.

En primer lloc, canviem la definició de Σ prenent ara

$$\Sigma = \{u \in C^1(\overline{U}) : u = \varphi \text{ a } \partial U\}.$$

Si $u_0 \in \Sigma$ minimitza I a Σ tindrem, com abans,

$$\int_U \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dV = \int_U (\vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} \psi) dV(x) = 0.$$

Ara bé, integrant per parts, resulta

$$\int_U u_0 \Delta \psi dV(x) = 0, \quad \text{per a } \psi \in C_c^2(U).$$

Tenim, per tant, $\Delta u_0 = 0$ en el sentit feble i pel lema de Weyl, u_0 és una funció harmònica. Considerem

$$\alpha = \inf \{I(u), u \in \Sigma\} \geq 0$$

i una successió de funcions $u_n \in \Sigma$ tal que $(I(u_n)) \rightarrow \alpha$, quan $n \rightarrow \infty$. Com que $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_m \in \Sigma$, hom té

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4} \int_U |\vec{\nabla} u_n - \vec{\nabla} u_m|^2 dV + \alpha \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_U |\vec{\nabla} u_n - \vec{\nabla} u_m|^2 dV + \frac{1}{4} \int_U |\vec{\nabla} u_n + \vec{\nabla} u_m|^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_U |\vec{\nabla} u_n|^2 dV + \frac{1}{2} \int_U |\vec{\nabla} u_m|^2 dV \longrightarrow \alpha \quad \text{si } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Per tant, $\int_U |\vec{\nabla} u_n - \vec{\nabla} u_m|^2 \rightarrow 0$, per a $n, m \rightarrow \infty$. Ara fixem-nos que si definim $\rho(u, v) = I(u - v)$ per a $u, v \in \Sigma$, ρ és una distància perquè compleix la desigualtat triangular i si $\rho(u, v) = 0$, llavors $\vec{\nabla} u = \vec{\nabla} v$, i com que $u = v = \varphi$ a ∂U , hom té $u = v$. Si l'espai Σ fos complet amb aquesta distància, la conclusió que acabem d'obtenir, que diu que (u_n) és una successió de Cauchy a (Σ, ρ) , implicaria que $(u_n) \rightarrow u_0$ amb $u_0 \in \Sigma$ i $I(u_0) = \alpha$ i provaria l'existència de solucions del problema de Dirichlet. Però Σ no és complet amb la distància ρ . Tanmateix, es pot fer una reelaboració del que hem dit basada en arguments semblants i en el teorema de la projecció per a espais de Hilbert i provar que una variant del problema de Dirichlet (en el sentit dels espais de Sobolev) té solució.

La manera més general de resoldre el problema de Dirichlet en oberts de $\mathbb{R}^n$ és el mètode de Perron basat en la idea de funció subharmònica i en el concepte de “subsolució”. En la secció 9.4 exposarem aquest mètode en el cas de dominis del pla complex.

7.13 Exercicis

1. Proveu que una funció u contínua en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$ és harmònica si i només si té la propietat de la mitjana respecte de boles, és a dir, si compleix

$$u(a) = \frac{n}{c_n r^n} \int_{B(a,r)} u(x) dV(x),$$

sempre que $B(a, r) \subset U$.

2. Trobeu la dimensió de l'espai vectorial format pels polinomis homogenis de grau k , $k \in \mathbb{N}$, a $\mathbb{R}^n$ que són harmònics.
3. Recordem (secció 7.3) que una funció v contínua en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$ s'anomena subharmònica si té la propietat de la submitjana respecte d'esferes, és a dir, si compleix

$$v(a) \leq \frac{1}{c_n r^{n-1}} \int_{S(a,r)} v(x) dA(x),$$

sempre que $\overline{B}(a, r) \subset U$. Proveu que en el cas $n = 1$ les funcions subharmòniques són les funcions convexes.

- a) Proveu que una funció $v \in C^2(U)$ és subharmònica a U si i només si $\Delta v \geq 0$ a U .

- b) Sigui $\psi \geq 0$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, amb suport a la bola unitat $\mathbb{B}$ i $\int_{\mathbb{R}^n} \psi dV = 1$.

Posem $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \psi(x/\varepsilon)$ i considerem la convolució $v_\varepsilon = v * \psi_\varepsilon$ a l'obert $U_\varepsilon = \{x : d(x, U^c) > \varepsilon\}$. Proveu que v és subharmònica a U si i només si v_ε és subharmònica a U_ε , per a tot $\varepsilon > 0$.

- c) Proveu que v és subharmònica a U si i només si

$$\int_U v(x) \Delta \phi(x) dV(x) \geq 0,$$

per a tota funció $\phi \in C_c^\infty(U)$, $\phi \geq 0$.

- d) Proveu que v és subharmònica a U si i només si té la propietat de la submitjana respecte de boles, és a dir,

$$v(a) \leq \frac{n}{c_n r^n} \int_{B(a,r)} v(x) dV(x),$$

sempre que $B(a, r) \subset U$.

4. Proveu que el principi del mòdul màxim és cert per a funcions subharmòniques: si U és un domini acotat de $\mathbb{R}^n$ i $v \in C(\overline{U})$ és subharmònica a U i compleix $v(x) \leq M$ per a $x \in \partial U$, llavors també és $v(x) \leq M$ per a $x \in U$. Proveu que si $u \in C(\overline{U})$ és harmònica a U i $v \in C(\overline{U})$ és subharmònica a U i satisfà $v(x) \leq u(x)$ per a $x \in \partial U$, llavors també és $v(x) \leq u(x)$ per a $x \in U$.
5. A partir de la solució del problema de Dirichlet en una bola amb el nucli de Poisson, proveu que tota funció harmònica en un obert de $\mathbb{R}^n$ és una funció analítica de les seves variables reals.

6. Suposem que f és harmònica en un domini U de $\mathbb{R}^n$ i que pren valors complexos, $f = u + iv$. Proveu que són equivalents les afirmacions següents:

- a) f^2 és harmònica a U .
 b) $\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v$ són perpendiculars i tenen la mateixa norma a U .

Si $n = 2$, proveu que a) o b) equivalen a dir que f és holomorfa o antiholomorfa a U . En el cas general $n \geq 2$, proveu que si f , harmònica, compleix a) o b) i pren valors reals, llavors f és constant.

7. Proveu la desigualtat de Harnack: si u és harmònica i positiva en un domini U de $\mathbb{R}^n$ i $B(a, r) \subset U$, hom té

$$r^{n-2} \frac{r - |x - a|}{(r + |x - a|)^{n-1}} u(a) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x - a|}{(r - |x - a|)^{n-1}} u(a), x \in B(a, r).$$

Utilitzeu aquesta desigualtat per a provar que tota funció harmònica a $\mathbb{R}^n$ i acotada superiorment, és constant.

8. a) Utilitzeu la desigualtat de Harnack (exercici 7) per a provar que si U és un domini de $\mathbb{R}^n$, K un compacte dins de U i $a \in U$, hi ha constants m, M dependents de U, K i a tals que

$$mu(a) \leq u(x) \leq Mu(a),$$

per a tota funció u harmònica i positiva a U i tot punt $x \in K$.

- b) Sigui $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions harmòniques en un domini U que convergeixen uniformement sobre els compactes de U cap a una funció u . Proveu que u és harmònica a U i que per a cada multiíndex α les derivades $(D^\alpha u_n)$ tendeixen a $D^\alpha u$ uniformement sobre els compactes de U .

9. Sigui $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió monòtona de funcions harmòniques en un domini $U \subset \mathbb{R}^n$. Proveu que si $(u_n(a))$ és convergent en un punt $a \in U$, aleshores (u_n) convergeix uniformement sobre els compactes de U cap a una funció harmònica a U .
10. a) Sigui $\Pi^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ el semiespai superior de $\mathbb{R}^n$ i u una funció harmònica i acotada a Π^+ , contínua a $\overline{\Pi}^+$ que compleix $u(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^{n-1} \simeq \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Proveu que $u \equiv 0$ a Π^+ .
- b) Proveu el mateix resultat substituint l'acotació de u a Π^+ per la condició: $|u(x)| = O(G(x))$, $|x| \rightarrow \infty$, on G és la solució fonamental del laplacà.
- Indicació:* Per a l'apartat b) feu servir la proposició 7.40 i el fet que la composició d'una funció harmònica amb la inversió respecte de la bola unitat és harmònica.
11. Trobeu la funció harmònica al disc unitat $\mathbb{D}$ del pla que val 1 en els punts $(x, y) \in \partial\mathbb{D}$ amb $y > 0$ i 0 en els altres punts de $\partial\mathbb{D}$. Trobeu també la funció harmònica que val $|y|$ a tots els punts $(x, y) \in \partial\mathbb{D}$.
12. Trobeu les funcions harmòniques al disc unitat $\mathbb{D}$ que a cada punt $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ valen: a) $\sin \theta$, b) $\sin^2 \theta$, c) $\cos^3 \theta$. Trobeu també la funció harmònica a $\mathbb{D}$ que val $x^2 + y^3$ en els punts $(x, y) \in \partial\mathbb{D}$.
13. Sigui u una funció harmònica en una bola $B(a, r)$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_{B(a, r)} |u(x)|^p dV(x) = M < +\infty, \quad p > 0.$$

Proveu la desigualtat $|u(a)| \leq \left(\frac{n}{c_n r^n} M\right)^{\frac{1}{p}}$, on $c_n = d\sigma(\mathbb{S})$. Com a conseqüència, proveu també que si u és harmònica a $\mathbb{R}^n$ i $|u|^p$ és integrable a $\mathbb{R}^n$, aleshores u és nul·la a $\mathbb{R}^n$.

14. Considerem al disc unitat $\mathbb{D}$ del pla complex el problema mixt: $\Delta u = 0$ a $\mathbb{D}$, $\lambda \frac{\partial u}{\partial \bar{\theta}}(e^{i\theta}) + \lambda \frac{\partial u}{\partial N}(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$, si $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, amb $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$ donada i λ constant. Proveu que aquest problema té solució si i només si la dada φ té integral zero sobre $\partial\mathbb{D}$ i trobeu la solució sota la forma

$$u(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) Q(z, e^{i\theta}) d\theta,$$

amb un nucli $Q(z, e^{i\theta})$ explícit.

15. L'objectiu d'aquest exercici és resoldre el problema de Dirichlet en una corona $C = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1\}$ del pla complex; és a dir, donades dues funcions contínues $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\partial C)$, es tracta de trobar una funció u harmònica a C , contínua a $\overline{C}$ tal que $u(R_1 e^{i\theta}) = \varphi_1(R_1 e^{i\theta}), u(R_2 e^{i\theta}) = \varphi_2(R_2 e^{i\theta})$, per a $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

a) Proveu primer que l'expressió general d'una funció u harmònica a C és de la forma

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}) e^{in\theta}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{C}.$$

b) Calculeu els coeficients A_n, B_n en funció dels coeficients de Fourier de φ_1, φ_2 .

c) Resoleu el problema de Dirichlet a C .

16. Sigui U un domini no acotat de $\mathbb{R}^n$ i u una funció contínua a $\overline{U}$, harmònica i acotada a U que val zero en la frontera de U . Proveu que u és idènticament nulla a U .

17. Sigui Π^+ el semiplà superior $\{z = x + yi : y > 0\}$ i $z \in \Pi^+$, fixat. Proveu que la funció

$$G(w, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{w - z}{w - \bar{z}}$$

és la funció de Green de Π^+ amb pol z . Utilitzeu la funció G i l'exercici 16 per tal de provar que, donada una funció φ contínua i acotada a $\mathbb{R}$, la funció de $z = x + iy$

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

és l'única funció harmònica i acotada a Π^+ amb valor φ a la frontera de Π^+ .

18. Proveu que el potencial de Riesz $G(\phi)$ és una funció contínua a $\mathbb{R}^n$ si la funció $\phi \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ compleix la condició

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G(x)| |\phi(x)| dV(x) < \infty.$$

19. L'objectiu d'aquest exercici és resoldre el problema de Dirichlet en el quadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. La dada és una funció φ contínua a ∂Q .

a) Proveu primer que es pot suposar que φ s'anul·la en els vèrtexs de Q , considerant el polinomi harmònic $a + bx + cy + dxy$, amb a, b, c, d triats convenientment.

b) Si φ s'anul·la en els vèrtexs, llavors es pot expressar com a suma de quatre funcions, cadascuna de les quals val zero en tres de les arestes de Q .

c) És suficient, per tant, resoldre el problema $\Delta u = 0$ a $\overset{\circ}{Q}$ i

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) &= 0, \text{ per a } 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(x, 1) &= \varphi(x), \text{ per a } 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

amb $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Per a aquest problema, utilitzeu el mètode de separació de variables per tal de provar que la solució és

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\operatorname{sh} n\pi} \hat{\varphi}(n) \sin n\pi x \cdot \operatorname{sh} n\pi y,$$

on $\hat{\varphi}(n)$ és l' n -èssim coeficient de φ en la base ortonormal $\sqrt{2} \sin n\pi t$ de $L^2([0, 1])$.

20. Feu quelcom semblant a l'exercici 19 per a resoldre el problema de Neumann al quadrat Q .

21. Aquest exercici dona una interpretació del nucli de Poisson del disc unitat $\mathbb{D}$. Per a $z \in \mathbb{D}$ fixat, associem a cada punt $w \in \partial\mathbb{D}$ el punt $\xi = \xi(z, w) \in \partial\mathbb{D}$ de manera que w , z i ξ estiguin alineats. Proveu que la solució del problema de Dirichlet a $\mathbb{D}$ amb dada $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$ és

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\xi(z, w)) d\sigma(w).$$

22. Sigui U un domini acotat de $\mathbb{R}^n$ amb vora regular orientada pel camp normal exterior $\vec{N}$ i $\partial U = S_1 \cup S_2$ una partició de la vora. Siguin φ_1, φ_2 funcions contínues a S_1, S_2 , respectivament. Proveu que el problema

$$\Delta u = 0 \text{ a } U, \quad u = \varphi_1 \text{ a } S_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \varphi_2 \text{ a } S_2$$

té com a màxim una solució. Considereu el cas que U és el semidisc superior del pla $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ i $S_1 = [-1, 1]$, $S_2 = \partial U \setminus S_1$. Resoleu el problema

$$\Delta u = 0 \text{ a } U, \quad u = \varphi \text{ a } S_2, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0 \text{ a } S_1,$$

amb φ contínua a S_2 , de dues maneres: a) utilitzant el principi de simetria, b) per separació de variables.

Representació conforme

Les funcions holomorfes d'una variable complexa són aplicacions conformes en el sentit que conserven els angles. Aquesta propietat les converteix en un instrument molt útil en l'estudi de diversos problemes de la física com ara el moviment de fluids, o en la solució de problemes amb condicions a la frontera.

En aquest capítol estudiem les representacions conformes insistint més aviat en els aspectes geomètrics, en els exemples i en les aplicacions. La demostració del teorema de Riemann o teorema fonamental de la representació conforme es farà en el capítol 9.

A més d'estudiar les homografies i les representacions conformes a què donen lloc diverses funcions elementals, es tracta amb deteniment la representació conforme de polígons i el comportament d'una representació conforme a la frontera d'un domini limitat per arcs analítics, qüestions, ambdues, que són importants de cara a les aplicacions. El capítol acaba, precisament, amb alguns exemples d'utilització de la representació conforme, un en cartografia i els altres en hidrodinàmica.

8.1 Aplicacions conformes

Començarem fent un repàs de la relació entre holomorfia i conformalitat, qüestió que ja ha estat considerada en l'apartat 2.4.2.

Suposem que $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ són dues corbes regulars que passen pel punt z_0 , posem $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ i que tenen, en aquest punt, un vector tangent no

nul, $\gamma'_1(0) \neq 0$, $\gamma'_2(0) \neq 0$. L'angle de γ_1 amb γ_2 en el punt z_0 és l'angle entre els vectors tangents:

$$\text{Arg} \left[\gamma'_1(0) \cdot \overline{\gamma'_2(0)} \right].$$

Sigui ara f una aplicació diferenciable en un entorn del punt z_0 amb $df(z_0)$ invertible. L'aplicació lineal $df(z_0)$ s'anomena *aplicació lineal tangent a f* en el punt z_0 per la raó següent: si considerem la corba $\tilde{\gamma}_1(t) = f(\gamma_1(t))$, imatge de γ_1 per f , llavors el vector tangent a $\tilde{\gamma}_1$ en el punt $f(z_0)$ és la imatge per $df(z_0)$ del vector tangent a γ_1 en el punt z_0 . És a dir,

$$\tilde{\gamma}'_1(0) = (f \circ \gamma_1)'(0) = df(z_0)(\gamma'_1(0)).$$

Naturalment, el mateix val per a γ_2 i per a qualsevol corba que passi pel punt z_0 .

Així doncs, les corbes $\tilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ i $\tilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ formen en el punt $f(z_0)$ un angle igual a

$$\text{Arg} [df(z_0)(\gamma'_1(0))] \cdot \overline{df(z_0)(\gamma'_1(0))}.$$

Observem que la condició que $df(z_0)$ sigui invertible és necessària per a poder parlar de l'angle entre $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$, perquè, si no, podria passar que una d'aquestes corbes tingués vector tangent nul en el punt $f(z_0)$.

Suposem ara que f sigui holomorfa al voltant del punt z_0 i que $f'(z_0) \neq 0$. Llavors sabem (teorema 2.25) que l'aplicació lineal tangent $df(z_0)$ és $\mathbb{C}$ -lineal i consisteix en la multiplicació complexa per $f'(z_0)$. Per tant,

$$\tilde{\gamma}'_1(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'_1(0) \quad \text{i} \quad \tilde{\gamma}'_2(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'_2(0).$$

Això vol dir que l'aplicació de la funció f provoca un gir d'angle $\text{Arg } f'(z_0)$ a cada vector tangent.

L'angle entre $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{\gamma}_2$ val ara

$$\text{Arg} \left[|f'(z_0)|^2 \gamma'_1(0) \overline{\gamma'_2(0)} \right] = \text{Arg} [\gamma'_1(0) \cdot \overline{\gamma'_2(0)}].$$

La funció f conserva, doncs, els angles entre corbes en el punt z_0 . Es diu que f és *conforme* en el punt z_0 . Observem que f conserva els valors dels angles i també el seu sentit (que és el signe de $\text{Arg}[\gamma'_1(0) \cdot \overline{\gamma'_2(0)}]$).

Ara, en comptes de comparar l'angle dels vectors tangents a dues corbes amb l'angle dels vectors tangents a les corbes imatge per f , compararem la longitud del vector tangent a una corba amb la longitud del vector tangent a la corba imatge. És a dir, comparem $|\gamma'(0)|$ amb $|df(z_0)(\gamma'(0))|$.

En general, la relació entre aquestes longituds depèn de la direcció del vector $\gamma'(0)$, però si f és holomorfa, llavors

$$|df(z_0)(\gamma'(0))| = |f'(z_0)| \cdot |\gamma'(0)|$$

i resulta que la distorsió de la longitud provocada per f és la mateixa en totes les direccions i igual a $|f'(z_0)|$.

Considerem ara els recíprocs dels resultats que acabem de comentar. En el mateix apartat 2.4.2 ja s'ha fet veure que si f és diferenciable al voltant del punt z_0 (amb $df(z_0)$ invertible) i f és conforme, és a dir, conserva els angles entre corbes i el seu sentit, llavors f és holomorfa en el punt z_0 . La raó és la següent: amb notació matricial tenim $df(z_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on $a = \frac{\partial u}{\partial x}$, $b = \frac{\partial u}{\partial y}$, $c = \frac{\partial v}{\partial x}$, $d = \frac{\partial v}{\partial y}$, si $f = u + iv$ i $df(z_0)(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ amb $\alpha + \beta = a + ic$ i $\alpha - \beta = b + id$; el fet que $df(z_0)$ conservi angles vol dir que $\frac{df(z_0)(z)}{z} = \alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$ té argument constant, i això només pot passar si $\beta = 0$, perquè $\alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$ descriu una circumferència de centre α i radi $|\beta|$; finalment, $\beta = 0$ vol dir que $a = d$, $b = c$, igualtats que no són altra cosa que les equacions de Cauchy-Riemann.

Vegem què passa ara si l'aplicació diferenciable f , amb $df(z_0)$ invertible, dilata les longituds dels vectors en la mateixa proporció en totes les direccions. Això significa que

$$\frac{df(z_0)(z)}{z} = \alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$$

té mòdul constant, independentment de z , la qual cosa només és possible si $\alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$ descriu una circumferència de radi zero o bé una circumferència de centre a l'origen. És a dir, o bé $\beta = 0$, o bé $\alpha = 0$. En el primer cas, ja sabem que f és $\mathbb{C}$ -derivable en el punt z_0 . En el segon cas, $\alpha = 0$ i resulta $a = -d$, $b = c$. Ara $df(z_0)(z) = \beta \bar{z}$ és una aplicació lineal que conserva els angles, però que n'inverteix el sentit. Les equacions corresponents a $a = -d$, $b = c$ en termes de les derivades parcials de f indiquen que ara $\bar{f}$ és una funció holomorfa. Es diu que f és *antiholomorfa* o *inversament conforme*.

Del que hem dit convé retenir, en especial, l'enunciat següent:

Proposició 8.1. *Si f és una funció diferenciable al voltant del punt z_0 , f és conforme a z_0 si i només si f té derivada complexa a z_0 i $f'(z_0) \neq 0$. En aquest cas, l'aplicació lineal tangent $df(z_0)$ és un gir d'angle $\text{Arg } f'(z_0)$ seguit d'una dilatació de factor $|f'(z_0)|$.*

8.2 Representacions conformes

Acabem de veure que si f és una funció holomorfa en un obert U del pla complex i $f'(z) \neq 0$, per a cada $z \in U$, llavors f és conforme a cada punt de U . Ara bé, f no té per què ser una aplicació injectiva a U (pensem, per exemple, en $U = \mathbb{C}$ i $f(z) = e^z$).

En canvi, si f és una funció holomorfa a U que, a més, és injectiva a U , s'ha de complir necessàriament $f'(z) \neq 0$, per a $z \in U$, d'acord amb el teorema 4.32. En aquest cas, doncs, f és una aplicació bijectiva de U sobre l'obert $f(U)$ que és conforme a cada punt de U ($f(U)$ és obert pel teorema 4.33). I és clar que la funció inversa f^{-1} és conforme a cada punt de $f(U)$, perquè, en ser $f'(z) \neq 0$, f^{-1} és holomorfa.

Definició 8.2. Si U és un obert de $\mathbb{C}$, una funció f holomorfa i injectiva a U es diu que és una representació conforme de U sobre l'obert $f(U)$.

Es diu que dos dominis del pla complex U, U' són conformement equivalents si existeix una representació conforme de U sobre U' (o de U' sobre U).

Les representacions conformes són, doncs, les aplicacions que són conformes a cada punt del seu domini i, a més, són globalment injectives. Per exemple, la funció e^z és una representació conforme de la banda $U = \{z: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$.

Si U, U' són conformement equivalents, també han de ser topològicament equivalents, perquè una representació conforme de U sobre U' és, en particular, un homeomorfisme entre U i U' .

Així, per exemple, el disc unitat del pla $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ i una corona $C(0, 1, 2) = \{z: 1 < |z| < 2\}$ no poden ser conformement equivalents. Un altre exemple negatiu és el següent.

Proposició 8.3. El disc unitat $\mathbb{D}$ i el pla complex $\mathbb{C}$ no són conformement equivalents tot i que són topològicament equivalents.

Demostració. Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ fos holomorfa, tindriem $|f(z)| < 1$, per a $z \in \mathbb{C}$, i pel teorema de Liouville (teorema 4.41) f seria constant i, per tant, no seria injectiva.

D'altra banda, $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$ és un homeomorfisme de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{D}$. □

És una qüestió natural, doncs, voler saber quins dominis es poden representar conformement sobre el disc unitat $\mathbb{D}$. La resposta és la següent:

Teorema 8.4. *Un domini del pla complex es pot representar conformement sobre el disc unitat si i només si és simplement connex i diferent de $\mathbb{C}$.*

Podem veure fàcilment que les condicions sobre U són necessàries. Si $f: \mathbb{D} \rightarrow U$ és una representació conforme, llavors per a cada corba tancada γ regular a trossos amb $\gamma^* \subset U$ i cada punt $a \notin U$, hom té

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-a} = \int_{f^{-1} \circ \gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-a} dz = 0,$$

pel teorema de Cauchy al disc unitat, ja que $f(z) \neq a$ si $z \in U$. Així doncs, $\text{Ind}(\gamma, a) = 0$ i U és simplement connex. La condició $U \neq \mathbb{C}$ és necessària per la proposició 8.3.

El fet que tot domini simplement connex diferent de $\mathbb{C}$ es pugui representar conformement sobre $\mathbb{D}$ és degut a Riemann i es coneix com el *teorema fonamental de la representació conforme*. Amb més precisió, el teorema de Riemann és el següent.

Teorema 8.5 (Teorema fonamental de la representació conforme).

Donats un domini simplement connex U , $U \neq \mathbb{C}$, i un punt $z_0 \in U$, existeix una única representació conforme f de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$, normalitzada amb les condicions $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$.

Corol·lari 8.6. *Dos dominis del pla, simplement connexos i diferents de tot el pla, són conformement equivalents entre si.*

Del teorema de Riemann se'n donaran dues demostracions en el capítol 9. Aquest teorema diu que hi ha dos models de dominis plans simplement connexos: $\mathbb{C}$ i el disc unitat $\mathbb{D}$. Qualsevol altre domini simplement connex és equivalent a un d'aquests dos.

Si dos dominis U, U' són conformement equivalents, llavors tant és estudiar les funcions holomorfes sobre U com sobre U' , perquè si $f: U \rightarrow U'$ és conforme, la transformació $g \rightarrow g \circ f^{-1}$ dóna un isomorfisme entre els anells de funcions $H(U)$ i $H(U')$. És a dir, si es volen conèixer les funcions analítiques sobre un domini sense forats, n'hi ha prou d'estudiar les funcions enteres i les funcions holomorfes al disc unitat.

En particular, es poden considerar les representacions conformes d'un domini U sobre si mateix. És clar que aquestes representacions formen un grup, que s'anomena *grup d'automorfismes* de U i es representa per $\text{Aut}(U)$. Si U i U' són conformement equivalents per $f: U \rightarrow U'$, llavors $\text{Aut}(U)$ i $\text{Aut}(U')$ són grups isomorfs, a través de la correspondència $g \rightarrow g \circ f^{-1}$ de $\text{Aut}(U)$ sobre $\text{Aut}(U')$.

Si f és una representació conforme de U sobre U' , l'efecte de f sobre les funcions harmòniques ja ha estat analitzat en la secció 7.11. Sabem que la transformació $u \rightarrow u \circ f$ dóna una bijecció entre les funcions harmòniques a U' i les funcions harmòniques a U . De fet, també val el recíproc en el sentit que $u \rightarrow u \circ f$ és una bijecció entre els espais de funcions harmòniques només quan f és holomorfa o bé antiholomorfa (teorema 7.67). Aquest fet fa pensar que les representacions conformes poden ser útils en la solució del problema de Dirichlet, ja que si es tracta de construir funcions harmòniques sobre un domini determinat, pot ser convenient canviar de domini mitjançant una representació conforme.

Recordem que si U, U' són dos dominis i $f: U \rightarrow U'$ és una representació conforme, la manera com es relaciona el problema de Dirichlet a U amb el problema de Dirichlet a U' és la següent (secció 7.11):

Suposem que sabem resoldre el problema de Dirichlet en el domini U' i el volem resoldre en el domini U . Si $\varphi \in (\partial U)$ és la dada a la frontera de U , passem a la frontera de U' definint $\psi = \varphi \circ f^{-1}$. Ara prenem v la solució del problema de Dirichlet a U' amb la dada ψ , és a dir, $\Delta v = 0$ a U' i $v|_{\partial U'} = \psi$, i finalment definim $u = v \circ f$, de manera que es compleix $\Delta u = 0$ a U i $u|_{\partial U} = \varphi$ (fig. 8.1).

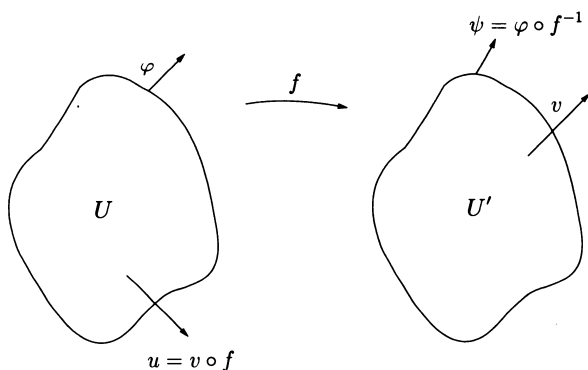


Figura 8.1

Observem, però, que cal que f actuï com una transformació bijectiva i bicontínua (homeomorfisme) entre les fronteres de U i U' . Per aquest motiu és molt important saber quin és el comportament a la frontera d'una representació conforme. En el cas d'un domini simplement connex $U \neq \mathbb{C}$ sabem, pel teorema de Riemann, que hi ha representacions conformes $f: U \rightarrow \mathbb{D}$, on $\mathbb{D}$ és el disc unitat. La pregunta és: quan es pot assegurar que f es pot estendre a un

homeomorfisme $\tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$?

És clar que si això és possible, llavors $\tilde{f}$ també serà un homeomorfisme de ∂U sobre $\partial \mathbb{D}$ i, per tant, ∂U ha de ser una corba tancada de Jordan que per definició és un espai homeomorf a $\partial \mathbb{D}$. El que és important és el fet que aquesta condició sobre ∂U ja és suficient per a garantir l'existència de l'extensió $\tilde{f}$. És el resultat següent.

Teorema 8.7 (Carathéodory). *Si U és un domini simplement connex, $U \neq \mathbb{C}$, de manera que ∂U és una corba tancada de Jordan, llavors qualsevol representació conforme f de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$ s'estén a un homeomorfisme de $\bar{U}$ sobre $\bar{\mathbb{D}}$.*

Corol·lari 8.8. *Una representació conforme entre dos dominis simplement connexos limitats per corbes de Jordan s'estén a un homeomorfisme entre les adherències dels dominis.*

La solució del problema de Dirichlet per al disc unitat que s'ha donat en el capítol anterior (apartat 7.6.1) permet, doncs, resoldre el problema de Dirichlet per a un domini simplement connex limitat per una corba de Jordan sempre que siguem capaços de representar explícitament aquest domini sobre el disc unitat. Més endavant en veurem algun exemple.

La demostració del teorema 8.7 quan ∂U és una corba de Jordan qualsevol cau fora dels límits d'aquest text i no la donarem. Es pot veure a [9, pàg. 324]. Farem, però, la prova en un cas particular que ens serà útil després: el cas que ∂U estigui formada per un nombre finit d'arcs analítics. Això vol dir, essencialment, que es dona la situació de la proposició 1.35, però amb la funció φ analítica, és a dir, holomorfa. Amb més precisió, un arc $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, és un *arc analític* de la frontera del domini U si existeix un domini Δ simplement connex i simètric respecte de l'interval (a, b) i una funció φ que representa conformement Δ en un obert $\tilde{\Delta} = \varphi(\Delta)$ de manera que

$$\begin{cases} \varphi(\Delta \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}) = \tilde{\Delta} \cap U \\ \varphi(t) = \gamma(t), \quad t \in (a, b) \\ \varphi(\Delta \cap \{z: \operatorname{Im} z < 0\}) = \tilde{\Delta} \cap U^c. \end{cases} \quad (8.1)$$

Com a qüestió prèvia, convé fer notar una propietat de les representacions conformes que, de fet, també la tenen els homeomorfismes perquè és purament topològica. Sigui $f: U \rightarrow U'$ una aplicació contínua d'un domini U en un domini U' . Direm que $f(z)$ *tendeix a la frontera de U' quan z tendeix a la frontera de U* si per a tot compacte $K' \subset U'$ existeix un compacte $K \subset U$ de manera que si $z \notin K$, llavors $f(z) \notin K'$.

Proposició 8.9. *Si $f: U \rightarrow U'$ és un homeomorfisme, llavors $f(z)$ tendeix a la frontera de U' quan z tendeix a la frontera de U .*

Demostració. Com que f^{-1} és contínua, donat un compacte $K' \subset U'$ només cal prendre $K = f^{-1}(K')$ per tenir un compacte de U que compleixi la condició requerida. $\square$

Això significa que si (z_n) és una successió de punts de U que tendeix a un punt de ∂U , llavors la successió $(f(z_n))$ s'acosta a $\partial U'$, però no podem dir que tendeixi cap a un punt de $\partial U'$. El mateix passa amb un arc de corba $\gamma(t) \in U$ que tendeixi a un punt de ∂U .

També necessitarem un *principi de simetria per a funcions holomorfes* que val la pena de destacar.

Proposició 8.10. *Sigui U un domini del pla simètric respecte de l'eix real, f una funció holomorfa a U^+ , la part superior de U , i suposem que la funció $u = \operatorname{Im} f$ és contínua a $\overline{U}^+$ i $u = 0$ a $U \cap \mathbb{R}$. Llavors f té una extensió holomorfa a U que compleix $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.*

Demostració. Considerem un disc Δ centrat en un punt de $U \cap \mathbb{R}$. Sabem pel principi de simetria per a funcions harmòniques (proposició 7.57) que u té una extensió harmònica a Δ que compleix $u(\bar{z}) = -u(z)$. La funció u té a Δ una funció harmònica conjugada que anomenem $-u_0$ i podem suposar que compleix $u_0 = \operatorname{Re} f$ a Δ^+ , és a dir, $f(z) = u_0(z) + iu(z)$, $z \in \Delta^+$. Ara la funció $v(z) = u_0(z) - u_0(\bar{z})$ compleix $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u_0}{\partial y} = -2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ sobre l'eix real. Per tant, la funció holomorfa $\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}$ s'annul·la en un interval i, en conseqüència, és idènticament nul·la.

Així, v és constant i és clar que $v = 0$, és a dir, $u_0(z) = u_0(\bar{z})$, que dona $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ si posem $f(z) = u_0(z) + iu(z)$ a Δ . Ara només cal repetir la construcció en discos arbitraris i observar que u_0 ha de ser la mateixa en dos discos que es tallin. $\square$

Observació 8.1. L'enunciat de la proposició 8.10 s'assembla molt a l'enunciat del principi de simetria que s'ha donat a continuació del teorema 4.27 (observació 4.1). La diferència és que allà se suposava que la funció donada, holomorfa a U^+ , tenia límit quan la variable tendia a l'eix real, mentre que ara aquesta hipòtesi només afecta la part imaginària de la funció holomorfa.

Teorema 8.7'. *Sigui U un domini simplement connex que tingui per frontera una corba de Jordan tancada analítica a trossos, és a dir, formada per un nombre finit d'arcs analítics, i sigui f una representació conforme de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$. Llavors f es pot estendre a un homeomorfisme de $\overline{U}$ sobre $\mathbb{D}$.*

Demostració. Suposem que la frontera de U està formada pels arcs analítics $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ i siguin $z_1, z_2, \dots, z_n$ els seus vèrtexs; és a dir, z_k és el punt final de γ_{k-1} i el punt inicial de γ_k , $k = 2, \dots, n$ i z_1 empalma γ_n amb γ_1 . Suposem també que $a_0 \in U$ és tal que $f(a_0) = 0$ (fig. 8.2).

Fem la prova en diverses etapes.

A) La funció f es pot estendre contínuament a l'interior de cada arc γ_k , és a dir, a γ_k sense els seus extrems.

Per a provar aquesta afirmació agafem Δ i φ com a (8.1), corresponents a l'arc γ_k . Si Δ és prou petit de manera que $a_0 \notin \varphi(\Delta)$, la funció $\log f(\varphi(z))$ té una determinació holomorfa a $\Delta \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. La seva part real, $\operatorname{Log} |f(\varphi(z))|$ tendeix a 0 quan $\operatorname{Im} z \rightarrow 0$, per la proposició 8.9. Per tant, per la proposició 8.10, $\log f(\varphi(z))$ té una extensió holomorfa a Δ , i també en té una la funció $f(\varphi(z))$. Per a cada $t_0 \in (a, b)$ és $\varphi'(t_0) \neq 0$, de manera que φ té una inversa holomorfa en un entorn de $\varphi(t_0)$, i això vol dir que f també s'estén analíticament al voltant de $\varphi(t_0)$.

B) L'extensió de f és injectiva sobre la reunió dels interiors dels arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

En efecte, siguin $z_0 \neq z'_0$ dos punts interiors a algun arc de la frontera de U i vegem que la hipòtesi $f(z_0) = f(z'_0)$ porta a contradicció. Sigui Δ un disc de centre z_0 que no contingui z'_0 i posem $w_0 = f(z_0) = f(z'_0)$. La imatge $f(\Delta)$ és un obert que conté w_0 , i si $z \in U$, $z \notin \Delta$, és un punt prou pròxim a z'_0 , tindrem $f(z) \in f(\Delta) \cap \mathbb{D}$, perquè f és contínua en el punt z'_0 .

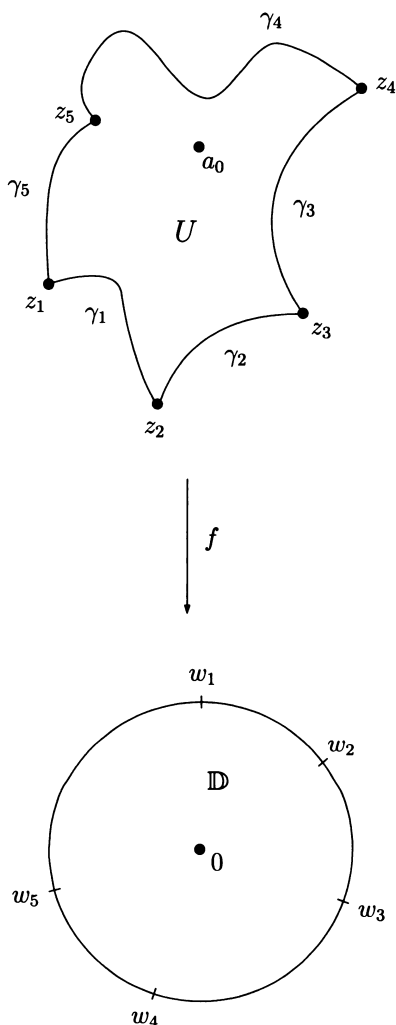


Figura 8.2

Però llavors hi hauria un punt $z_1 \in \Delta \cap U$ amb $f(z_1) = f(z)$, la qual cosa no és possible perquè f és injectiva a U .

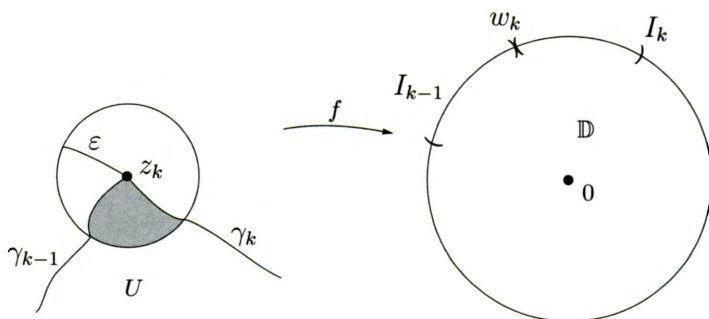


Figura 8.3

C) La funció f s'estén contínuament als vèrtexs $z_1, \dots, z_n$ i, si $w_k = f(z_k)$, les imatges dels arcs γ_{k-1} i γ_k són dos arcs de la circumferència unitat que tenen w_k com a punt comú únic (fig. 8.3).

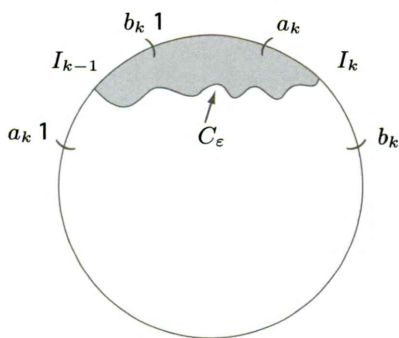


Figura 8.4

La imatge de l'interior de cada arc γ_k , per l'extensió de f , és un arc obert de $\partial\mathbb{D}$. Sigui $I_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ la imatge de l'interior de γ_k i provem que si γ_{k-1} i γ_k concorren en el vèrtex z_k , llavors I_{k-1} i I_k tenen un extrem en comú. En efecte, en el cas contrari hi hauria un arc de circumferència entre I_{k-1} i I_k que podem suposar que és (b_{k-1}, a_k) . Per a cada $\varepsilon > 0$, considerem la part de la circumferència de centre z_k i radi ε que cau dins de U i sigui C_ε la seva imatge per f (fig. 8.4). És un arc de Jordan que va d'un punt de I_{k-1} a un punt de I_k .

Quan $\varepsilon \rightarrow 0$, C_ε tendeix a $\partial\mathbb{D}$ per la proposició 8.9, i els extrems de C_ε tendeixen a b_{k-1} i a_k , respectivament. Si ara considerem la funció inversa de f , $f^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow U$ i observem que, pel fet de ser injectiva, si dos punts de $\mathbb{D}$ no estan separats per C_ε , les seves imatges a U tampoc no estan separades per la circumferència de centre z_k i radi ε , arribem a la conclusió que quan un punt $w \in \mathbb{D}$ tendeix a l'arc (b_{k-1}, a_k) , $f^{-1}(w)$ tendeix a z_k i, per tant, la

funció $f^{-1}(w) - z_k$ tendeix a 0 quan w s'acosta a (b_{k-1}, a_k) . Aplicant una altra vegada la proposició 8.10, resulta que $f^{-1}(w) - z_k$ s'estén analíticament amb el valor 0 a través de (b_{k-1}, a_k) , i el principi de prolongació analítica ens diu que aquesta funció és nul·la en un obert de $\mathbb{D}$ i, en conseqüència a tot $\mathbb{D}$. Això és una contradicció, perquè f^{-1} no és constant.

Així doncs, ha de ser $b_{k-1} = a_k$ i el raonament que hem fet demostra que f s'estén contínuament a z_k amb $f(z_k) = w_k = b_{k-1} = a_k$.

D) Finalment, el que acabem de provar també fa veure que les imatges per f dels arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, ara amb els extrems inclosos, han de cobrir tota la circumferència unitat, i això acaba la demostració del teorema. $\square$

És important fer notar que la demostració que acabem de donar fa veure que la representació f satisfà una condició més forta que la que expressa l'enunciat del teorema 8.7'. De fet, prova que f s'estén *analíticament* a través de cada arc analític obert que forma part de la frontera de U . Això implica que f és conforme en els punts de ∂U , en el sentit que conserva l'angle entre dues corbes que es tallen en un punt de ∂U i les seves imatges. En particular, f conserva les normals, és a dir, a una corba que passa per z_0 , perpendicularment a ∂U li correspon una corba que talla perpendicularment la circumferència unitat (fig. 8.5).

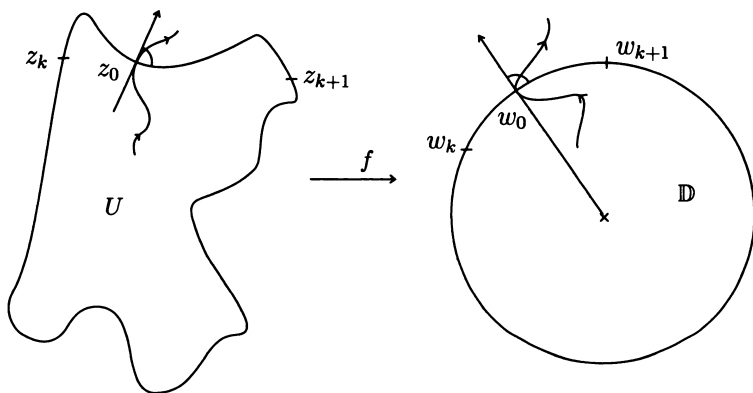


Figura 8.5

En general, si U està limitat per una corba de Jordan qualsevol, no hi ha aquesta conservació dels angles sobre la frontera de U (de fet, ni té sentit parlar de perpendicularitat amb la frontera), però si ∂U és prou regular, sí que hi ha conformalitat a la frontera. Una condició suficient és que ∂U sigui una corba

de Jordan de classe C^2 (o també de classe $C^{1+\varepsilon}$ amb $\varepsilon > 0$). En aquestes condicions la derivada de la representació conforme s'estén contínuament fins a la frontera amb valors no nuls, i llavors hi ha conformalitat en els punts de ∂U . En particular, una corba normal a $\partial \mathbb{D}$ va a parar a una corba normal a ∂U . Aquesta propietat la utilitzarem més endavant per a resoldre el problema de Neumann per a un domini particular.

8.3 Transformacions homogràfiques

8.3.1 Les homografies

D'entre totes les funcions analítiques, les funcions racionals de primer grau, anomenades també *homografies*, tenen un interès especial perquè són representacions conformes de tota l'esfera de Riemann en si mateixa i perquè, a més, tenen unes propietats geomètriques molt senzilles. Val la pena estudiar-les una mica detalladament.

Una *homografia* és, doncs, una funció racional de la forma

$$Tz = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{amb} \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (8.2)$$

La condició $ad - bc \neq 0$ evita que T sigui constant i T és una funció holomorfa a tot el pla, tret del punt $z = -d/c$.

Una homografia T es diu que és *real* quan transforma l'eix real en si mateix. És clar que això passa si i només si els coeficients a, b, c, d són tots quatre reals.

Convé mirar-se T com una transformació de S^2 a S^2 definint $T(-d/c) = \infty$ i $T(\infty) = a/c$. Una homografia és una aplicació bijectiva de S^2 sobre S^2 , ja que si T està definida per (8.2), llavors té una inversa que és l'homografia

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

És fàcil comprovar que la composició de dues homografies és una altra homografia. De fet, si associem a T la matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dels seus coeficients i una altra homografia S té per matriu $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, llavors resulta que $S \circ T$ té associada la matriu producte

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Així doncs, les homografies formen un grup de transformacions de S^2 .

Per exemple, les homografies que tenen per matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

són, respectivament, la *translació* $z \rightarrow z + b$, la *dilatació* $z \rightarrow az$ i la *inversió* $z \rightarrow 1/z$.

És interessant el fet que tota homografia és la composició d'aquests tres tipus de transformacions. En efecte, si $c \neq 0$, es pot posar

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c}$$

i, si $c = 0$, directament, $Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, que és una dilatació seguida d'una translació.

Observem que l'homografia T és una representació conforme de l'obert $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ sobre l'obert $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ si $c \neq 0$. Si $c = 0$, és una representació conforme de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$. Per tant, T conserva els angles de qualsevol parell de corbes que es tallin dins de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

Considerem ara el conjunt de rectes i de circumferències del pla complex. També ens les podem mirar a l'esfera de Riemann. Aleshores només tenim circumferències, i les rectes del pla són ara les circumferències que passen pel punt ∞ . Recordem de l'apartat 1.2.1 que una recta de vector director $\alpha \in \mathbb{C}$ (és a dir, que és perpendicular a α) té per equació $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m = 0$, amb $m \in \mathbb{R}$. Pel que fa a una circumferència de centre $\alpha \in \mathbb{C}$, la seva equació és

$$|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m = 0 \tag{8.3}$$

amb $m \in \mathbb{R}$ i $|\alpha|^2 - m > 0$.

Proposició 8.11. *Tota homografia transforma el conjunt de rectes i circumferències en si mateix.*

Demostració. És evident, geomètricament o analíticament, que una translació o una dilatació transformen una recta en una recta, i una circumferència en una circumferència. Pel que fa a una inversió, $Tz = 1/z$, transforma la recta $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m = 0$, $m \neq 0$ en la circumferència que passa per l'origen d'equació $|z|^2 + \frac{\alpha}{m}z + \frac{\bar{\alpha}}{m}\bar{z} = 0$. Si $m = 0$, la recta passa per l'origen i es transforma en la recta per l'origen $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = 0$. Si ara partim de la circumferència (8.3) amb $m \neq 0$ i apliquem $Tz = 1/z$, anem a parar a la circumferència d'equació $|z|^2 + \frac{\alpha}{m}z + \frac{\bar{\alpha}}{m}\bar{z} + \frac{1}{m} = 0$. Si $m = 0$, la circumferència (8.3) passa per l'origen i la seva imatge per T és ara la recta $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + 1 = 0$. $\square$

El que acabem de veure justifica que no es facin distincions entre rectes i circumferències, i a partir d'ara farem servir el terme *cercle* per a designar indistintament una recta o una circumferència. Així doncs, direm que les homografies transformen cercles en cercles.

La pregunta que queda per respondre és si donats dos cercles qualssevol hi ha sempre una homografia que passa de l'un a l'altre. La resposta afirmativa és conseqüència del resultat següent.

Proposició 8.12. *Donats tres punts diferents z_1, z_2, z_3 de S^2 i tres punts més, també a S^2 i diferents entre si, w_1, w_2, w_3 , existeix una única homografia T tal que $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Demostració. Donada l'estructura de grup de les homografies, és suficient veure que existeix una homografia T que envia z_1, z_2, z_3 a $0, 1, \infty$, respectivament, i que una homografia que deixi fixos els punts $0, 1, \infty$ és la identitat.

Per comprovar la primera afirmació prenem

$$Tz = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

si $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$. Si algun d'aquests tres punts és ∞ , posem per exemple $z_1 = \infty$, llavors prenem

$$Tz = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Finalment, si $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ fixa $0, 1, \infty$, tenim per força $Tz = \frac{a}{d}z + \frac{c}{d}$, perquè $T(\infty) = \infty$. I ara $T(0) = 0$ dóna $Tz = \frac{c}{d}z$ i, finalment, $Tz = z$, ja que $T(1) = 1$. $\square$

Com que és clar que tot cercle queda determinat per tres punts diferents, obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 8.13. *Donats dos cercles existeix sempre una homografia que passa de l'un a l'altre.*

S'ha d'observar que aquesta homografia no és única, sinó que, de fet, n'hi ha infinites de diferents que passen d'un cercle a l'altre agafant ternes de punts diferents de cadascun d'ells.

Exemple 8.14. Donats dos cercles C_1, C_2 i dos punts $z_1 \notin C_1$ i $z_2 \notin C_2$, sempre hi ha una homografia que transforma C_1 en C_2 i z_1 en z_2 . En efecte, podem passar, per sengles homografies, C_1 i C_2 a l'eix real i només cal veure que hi ha una homografia que deixa l'eix real fix i que transforma z'_1 en z'_2 , on z'_1, z'_2 són dos punts que no són sobre l'eix real.

Si z'_1, z'_2 són sobre una recta paral·lela a l'eix real, llavors la translació $w = z + (z'_2 - z'_1)$ ja serveix. En el cas contrari la recta que passa per z'_1 i z'_2 talla l'eix real en un punt z_0 i llavors prenem la transformació $w = z_0 + \frac{z'_2 - z_0}{z'_1 - z_0} (z - z_0)$, que és una homotècia de centre z_0 , o bé una homotècia de centre z_0 seguida d'una rotació d'angle π , segons la posició de z'_1 i z'_2 respecte de l'eix real. $\square$

Observació 8.2. En la demostració de la proposició 8.12 hem vist que una homografia T que complís $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(\infty) = \infty$ havia de ser la identitat. Més generalment es pot afirmar que una homografia que tingui tres punts fixos és la identitat. Dit d'una altra manera, si $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ no és la identitat, llavors T té com a màxim dos punts fixos. Això es veu observant que la igualtat $Tz = z$ equival a l'equació

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

que, en ser de segon grau, té com a màxim dues solucions diferents.

Exemple 8.15. Busquem, en primer lloc, l'homografia $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ que transforma $0, 1, \infty$ en $-1, 0, 1$, respectivament.

Si prenem $a = 1$ i tenim en compte que $T(i) = 0$, obtenim $Tz = \frac{z-i}{cz+d}$. Ara $T(\infty) = 1$ dóna $c = 1$ i $T(0) = -1$ dóna $d = i$. Resulta, doncs,

$$Tz = \frac{z-i}{z+i}.$$

Busquem ara la imatge per T de l'eix real i de l'eix imaginari.

L'eix imaginari conté $0, 1, \infty, i$, per tant, la seva imatge és un cercle per $-1, 0, 1$. És a dir, és l'eix real. L'eix real conté $0, \infty$. La seva imatge serà un cercle que passa per -1 i 1 i que ha de ser perpendicular a la imatge de l'eix imaginari, és a dir, a l'eix real. Per tant, es tracta de la circumferència unitat.

Si ara prenem el semiplà superior $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, la seva imatge no podrà travessar la circumferència unitat i haurà de ser el disc unitat, o bé el domini $\{w: |w| > 1\}$. Com que $T(i) = 0$, ha de ser el disc unitat. $\square$

Exemple 8.16. Considerem la transformació inversa de l'homografia T de l'exemple 8.15. Si

$$w = Tz = \frac{z-i}{z+i},$$

resulta que l'homografia $Sw = T^{-1}w = i\frac{1+w}{1-w}$ aplica el disc unitat conformement en el semiplà superior $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Farem servir ara la transformació S per a resoldre el problema de Dirichlet a Π^+ prenent com a valors

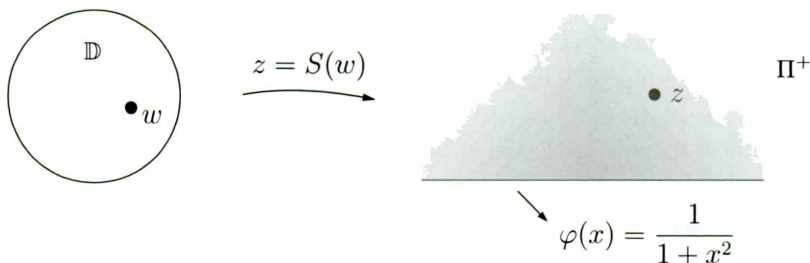


Figura 8.6

a la frontera la funció $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R} = \partial\Pi^+$ (fig.8.6). Comencem per transportar la funció φ a la frontera del disc. Si $w = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, tenim

$$\begin{aligned} \psi(e^{i\theta}) &= \varphi(S(e^{i\theta})) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)^2} = \\ &= \frac{2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta. \end{aligned}$$

Ara hem de resoldre el problema de Dirichlet al disc amb valors frontera $\psi(e^{i\theta})$. Això és molt fàcil i es pot fer directament. Només cal estendre la funció ψ a tot $\mathbb{D}$ posant

$$u(w) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r \cos \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma$$

si $w = re^{i\theta} = \sigma + i\tau$, $0 < r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Notem que no hi ha cap problema amb la determinació de l'argument, perquè $\cos 0 = \cos 2\pi$. La funció satisfà clarament l'equació $\Delta u = 0$ i, per tant, és harmònica i, a més, compleix $u(e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta})$.

Ara n'hi ha prou en transportar la funció u cap al semiplà Π^+ posant

$$\begin{aligned} v(z) &= u(T(z)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(T(z)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{z-i}{z+i} = \\ &= \frac{y+1}{x^2+y^2+2y+1} \quad \text{si } z = x+iy, \end{aligned}$$

de manera que v és harmònica a Π^+ i satisfà $v(x,0) = \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$. $\square$

8.3.2 La raó doble

Considerem quatre punts de l'esfera de Riemann z_1, z_2, z_3, z_4 amb la condició que z_2, z_3, z_4 siguin diferents. Sabem que hi ha una única homografia T tal que $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$. La *raó doble* dels quatre punts donats, (z_1, z_2, z_3, z_4) , es defineix com

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = Tz_1.$$

Així doncs, si tots els punts són finits, resulta

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Si, per exemple, $z_3 = \infty$, llavors és

$$(z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}.$$

La raó doble de quatre punts és invariant per les homografies, tal com es veu a continuació.

Proposició 8.17. *Si z_1, z_2, z_3, z_4 són punts diferents de S^2 i T és una homografia, aleshores hom té*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4).$$

Demostració. Si posem $Sz = (z, z_2, z_3, z_4)$, S és la transformació homogràfica que compleix $Sz_2 = 1$, $Sz_3 = 0$, $Sz_4 = \infty$ i $Sz_1 = (z, z_2, z_3, z_4)$. Per tant, ST^{-1} transforma Tz_2, Tz_3, Tz_4 en $1, 0, \infty$, i això vol dir que

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = ST^{-1}(Tz_1) = (z, z_2, z_3, z_4). \quad \square$$

Per exemple, si z_1, z_2, z_3 són tres punts diferents i volem trobar l'homografia que els transforma en w_1, w_2, w_3 , també diferents, només cal escriure

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$$

i posar w com a funció de z en aquesta igualtat.

És evident que si z_1, z_2, z_3, z_4 estan sobre l'eix real, llavors (z_1, z_2, z_3, z_4) és un número real, i que si tres dels punts anteriors són reals i $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$, llavors el quart punt també ha de ser real.

Combinant aquesta observació amb la proposició 8.11, s'obté immediatament el resultat següent.

Proposició 8.18. *La raó doble de quatre punts (z_1, z_2, z_3, z_4) és real si i només si aquests quatre punts són situats sobre un mateix cercle.*

8.3.3 Simetria

El concepte de punts simètrics respecte d'un eix és ben clar: z, z^* són simètrics respecte de la recta L si L és la mediatriu del segment $[z, z^*]$.

Ara volem considerar la simetria d'un parell de punts respecte d'un cercle qualsevol.

Definició 8.19. *Direm que dos punts z, z^* són simètrics respecte d'un cercle C si i només si existeix una homografia T que transforma C en l'eix real i de manera que $Tz^* = \overline{Tz}$.*

Aquesta definició és independent de T , perquè si S compleix els mateixos requeriments que T , aleshores ST^{-1} és una homografia real i $Sz^* = ST^{-1}(Tz^*)$ també serà el conjugat de $Sz = ST^{-1}(Tz)$, perquè és obvi que les homografies reals conserven la conjugació.

De la definició anterior i l'exemple 8.14 resulta:

Proposició 8.20. *Els punts z, z^* són simètrics respecte del cercle que passa pels punts z_1, z_2, z_3 si i només si*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}. \quad (8.4)$$

Això ens fa veure també que donat un cercle C , per a cada punt z hi ha un únic punt z^* , simètric de z respecte de C . L'aplicació $z \rightarrow z^*$ és una bijecció que s'anomena *simetria respecte de C* .

Les transformacions homogràfiques conserven la simetria, tal com ho afirma el resultat següent.

Proposició 8.21 (Principi de simetria). *Si una transformació homogràfica T transforma un cercle C en un cercle C' , llavors transforma un parell de punts simètrics respecte de C en un parell de punts simètrics respecte de C' .*

Demostració. Si C o C' és l'eix real, el principi de simetria és la definició de punts simètrics. En un altre cas, prenem una homografia S que transformi C en l'eix real i després apliquem el cas anterior a S i a TS^{-1} . $\square$

A continuació, estudiarem les propietats geomètriques de la transformació per simetria respecte de C , $z \rightarrow z^*$, en el cas que C sigui una recta o bé una circumferència del pla complex.

Si C és una recta, podem agafar $z_3 = \infty$ i (8.4) es converteix en:

$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}},$$

que dona lloc a $|z^* - z_2| = |z - z_2|$. Això vol dir que z i z^* equidisten de qualsevol punt $z_2 \in C$, condició que només es compleix si C és la mediatriu del segment $[z, z^*]$.

Si C és una circumferència del pla de centre a i radi r , llavors és fàcil veure que

$$z^* = a + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}. \quad (8.5)$$

En efecte, si $z_1, z_2, z_3 \in C$, es compleix $(z_j - a)(\bar{z}_j - \bar{a}) = r^2$, $j = 1, 2, 3$, i aplicant reiteradament la proposició 8.17, tenim

$$\begin{aligned} \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} &= \overline{(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} = \\ &= \left(\frac{r^2}{z - a}, \frac{r^2}{z_1 - a}, \frac{r^2}{z_2 - a}, \frac{r^2}{z_3 - a} \right) = \\ &= \left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a \right) = \left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3 \right), \end{aligned}$$

que, d'acord amb (8.4), dona (8.5).

De la igualtat (8.5) escrita en la forma

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

es dedueix, d'una banda, $|z^* - a||z - a| = r^2$, i d'una altra, que el quocient $\frac{z^* - a}{z - a}$ és un número positiu.

Si interpretem aquests resultats geomètricament, resulta que els punts a , z i z^* estan alineats i que el producte de distàncies de z a a i de z^* a a és r^2 . Això significa que la simetria respecte de C és la *inversió* de centre a i potència r^2 .

La noció de simetria respecte d'un cercle permet estendre el principi de reflexió respecte de l'eix real a qualsevol recta o circumferència. Si C és un cercle, direm que un domini U és *simètric respecte de C* si $z \in U$ implica $z^* \in U$, on z^* és el punt simètric de z respecte de C . Fent servir transformacions homogràfiques per passar d'un cercle a l'eix real i tenint en compte la proposició 8.21 i l'observació 4.1, hom obté immediatament el resultat següent.

Proposició 8.22 (Principi de reflexió respecte de cercles). *Sigui U un domini simètric respecte d'un cercle C i sigui U^+ una de les regions en què C divideix U . Sigui f una funció holomorfa a U^+ de manera que existeix un cercle C' tal que $f(z)$ tendeix a un punt de C' quan z tendeix a un punt de C . Llavors f té una extensió holomorfa a U que transforma punts simètrics respecte de C en punts simètrics respecte de C' .*

8.4 Automorfismes de dominis simplement connexos

D'acord amb el teorema de Riemann, hi ha essencialment dos tipus de dominis simplement connexos, que són tot el pla $\mathbb{C}$ i el disc unitat $\mathbb{D}$. Té interès, doncs, conèixer el grup dels automorfismes d'aquests dos dominis perquè d'ells es podrà deduir el grup d'automorfismes de qualsevol domini simplement connex U sempre que coneguem una representació conforme de U sobre $\mathbb{D}$.

Comencem per determinar els automorfismes de $\mathbb{C}$. Si considerem una transformació homogràfica $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ i volem que sigui holomorfa a tot $\mathbb{C}$, necessàriament ha de ser $c = 0$, és a dir, T és lineal en z i no constant. Aquestes transformacions formen un grup d'automorfismes de $\mathbb{C}$. Resulta, però, que són tots els automorfismes de $\mathbb{C}$.

Teorema 8.23. *El grup dels automorfismes de $\mathbb{C}$ està format per les transformacions lineals $Tz = az + b$ amb $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

Demostració. Només cal veure que si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és bijectiva i entera, llavors f és lineal en z . Només hi ha dues possibilitats (vegeu l'exemple 5.22): o bé f és un polinomi, o bé el punt ∞ és un punt singular essencial de f .

Si f és un polinomi, ha de ser de primer grau, perquè, si no, f no seria bijectiva i, per tant, $f(z) = az + b$ amb $a, b \in \mathbb{C}$.

Vegem, doncs, que la possibilitat que f tingui una singularitat essencial a l'infinit no es pot donar. Si fos així, la imatge per f de l'entorn reduït de ∞ , $\{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\}$ hauria de ser densa a $\mathbb{C}$, d'acord amb el teorema de Casorati-Weierstrass (teorema 5.6). Però això és impossible perquè en ser f injectiva $f\{z: |z| > 1\}$ no talla l'obert $f\{z: |z| < 1\}$ i, per tant, no pot ser un conjunt dens. $\square$

Podem trobar també els automorfismes del pla completat. Observem, en primer lloc, que una homografia $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, és una transformació $T: S^2 \rightarrow S^2$ bijectiva i holomorfa a tot punt de S^2 . En efecte, T és holomorfa a tot punt z finit $z \neq -d/c$, i com que

$$T(1/z) = \frac{a + bz}{c + dz},$$

veiem que T també és holomorfa a l'infinit, sempre que $c \neq 0$.

Per al cas $c = 0$, o bé per tal de veure que T és holomorfa en el punt $-d/c$ amb valor ∞ , només hem de pensar que una funció f tal que $f(z_0) = \infty$, és holomorfa a z_0 quan $g(z) = 1/f(z)$, amb $g(z_0) = 0$, és holomorfa a z_0 .

El que és interessant és el fet que les homografies són *tots* els automorfismes de S^2 . Per a provar aquest resultat convé fer algunes consideracions generals sobre grups de transformacions d'un domini.

Si U és un obert de S^2 i $G \subset \text{Aut}(U)$ és un grup d'automorfismes de U , direm que G és *transitiu a* U si per a tot parell de punts $z, z' \in U$ existeix una transformació $\varphi \in G$ tal que $\varphi(z) = z'$.

Si $z \in U$, el grup d'*isotropia* de z , A_z , està format per tots els automorfismes de U que deixen z fix, és a dir, $A_z = \{\varphi \in \text{Aut}(U) : \varphi(z) = z\}$. Ens serà útil el resultat següent.

Lema 8.24. *Sigui $G \subset \text{Aut}(U)$ un grup d'automorfismes de l'obert U de S^2 . Supposem que es compleixen les condicions següents:*

a) G és transitiu a U .

b) Existeix almenys un punt $z_0 \in U$ de manera que $A_{z_0} \subset G$.

Lavors hom té $G = \text{Aut}(U)$.

Demostració. Sigui $\varphi \in \text{Aut}(U)$. Com que G és transitiu, existeix una transformació $\psi \in G$ tal que $\psi(z_0) = \varphi(z_0)$. Com que $(\psi^{-1} \circ \varphi)(z_0) = z_0$, resulta que $\psi^{-1} \circ \varphi \in A_{z_0} \subset G$, i això implica que també $\varphi \in G$. $\square$

Teorema 8.25. *El grup d'automorfismes de S^2 coincideix amb el grup de les transformacions homogràfiques.*

Demostració. Apliquem el lema anterior agafant com a grup G el grup de les homografies. És evident que G és transitiu a S^2 . D'altra banda, si $z_0 = \infty$, els automorfismes de S^2 que deixen z_0 fix són els automorfismes del pla, que, d'acord amb el teorema 8.23, són homografies. És a dir, $A_\infty \subset G$. $\square$

Estudiem ara els automorfismes del domini fonamental de la representació conforme, que és el disc unitat $\mathbb{D}$. És fàcil trobar homografies que transformin el disc $\mathbb{D}$ en si mateix. Si $a \in \mathbb{D}$, posem

$$\tau_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

que és una homografia de determinant $1 - |a|^2 \neq 0$. Si $z = e^{i\theta}$, tenim

$$\tau_a(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - a}{1 - \bar{a}e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \cdot \frac{e^{1\theta} - a}{e^{-i\theta} - \bar{a}},$$

de manera que $|\tau_a(e^{i\theta})| = 1$. És a dir, τ_a transforma el cercle unitat en si mateix. Com que $\tau_a(a) = 0$, resulta que $\tau_a(z)$ transforma $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ i també transforma el domini $\{z: |z| > 1\}$ en si mateix.

Si combinem τ_a amb un gir, $z \rightarrow e^{i\alpha}z$, trobem l'homografia

$$\varphi_{a,\alpha}(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

que és un automorfisme de $\mathbb{D}$ per a cada $a \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comprovem ara que les transformacions del tipus $\varphi_{a,\alpha}$ formen un grup. Podem prescindir del gir i multiplicar τ_a per τ_b . Resulta

$$(\tau_a \circ \tau_b)(z) = \frac{(1 + \bar{a}b)z - (a + b)}{-(\bar{a} + \bar{b})z + (1 + \bar{a}b)} = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (8.6)$$

amb $A = 1 + \bar{a}b$, $B = -(a + b)$, $C = -(\bar{a} + \bar{b})$, $D = 1 + \bar{a}b$, de manera que $\bar{A} = D$ i $\bar{B} = C$. Així doncs,

$$(\tau_a \circ \tau_b)(z) = \frac{Az + B}{\bar{B}z + \bar{A}} = \frac{A(z + B/A)}{\bar{A}(1 + (\bar{B}/\bar{A})z)},$$

és a dir, $\tau_a \circ \tau_b = \varphi_{c,\alpha}$ amb $c = -B/A$, $e^{i\alpha} = A/\bar{A}$, $|c| < 1$. La desigualtat $|c| < 1$ és conseqüència del fet que

$$|c| = \left| \frac{B}{A} \right| = \left| \frac{a + b}{1 + \bar{a}b} \right| = |\tau_{-b}(a)| \quad |a|, |b| < 1,$$

i ja hem observat abans que τ_{-b} aplica $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.

Si prenem $b = -a$ a (8.6) es troba en particular que $\tau_{-a} = \tau_a^{-1}$.

També, en aquest cas, el grup $G = \{\varphi_{a,\alpha}: a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ conté tots els automorfismes de $\mathbb{D}$. Per a veure-ho necessitarem un resultat molt útil, conegut amb el nom de lema de Schwarz, que és, de fet, una conseqüència del principi del màxim.

Lema 8.26 (Lema de Schwarz). *Si la funció f és analítica al disc unitat $\mathbb{D}$ i compleix les condicions $|f(z)| \leq 1$, per a tot $z \in \mathbb{D}$, i $f(0) = 0$, llavors hom té $|f(z)| \leq |z|$, per a tot $z \in \mathbb{D}$, i $|f'(0)| \leq 1$. La igualtat $|f(z)| = |z|$ en algun punt de $\mathbb{D}$ o bé $|f'(0)| = 1$ es compleix només quan $f(z) = \alpha z$ amb $|\alpha| = 1$.*

Demostració. Per les hipòtesis, $g(z) = f(z)/z$ és una funció holomorfa a $\mathbb{D}$. Sobre el cercle $\{z: |z| = r\}$ es compleix $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1/r$, i el principi del màxim ens diu que $|g(z)| \leq 1/r$ si $|z| \leq r$. Fent $r \rightarrow 1$ obtenim $|g(z)| \leq 1$, és a dir, $|f(z)| \leq |z|$. A més, $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si val la igualtat en algun punt, la funció $|g(z)|$ agafa el seu màxim i, per tant, ha de ser constant. És a dir, $g(z) = \alpha$ amb $|\alpha| = 1$ i $f(z) = \alpha z$. $\square$

Teorema 8.27. *El grup dels automorfismes del disc unitat està format per les homografies de la forma*

$$\varphi_{a,\alpha}(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Demostració. Apliquem el lema 8.24 al grup G format per les transformacions $\varphi_{a,\alpha}$. És un grup transititiu perquè si $a, b \in \mathbb{D}$, hom té $(\tau_{-b} \circ \tau_a)(a) = b$. Comprovem que el grup d'isotropia de l'origen està contingut a G .

Si $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ és bijectiva i holomorfa i $\varphi(0) = 0$, pel lema de Schwarz ha de ser $|\varphi(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Però aplicant el mateix lema a φ^{-1} també ha de ser $|z| \leq |\varphi(z)|$, per a $z \in \mathbb{D}$. Així doncs $|\varphi(z)| = |z|$, i el mateix lema de Schwarz ens diu que, en aquest cas, és $\varphi(z) = e^{i\alpha}z$ per a algun $\alpha \in \mathbb{R}$. És a dir, $\varphi = \varphi_{0,\alpha} \in G$. $\square$

Exemple 8.28. Sigui $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funció holomorfa qualsevol i fixem un punt $a \in \mathbb{D}$. Posem $w = \tau_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ i $z = \tau_a^{-1}(w)$. Llavors la funció de w , $g(w) = \frac{f(\tau_a^{-1}(w)) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(\tau_a^{-1}(w))}$, és holomorfa a $\mathbb{D}$ i compleix $|g(w)| \leq 1$ i $g(0) = 0$, pel teorema 8.27. El lema de Schwarz dóna, per tant, $|g(w)| \leq |w|$, és a dir,

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Fent $z \rightarrow a$ en la desigualtat anterior, resulta

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}, \quad a \in \mathbb{D}.$$

Ara la igualtat es compleix en algun punt si i només si f és un automorfisme del disc unitat. $\square$

Exemple 8.29. Si $a_1, a_2, \dots, a_N$ són punts de $\mathbb{D}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, la funció $B(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^N \frac{z-a_j}{1-\bar{a}_jz}$, que s'obté multiplicant les transformacions $\tau_{a_j}(z)$ i $e^{i\alpha}$, s'anomena *producte de Blaschke* de grau N . La funció B té les propietats següents:

- i) B és holomorfa a $\mathbb{D}$ i contínua a $\bar{\mathbb{D}}$ (de fet, és holomorfa al disc de centre 0 i radi igual a $\min\{\frac{1}{|a_j|} : j = 1, \dots, N\}$).
- ii) $|B(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

iii) B s'anul·la exactament en els punts $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$.

Si una funció f compleix i), ii) i iii), llavors f ha de ser igual a B , tret del factor de mòdul 1, $e^{i\alpha}$. En efecte, només cal observar que tant f/B com B/f seran funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ i contínues a $\overline{\mathbb{D}}$ i per ii), i pel principi del màxim hauran de complir $|f(z)/B(z)| \leq 1$ i $|B(z)/f(z)| \leq 1$ per a $z \in \mathbb{D}$. Així, f/B ha de ser una constant de mòdul 1. $\square$

En l'exemple 8.15 hem vist que l'homografia $Tz = \frac{z-i}{z+i}$ transforma el semiplà $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ en el disc unitat $\mathbb{D}$. El grup d'automorfismes d'aquest semiplà estarà format, doncs, per les transformacions

$$T^{-1} \circ \varphi_{a,\alpha} \circ T, \quad a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R},$$

on $T^{-1}z = i\frac{1+z}{1-z}$. Procedim ara a determinar explícitament els automorfismes de Π^+ .

Considerem, en primer lloc, una homografia $Sz = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, i imposem-hi la condició que transformi l'eix real en si mateix. És clar que això passa si a, b, c, d són reals, és a dir, si l'homografia és real. Però aquesta condició també és necessària perquè els coeficients a, b, c, d quedaran determinats per un sistema d'equacions lineals amb coeficients reals si $Sx \in \mathbb{R}$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Com que a, b, c, d estan determinats tret d'un factor, podem suposar que $ad - bc = \pm 1$, i es veu finalment que S transforma el semiplà Π^+ en si mateix quan $ad - bc = 1$, condició que implica $\operatorname{Im} \frac{ai+b}{ci+d} > 0$. És clar, doncs, que el conjunt d'homografies reals $Sz = \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ formen un grup G d'automorfismes de Π^+ .

Teorema 8.30. *El grup dels automorfismes del semiplà superior $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ coincideix amb el grup G de les homografies reals de determinant 1.*

Demostració. Apliquem altra vegada el lema 8.24. G és transitiu perquè per a tot $w = a + ib \in \Pi$ l'homografia de G , $Tz = a + bz$ transforma i en w .

Vegem ara que el grup d'isotropia del punt i està contingut a G . Només cal veure que aquest grup d'isotropia està format per homografies. Ara bé, la transformació

$$S \longrightarrow T^{-1} \circ S \circ T \quad \text{amb} \quad Tz = \frac{z-i}{z+i}$$

és un isomorfisme entre el grup d'isotropia de l'origen a $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ i el grup d'isotropia del punt i a $\operatorname{Aut}(\Pi^+)$. El primer grup, tal com hem vist en la prova del teorema 8.27, està format per girs, i si S és un gir, llavors $T^{-1} \circ S \circ T$ és una homografia. $\square$

8.5 El problema de Dirichlet i el problema de Neumann al semiplà

En aquesta secció utilitzarem les transformacions homogràfiques per traslladar els problemes de Dirichlet i de Neumann del disc al semiplà, utilitzant la invariància d'aquests problemes enfront de transformacions conformes (secció 7.11).

En primer lloc, i com a exemple per a il·lustrar el camí que seguirem, podem retrobar la solució del problema de Dirichlet al disc fent servir només la propietat de la mitjana. Sigui $\varphi \in C(\mathbb{T})$ i busquem una funció $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$ amb $\Delta u = 0$ i $u|_{\mathbb{T}} = \varphi$. Fixat un punt $a \in \mathbb{D}$, considerem l'homografia

$$\tau_a(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z},$$

la qual sabem (secció 8.4) que transforma $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ i $\mathbb{T}$ en $\mathbb{T}$. Si u és la solució que busquem, la funció $u \circ \tau_a$ ha de ser harmònica a $\mathbb{D}$ i sobre $\mathbb{T}$ prendrà els valors donats per $\varphi(\tau_a(t))$. Per la propietat de la mitjana serà

$$(u \circ \tau_a)(o) = u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(\tau_a(z)) |dz|.$$

Fent el canvi de variable $w = \tau_a(z)$, $z = \tau_a^{-1}(w)$, resulta $|dz| = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w|^2} |dw|$ i

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}w|^2} \varphi(w) |dw|$$

i recuperem el fet que u ha de ser la integral de Poisson de φ .

Passem ara al semiplà superior $\Pi^+ = \{z = x + iy: y > 0\}$. Comencem observant que essent Π^+ no acotat no es pot aplicar el principi del màxim per demostrar la unicitat de solució del problema de Dirichlet, el qual ara es formula de la manera següent:

A partir de la dada $\varphi \in C(\mathbb{R})$ es tracta de trobar una funció $u \in C(\overline{\Pi^+})$, u harmònica a Π^+ tal que $u|_{\mathbb{R}} = \varphi$.

Per exemple, si $\varphi(x) = 0$, hom té les dues solucions $u_1 \equiv 0$ i $u_2(x, y) = y$.

Tanmateix, sí que hi ha unicitat si ens limitem a solucions acotades. És a dir, el problema $\Delta u = 0$ a Π^+ , $u|_{\mathbb{R}} = \varphi$ té com a màxim una solució *acotada* a Π^+ i contínua a $\overline{\Pi^+}$, perquè si u_1, u_2 són dues solucions, $u_1 - u_2$ és harmònica i acotada a Π^+ i val 0 a $\mathbb{R}$, i d'aquí es dedueix que $u_1 - u_2 = 0$ a Π^+ . Això és conseqüència del principi de simetria (vegeu l'exercici 10 del capítol 7) i del teorema de Liouville per a funcions harmòniques.

Vegem ara com es pot obtenir la solució del problema de Dirichlet a Π^+ .

En l'apartat 7.6.2 s'ha vist que el nucli de Poisson del disc $P_{\mathbb{D}}(z, w)$ és la part real de $\frac{1}{2\pi} \frac{1+z\bar{w}}{1-z\bar{w}}$:

$$P_{\mathbb{D}}(z, w) = \operatorname{Re} \frac{1 + z\bar{w}}{1 - z\bar{w}} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\bar{w}|^2}, \quad |z| < 1, \quad |w| = 1.$$

Prenem $w = 1$ i considerem la funció $\phi(z) = \frac{1+z}{1-z}$ que té part real positiva si $|z| < 1$. Si $\operatorname{Re} w \geq 0$, el punt z donat per $\frac{1+z}{1-z} = w$, és a dir, $z = \frac{w-1}{w+1}$ compleix $|z|^2 = \frac{1+|w|^2-2\operatorname{Re} w}{1+|w|^2+2\operatorname{Re} w}$, $1 - |z|^2 = \frac{4\operatorname{Re} w}{|1+w|^2}$ i, per tant, $|z| < 1$. La transformació ϕ és, doncs, una representació conforme de $\mathbb{D}$ en el semiplà $\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$. Interpretant ϕ com a definida a $\mathbb{C}^*$, ϕ és un homeomorfisme de $\overline{\mathbb{D}}$ a $\{w: \operatorname{Re} w \geq 0\} \cup \infty$, l'eix imaginari $w = it$ essent la imatge de $\mathbb{T} \setminus \{1\}$.

La transformació $S(z) = i \frac{1+z}{1-z}$ transforma, per tant, $\mathbb{D}$ en Π^+ i $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ en $\mathbb{R}$. La transformació inversa és $z = \frac{w-i}{w+i}$.

Si $z = \frac{w-i}{w+i}$ i $e^{it} = \frac{x-i}{x+i}$, hom té

$$1 - |z|^2 = \frac{4 \operatorname{Im} w}{|w + i|^2}, \quad |e^{it} - z|^2 = \frac{4|w - x|^2}{|1 + iw|^2(1 + x^2)} \quad \text{i} \quad dt = \frac{2 dx}{1 + x^2}.$$

Això significa que la fórmula de Poisson al disc esdevé per al semiplà

$$u(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} w}{|w - x|^2} u(x) dx$$

i suggereix que, donada una funció φ contínua i acotada a $\mathbb{R}$, la solució del problema $\Delta u = 0$, $u|_{\mathbb{R}} = \varphi$ ha de ser

$$u(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} w}{|w - x|^2} \varphi(x) dx. \quad (8.7)$$

Així, el nucli de Poisson del semiplà és $P_{\Pi^+}(w, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im} w}{|w - x|^2}$ i es pot comprovar directament que la funció u , transformada de Poisson de φ , definida per (8.7) és harmònica a Π^+ i compleix

$$\lim_{\substack{w \rightarrow x \\ w \in \Pi^+}} u(w) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(vegeu l'exercici 15 de la secció 8.11).

Podem aprofitar els mateixos càlculs per a trobar la solució del problema de Neumann al semiplà superior; és a dir, resoldre

$$\Delta u = 0 \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{amb } \varphi \in C(\mathbb{R}).$$

Aquí $-\frac{\partial}{\partial y}$ és la derivada respecte del vector unitari normal a $\mathbb{R} = \partial\Pi^+$.

Introduïm v, ψ sobre $\mathbb{D}$ i $\mathbb{T}$ mitjançant la transformació S , és a dir,

$$v(z) = u(S(z)) = u(w), \quad \psi(e^{it}) = \varphi(S(e^{it})) = \varphi(x).$$

Com que la transformació inversa $w \xrightarrow{S^{-1}} \frac{w-i}{w+i}$ té derivada $\frac{2i}{(w+i)^2}$ que té per mòdul $\frac{2}{|w+i|^2} = \frac{2}{1+x^2}$, quan $w = x$, i com que S a més preserva els angles, hom té

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{2}{1+x^2} \frac{\partial v}{\partial r}(e^{it}).$$

Per tant, $\frac{\partial v}{\partial r}(e^{it}) = \frac{1+x^2}{2}\psi(e^{it})$, i, pel teorema 7.32, la solució del problema de Neumann al disc és

$$v(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log}|z - e^{it}| \frac{\partial v}{\partial r}(e^{it}) dt.$$

Transportant la integral arribem a

$$u(w) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Log} \left[\frac{4(w-x)^2}{|1+iw|^2} (1+x^2) \right] \varphi(x) dx$$

i, tret d'una constant, queda

$$u(w) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{Log} \frac{|w-x|}{|1+iw|} \right) \varphi(x) dx. \quad (8.8)$$

També ara es comprova directament que la funció u , definida per (8.8) és harmònica a Π^+ i compleix $-\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (vegeu l'exercici 15 de la secció 8.11).

8.6 Corbes de nivell

Si f és una funció analítica i z_0 un punt en el qual $f'(z_0) \neq 0$, llavors $w = f(z)$ és una representació conforme d'un entorn de z_0 sobre un entorn de $w_0 = f(z_0)$.

Una manera d'entendre les propietats de f és visualitzant el comportament de la representació conforme donada per f , d'una manera semblant a com la gràfica d'una funció de variable real ens informa del comportament de la funció. Aquesta visualització del comportament de $w = f(z)$ es pot obtenir considerant les corbes imatge per f de les rectes paral·leles als eixos de coordenades, i també les corbes de nivell de les funcions $\operatorname{Re} f(z)$ i $\operatorname{Im} f(z)$ (fig. 8.7).

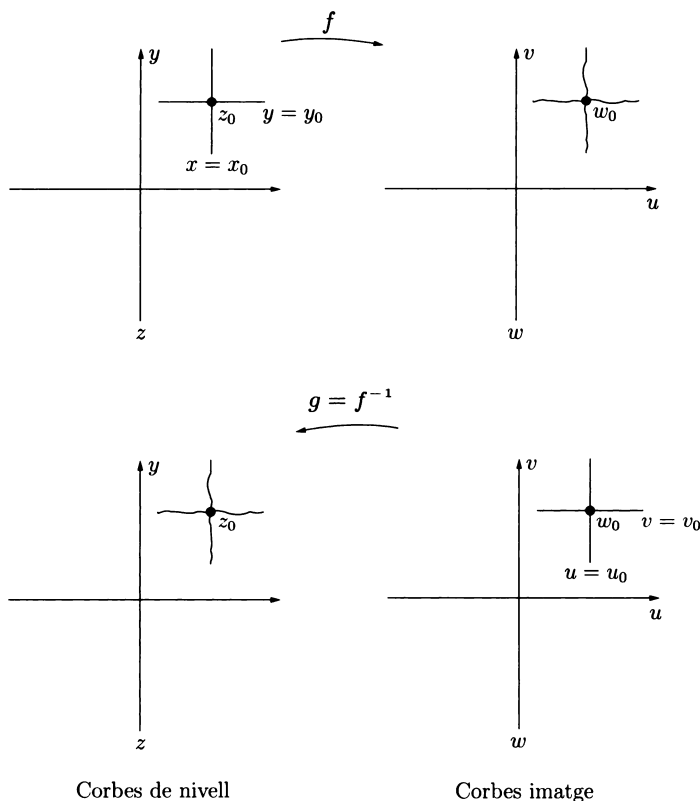


Figura 8.7

Suposem, doncs, que $w = f(z)$ és una representació conforme del domini U del pla $z = x + iy$ sobre el domini U' del pla $w = u + iv$ i posem $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ i $w_0 = f(z_0) = u_0 + iv_0$. Sigui també $g = f^{-1}$ la transformació conforme de U' sobre U , inversa de f .

Les rectes $x = x_0$, $y = y_0$ donen un sistema de coordenades ortogonals al voltant del punt z_0 . Les seves imatges són les corbes $y \rightarrow (u(x_0, y), v(x_0, y))$

i $x \rightarrow (u(x, y_0), v(x, y_0))$, respectivament, les quals es tallen perpendicularment en el punt w_0 . Aquestes dues corbes, lligades a la representació conforme f , es poden considerar també com uns “eixos” de coordenades ortogonals al voltant de w_0 .

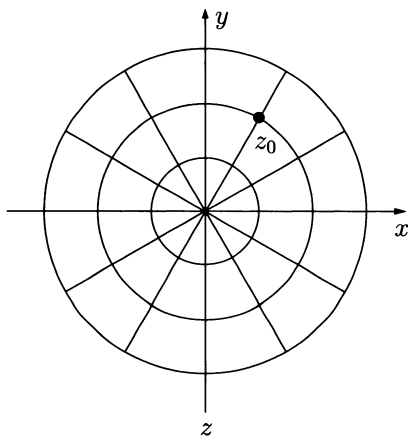


Figura 8.8

Si ara partim de les rectes $u = u_0, v = v_0$ en el pla w , les seves imatges per g són les corbes del pla z ,

$$\begin{aligned} v &\longrightarrow g(u_0, v) = \{z : u(z) = u_0\} \\ u &\longrightarrow g(u, v_0) = \{z : v(z) = v_0\}, \end{aligned}$$

és a dir, són les corbes de nivell de les funcions u i v , les quals també es tallen perpendicularment en el punt z_0 , ja que $g = f^{-1}$ també és conforme.

Alguns exemples de determinació de corbes de nivell són els següents:

- A) La funció $w = \text{Log } z$ és una representació conforme del pla z menys la semirecta $(-\infty, 0]$ sobre la banda $-\pi < v < \pi$ del pla w .

Les corbes de nivell $u = \text{Log } |z| = u_0$ són circumferències de centre l'origen de coordenades, i les corbes $v = \text{Arg } z = v_0$ són semirectes que surten de l'origen. Aquestes corbes són les imatges de les rectes $u = u_0$ i $v = v_0$ per la funció $z = e^w$ (fig. 8.8).

- B) Les corbes de nivell de la funció $w = z^2$ són les corbes $u = x^2 - y^2 = u_0$ i $v = 2xy = v_0$. Les equacions $x^2 - y^2 = u_0$ representen hipèrboles

que tenen per asímptotes les bisectrius dels quadrants, i les equacions $2xy = v_0$ corresponen a hipèrboles amb asímptotes els eixos de coordenades (fig. 8.9).

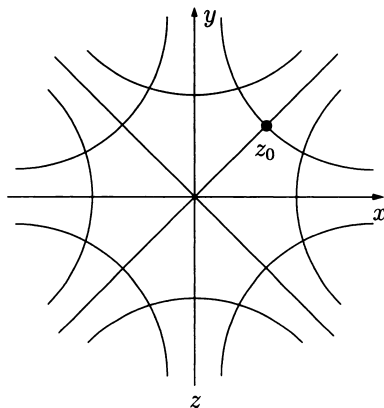


Figura 8.9

Pel que fa a les corbes de nivell de $z = \sqrt{w}$, com que són les corbes imatge per $w = z^2$ de $x = x_0$ i $y = y_0$, hom obté

$$u = x_0^2 - y_0^2, \quad v = 2x_0y_0$$

$$u = x^2 - y_0^2, \quad v = 2xy_0,$$

que equivalen a

$$v^2 = 4x_0^2(x_0^2 - u) \quad \text{i} \quad v^2 = 4y_0^2(y_0^2 + u),$$

les quals són paràboles del pla w , que tallen l'eix u en els punts x_0^2 i $-y_0^2$, respectivament. Els focus d'aquestes paràboles són sempre l'origen de coordenades, ja que corresponen als punts $(0, -4x_0^2/4 + x_0^2)$ i als punts $(0, 4y_0^2/4 - y_0^2)$ (fig. 8.10).

- C) Busquem ara les corbes de nivell de la transformació $w = \text{Log} \frac{z-1}{z+1}$. Es tracta, per a cada punt z_0 , de les corbes

$$\text{Log} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = u_0, \quad \text{Arg} \frac{z-1}{z+1} = v_0, \quad \text{amb } u_0 + iv_0 = w_0 = \text{Log} \frac{z_0-1}{z_0+1}.$$

Si posem $\tau = \tau(z) = \frac{z-1}{z+1}$, les corbes de nivell buscades són les antiimatges per τ de les corbes de nivell de $\text{Log} \tau$, és a dir, de la família de

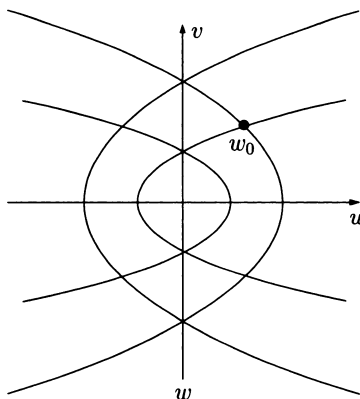


Figura 8.10

circumferències de centre l'origen i de la família de semirectes que surten de l'origen en el pla τ . Com que $\tau(1)=0$, $\tau(-1)=\infty$, les semirectes que surten de l'origen en el pla τ provenen de la família de circumferències del pla z centrades a l'origen i que passen pels punts -1 i 1 .

Les circumferències concèntriques amb centre a l'origen del pla τ provenen de les circumferències d'equació

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \rho, \quad \rho > 0, \quad (8.9)$$

que han de ser perpendiculars a les que passen per -1 i 1 . S'anomenen *circumferències d'Apol·loni* amb punts límit -1 i 1 , i atenent l'equació (8.9) es veu que són el lloc geomètric dels punts tals que la raó de distàncies als punts -1 i 1 és constant (fig. 8.11).

Aquest conjunt doble de circumferències que, com hem dit, són les corbes de nivell de $\text{Log} \frac{z-1}{z+1}$, s'anomenen *cercles de Steiner* amb punts límit -1 i 1 .

8.7 Transformacions conformes elementals

D'acord amb el teorema de Riemann, donats dos dominis del pla U i U' , simplement connexos i diferents de $\mathbb{C}$, sempre hi ha una representació conforme de U sobre U' . A l'hora de trobar, de manera efectiva, una representació conforme entre aquests dominis, sempre podem procedir de la manera següent:

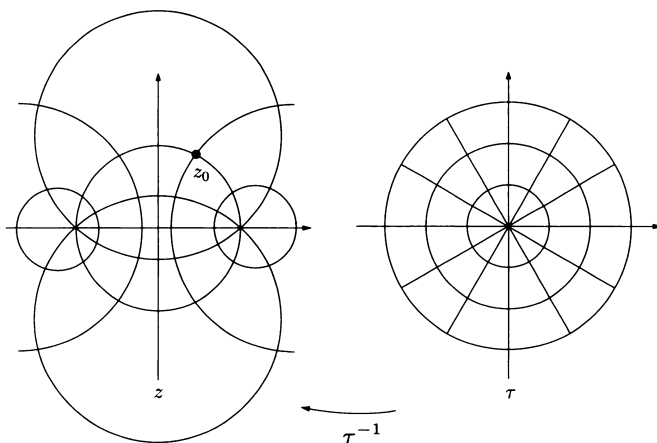


Figura 8.11

busquem primer una representació de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$ i després representem conformement $\mathbb{D}$ sobre U' . Així doncs, el problema queda reduït a trobar representacions conformes de dominis simplement connexos sobre $\mathbb{D}$. Per a aconseguir-ho tenim a la nostra disposició, almenys, les transformacions homogràfiques, que hem estudiat detalladament, i les funcions elementals e^z , $\log z$, z^α ($\alpha \in \mathbb{R}$, fixat), $\sin z$, etc. L'objectiu d'aquesta secció és fer veure, a través d'alguns exemples, com es poden representar sobre el disc $\mathbb{D}$ alguns dominis elementals amb l'ajuda d'aquestes funcions.

En primer lloc, convé recordar que el disc $\mathbb{D}$ i el semiplà $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ són conformement equivalents a través de l'homografia $Tz = i\frac{1+z}{1-z}$. En efecte, T transforma $-1, i, 1$ en els punts $0, -1, \infty$, respectivament. És a dir, transforma la circumferència unitat en l'eix real. Com que $T(0) = i$, T transforma $\mathbb{D}$ en Π^+ . Així doncs, tant és transformar un domini U en el disc $\mathbb{D}$ com en el semiplà Π^+ .

Alguns exemples de transformacions elementals són els següents:

A) La transformació $z \rightarrow z^p$ amb $0 < p < 2$ aplica el semiplà superior Π^+ en la regió $U = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < \infty, 0 < \theta < p\pi\}$. En particular, podem passar de qualsevol sector

$$S_\alpha = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < \infty, 0 < \theta < \alpha\}$$

al semiplà Π^+ mitjançant la transformació $z \rightarrow z^{\pi/\alpha}$ (fig. 8.12).

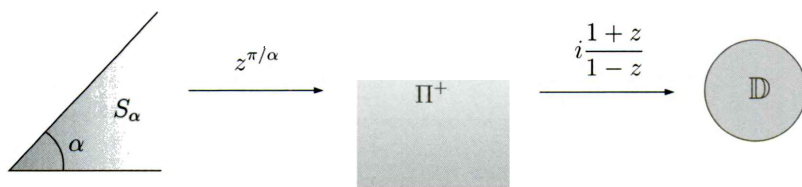


Figura 8.12

B) Un altre tipus de dominis elementals són les bandes.

Fent servir girs, dilatacions i translacions, que són transformacions homogràfiques particulars, podem suposar que tenim una banda B d'amplitud 2π ; posem

$$B = \{z = x + iy: -\pi < y < \pi\}.$$

La funció exponencial $z \rightarrow e^z$ transforma B en el domini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$, el qual es pot representar sobre el semiplà $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ amb la transformació $z \rightarrow \sqrt{z}$, i des d'aquest semiplà podem fer un gir fins a Π^+ i després passar al disc.

Naturalment, si el punt de partida és el disc o el semiplà i volem anar a parar a una banda, haurem de fer servir la funció $\operatorname{Log} z$ que transforma el pla menys la semirecta $(-\infty, 0)$ en B (fig. 8.13).

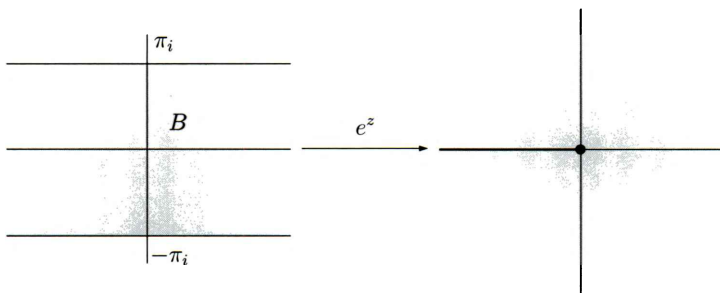


Figura 8.13

C) El fet que les homografies conservin la família de cercles del pla fa que siguin útils a l'hora de transformar en el disc unitat un domini limitat per arcs de cercle. Per exemple, considerem un semidisc

$$U = \{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

i mirem com el podem transformar conformement en un disc o un semiplà.

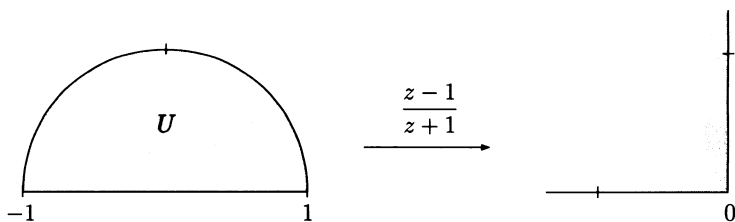


Figura 8.14

Observem que no serveix l'aplicació $z \rightarrow z^2$, ja que només obre U a la regió $\mathbb{D} \setminus \{[0, \infty)\}$. En canvi, l'homografia $Tz = \frac{z-1}{z+1}$, que compleix $T(-1) = \infty$, $T(1) = 0$, $T(i) = i$, $T(0) = -1$, transforma U en el segon quadrant, i d'aquest passem a $\Pi^- = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$ aplicant $z \rightarrow z^2$ (fig. 8.14).

D) Vegem ara quina utilitat poden tenir les funcions trigonomètriques en la representació conforme. Si en comptes de considerar una banda tal com hem fet a B) partim d'una semibanda $S = \{z = x + iy: x > 0, -\pi < y < \pi\}$, no podem fer servir la funció e^z perquè només obtindríem la part de $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$ que està fora de $\mathbb{D}$. Si, fent servir una semblança, partim de la semibanda S_0 ,

$$S_0 = \{z = x + iy: 0 < x < \pi/2, y > 0\},$$

podem passar a un quadrant gràcies a la funció $\sin z$ (fig. 8.15):

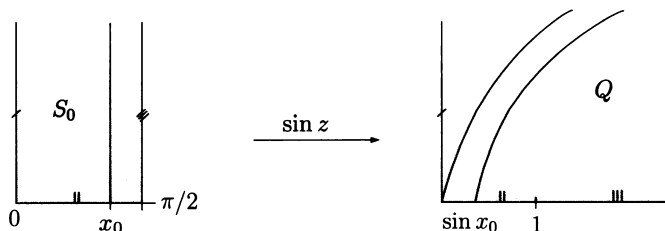


Figura 8.15

* La funció $\sin z$ transforma conformement la semibanda S_0 en el primer quadrant, $Q = \{z = x + iy, x > 0, y > 0\}$.

Per tal de provar aquesta afirmació comencem per recordar les fórmules de l'apartat 2.2.5:

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \operatorname{sh} y$$

si $z = x + iy$, les quals ens diuen que si $z \in S_0$, llavors $\sin z \in Q$. Analitzem primer l'acció de $\sin z$ sobre la frontera de S_0 . Quan $x = 0$, $y > 0$, tenim $\sin z = i \operatorname{sh} y$, i com que $\operatorname{sh} y$ va creixent de 0 a $+\infty$ quan $0 < y < +\infty$, $\sin z$ recorre l'eix imaginari positiu sobre aquest tros de la frontera de S_0 . Si $y = 0$, $0 < x < \pi/2$, és clar que $\sin z$ va creixent de 0 a 1. Finalment, com que $\sin(\pi/2 + iy) = \operatorname{ch} y$, la part de frontera de S_0 formada per $x = \pi/2$, $y > 0$ va a parar a $(1, +\infty)$. Així doncs, la frontera de S_0 es transforma, per $\sin z$, en la frontera de Q .

Vegem ara que cada punt de Q procedeix d'un únic punt de S_0 .

La semirecta vertical $x = x_0$, $0 < x_0 < \pi/2$, $y > 0$ es transforma per $\sin z = w = \sigma + i\tau$ en el tros de la hipèrbola

$$\frac{\sigma^2}{\sin^2 x_0} - \frac{\tau^2}{\cos^2 x_0} = 1$$

que cau dins de Q , ja que $\sigma = \sin x_0 \cdot \operatorname{ch} y$ i $\tau = \cos x_0 \cdot \operatorname{sh} y$. Ara, donat un punt $a + ib$, $a > 0$, $b > 0$ de Q , hem de resoldre l'equació $\sin z = a + ib$. Amb aquesta finalitat agafem x , $0 < x < \pi/2$ de manera que $a + ib$ estigui sobre la hipèrbola d'equació

$$\frac{\sigma^2}{\sin^2 x} - \frac{\tau^2}{\cos^2 x} = 1,$$

prenent com a valor de $\sin x$ el punt de tall amb l'interval $(0, 1)$ de la hipèrbola que passa per $a + ib$, i després triem $y > 0$ de manera que $a = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$, $b = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$.

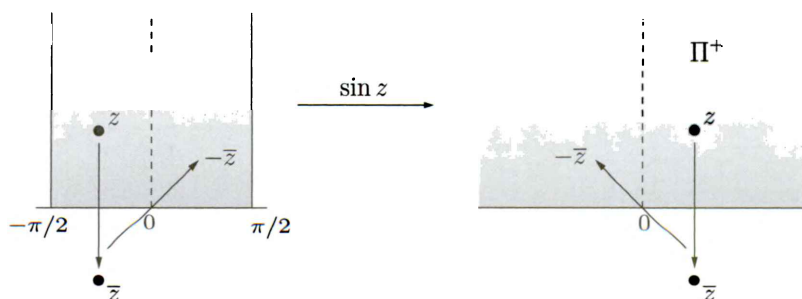


Figura 8.16

Hem vist, doncs, que $z \rightarrow \sin z$ és bijectiva (i holomorfa) de S_0 sobre Q . Si tenim en compte que $\sin(-\bar{z}) = -\overline{\sin z}$, es veu (fig. 8.16) que $\sin z$ transforma la semibanda $S_1 = \{z = x + iy: -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$ en el semiplà Π^+ . Observem que la funció $\sin z$, a diferència de les que havíem considerat fins ara,

no transforma una recta en una recta o una circumferència, sinó que hem vist que les rectes verticals passaven a hipèrboles.

E) De vegades una funció f es pot donar sota una forma que fa difícil veure que és una representació conforme, és a dir, una funció injectiva en un domini, però un canvi en l'expressió de f la pot reduir a combinació de transformacions més conegudes. Un exemple interessant d'aquesta situació és el següent:

Prenem la funció $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots$ i la considerem al disc unitat $\mathbb{D}$, que és el disc en el qual és convergent la sèrie de potències que defineix f . Observem que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. La qüestió és si f és injectiva a $\mathbb{D}$. En aquest cas, tenim

$$f(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2},$$

perquè $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ és la sèrie derivada de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, si $|z| < 1$. Finalment podem escriure

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

i obtenim una expressió de f com a composició de transformacions elementals ben conegudes.

Com que $z \rightarrow \frac{1+z}{1-z}$ transforma $\mathbb{D}$ en el semiplà $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$, $z \rightarrow z^2/4$ obre aquest semiplà a tot el pla menys l'eix real negatiu i finalment traslladem $1/4$ cap a l'esquerra, resulta que f representa conformement el disc $\mathbb{D}$ sobre el domini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ (fig. 8.17).

La funció f s'anomena *funció de Koebe*.

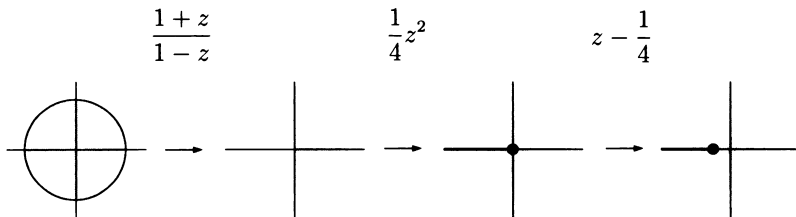


Figura 8.17

F) A l'últim exemple considerarem una regió que no és simplement connexa a $\mathbb{C}$ però que sí que ho és si ens la mirem a l'esfera de Riemann S^2 . Com que les homografies són transformacions conformes de S^2 a S^2 , no hi ha cap problema a considerar aquest tipus de dominis.

Agafem com a domini U el complementari a l'esfera de Riemann d'un segment, per exemple $U = S^2 \setminus [-1, 1]$. L'homografia $z \rightarrow \frac{z+1}{z-1}$ transforma U en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; a continuació, fent servir $z \rightarrow \sqrt{z}$ passem al semiplà de la dreta, $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ i, finalment, l'homografia $z \rightarrow \frac{z-1}{z+1}$ ens porta al disc unitat $\mathbb{D}$ (fig. 8.18). Així, U es transforma en $\mathbb{D}$ per la funció

$$\varphi(z) = w = \frac{\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} - 1}{\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + 1},$$

la qual, es pot escriure també en la forma

$$w = z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \in U. \quad (8.10)$$

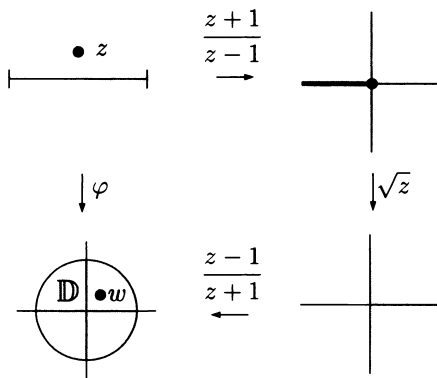


Figura 8.18

La inversa d'aquesta transformació, que passa de $\mathbb{D}$ a U , és

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right). \quad (8.11)$$

Si indiquem per $\mathbb{D}^* = \{z \in S^2: |z| > 1\}$, l'exterior del disc unitat, tenim $w \in \mathbb{D}$ si i només si $1/w \in \mathbb{D}^*$ i, per tant, la funció de (8.11) transforma també $\mathbb{D}^*$

en U ($w \in \mathbb{D}$ i $1/w \in \mathbb{D}^*$ van a parar al mateix punt de U per (8.11)). Si partim d'un punt $z \in U$, el punt corresponent $w \in \mathbb{D}$ s'obté de (8.10) agafant el signe positiu a $\sqrt{z^2 - 1}$. Si canviem de signe, obtenim el punt $z + \sqrt{z^2 - 1}$, que és de $\mathbb{D}^*$, perquè $(z - \sqrt{z^2 - 1})(z + \sqrt{z^2 - 1}) = 1$.

Busquem ara quines són les imatges per la transformació (8.11) de la família de circumferències amb centre a l'origen i radi més petit que 1, $\{w: |w| = r < 1\}$ i dels radis de la circumferència unitat, $\{w: w = re^{i\theta}, 0 \leq r < 1\}$ (fig. 8.19).

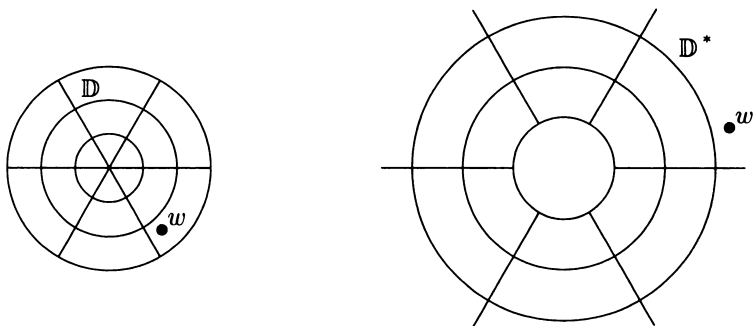


Figura 8.19

Notem que seran les mateixes corbes que les imatges per (8.11) de les circumferències $\{w: |w| = r, r > 1\}$ i de les semirectes $\{w: w = re^{i\theta}, r > 1\}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Amb aquesta finalitat prenem coordenades polars, $w = re^{i\theta}$, en les quals el punt $z = x + iy$ donat per (8.11) s'expressa com

$$x = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta; \quad y = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta.$$

Eliminant θ en aquestes dues equacions, queda

$$\frac{4x^2}{[(r + 1/r)]^2} + \frac{4y^2}{[(r - 1/r)]^2} = 1,$$

que és l'equació d'una el·lipse en el pla (x, y) amb eixos $r + 1/r$ i $r - 1/r$.

Si ara partim d'un radi, $\arg w = \theta$, i eliminem r , resulta:

$$\frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$$

que és l'equació d'una hipèrbola. Observem que la imatge d'un radi $w = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$ és la part d'una branca d'aquesta hipèrbola que cau dins de la

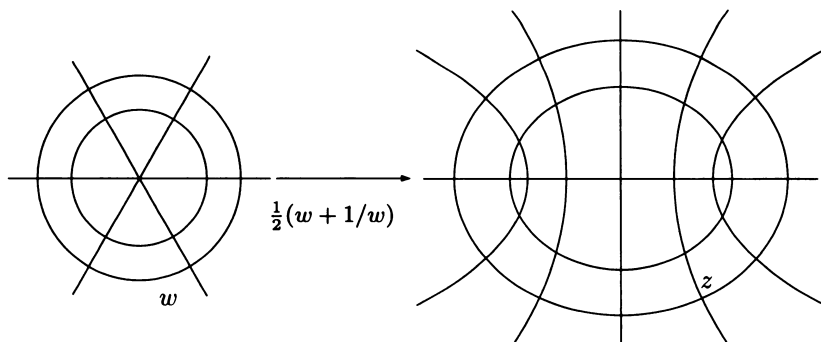


Figura 8.20

circumferència $x^2 + y^2 = 1$, i la imatge de la semirecta $w = re^{i\theta}$, $r > 1$ és la part de la branca d'hipèrbola que cau a fora (fig. 8.20).

La transformació (8.11), anomenada *aplicació de Jowkowsky*, és molt important en les aplicacions de la representació conforme, especialment en la mecànica de fluids.

8.8 Representació conforme de polígons

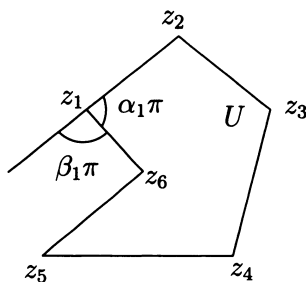


Figura 8.21

Considerem un domini simplement connex U que tingui per frontera una corba poligonal de Jordan tancada (fig. 8.21). Direm que U és un *polígon*. Suposem que té n costats i que els vèrtexs són els punts $z_1, z_2, \dots, z_n$. A cada vèrtex z_k suposem que l'angle interior del polígon té mesura $\alpha_k \pi$ amb $0 < \alpha_k < 2$. Llavors l'angle exterior corresponent val $\beta_k \pi$ amb $\beta_k = 1 - \alpha_k$ i $-1 < \beta_k < 1$. Es pot argumentar fàcilment que $\beta_1 + \dots + \beta_n = 2$.

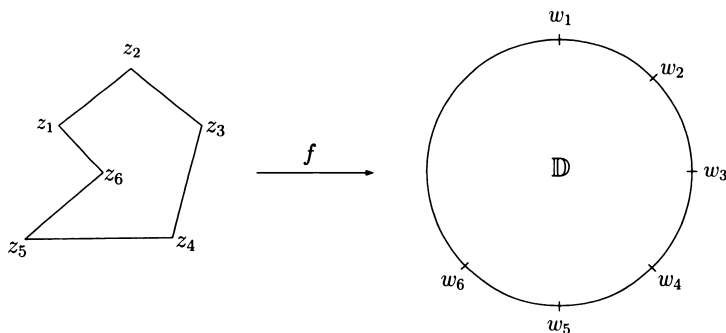


Figura 8.22

Considerem ara una representació conforme f del polígon U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$. Sabem, pel teorema 8.7', que f s'estén contínuament a $\bar{U}$ i que transforma de manera injectiva cada costat de la poligonal en un arc de $\partial\mathbb{D}$ (fig. 8.22).

Ara volem estudiar més detalladament, la representació f i trobar una fórmula explícita per a la inversa de f . Serà més còmode treballar al semiplà, i per aquesta raó passem del disc $\mathbb{D}$ al semiplà superior Π^+ amb una homografia i denotem per $a_1, \dots, a_n$ els punts de la recta real que corresponen als punts $w_k = f(z_k)$, $k = 1, \dots, n$. Observem que podria ser que un d'aquests fos el punt de l'infinit. Sigui finalment g la representació del semiplà Π^+ sobre U (fig. 8.23).

La forma explícita de la funció g està donada pel resultat següent.

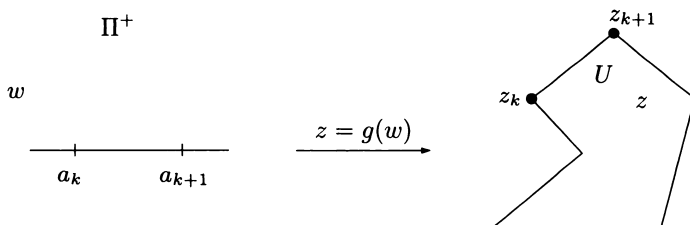


Figura 8.23

Teorema 8.31 (Fórmula de Schwarz-Christoffel). *Sigui g una representació conforme del semiplà superior Π^+ sobre un polígon de n costats que té angles interiors de mides $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ i siguin $a_1, a_2, \dots, a_n$ els punts de l'eix*

real que g aplica en els vèrtexs del polígon. Llavors, fixat un punt $w_0 \in \bar{\Pi}^+$, existeixen constants complexes A, B de manera que

$$g(w) = A \int_{w_0}^w (w - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (w - a_n)^{\alpha_n - 1} dw + B, \quad w \in \Pi^+. \quad (8.12)$$

Observació 8.3. La integral de (8.12) es pot prendre al llarg del segment rectilini que va de w_0 a w , però de fet la integral és la mateixa per a qualsevol camí que vagi de w_0 a w , sense sortir de Π^+ , com a conseqüència del teorema de Cauchy.

Abans de procedir a la demostració d'aquesta fórmula, observem que (8.12) és equivalent a

$$g'(w) = A(w - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (w - a_n)^{\alpha_n - 1}, \quad w \in \Pi^+ \quad (8.13)$$

i també a

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = \frac{\alpha_1 - 1}{w - a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n - 1}{w - a_n}, \quad w \in \Pi^+. \quad (8.14)$$

L'equivalència de (8.12), (8.13) i (8.14) es veu immediatament per derivació i integració. La igualtat (8.14) ens indica que la funció g''/g' té un pol simple amb residu $\alpha_k - 1$ al voltant del punt a_k . Seguirem aquest camí per a provar el teorema.

Demostració. Tal com acabem de dir, estudiarem el comportament de la funció g''/g' , que és holomorfa a Π^+ , al voltant d'un punt a_k amb $g(a_k) = z_k$.

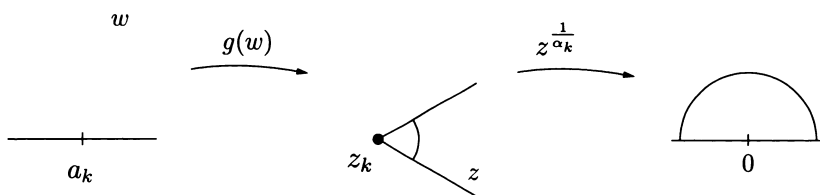


Figura 8.24

Considerem la funció $f_k(w) = (g(w) - z_k)^{1/\alpha_k}$, holomorfa a Π^+ (fig. 8.24). Quan w tendeix a l'eix real, $\text{Im } f_k(w)$ tendeix a 0 i, pel principi de simetria, (proposició 8.10) $f_k(w)$ és holomorfa en un entorn de a_k amb $f_k(a_k) = 0$ i $f'_k(a_k) \neq 0$. (Si $f'_k(a_k)$ fos 0, hi hauria punts del semiplà inferior que anirien a parar per g a l'interior del polígon.)

Per tant, podem posar $f_k(w) = (w - a_k)\varphi_k(w)$ amb $\varphi_k(w)$ holomorfa en un entorn de a_k i $\varphi_k(a_k) \neq 0$. Agafant una determinació de $\varphi_k(w)^{\alpha_k}$, sigui $h_k(w)$, tenim

$$f_k(w) = (g(w) - z_k)^{1/\alpha_k} = (w - a_k)\varphi_k(w)$$

i, elevant a la potència α_k ,

$$g(w) - z_k = (w - a_k)^{\alpha_k} h_k(w), \quad w \in \Pi^+,$$

on $h_k(w)$ és holomorfa en un entorn de a_k i $h_k(a_k) \neq 0$.

Ara, calculant, resulta $\frac{g''(w)}{g'(w)} =$

$$= \frac{\alpha_k(\alpha_k - 1)(w - a_k)^{\alpha_k - 2} h_k(w) + 2\alpha_k(w - a_k)^{\alpha_k - 1} h'_k(w) + (w - a_k)^{\alpha_k} h''_k(w)}{\alpha_k(w - a_k)^{\alpha_k - 1} h_k(w) + (w - a_k)^{\alpha_k} h'_k(w)}$$

i

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} - \frac{\alpha_k - 1}{w - a_k} = \frac{2\alpha_k h'_k(w) + (w - a_k) h''_k(w) - (\alpha_k - 1) h'_k(w)}{\alpha_k h_k(w) + (w - a_k) h'_k(w)}. \quad (8.15)$$

El segon membre de (8.15) és una funció holomorfa a l'entorn de a_k perquè $h_k(a_k) \neq 0$. Així doncs, g''/g' té una singularitat aïllada en el punt a_k que és un pol simple amb residu $\alpha_k - 1$.

Finalment, estudiem la funció g''/g' al voltant del punt de l'infinit. Podem suposar que l'infinit es correspon amb un punt z_0 de la frontera del polígon que no és un vèrtex, que és el mateix que si el considerem com un vèrtex amb angle π , o sigui, amb $\alpha_0 = 1$. Llavors, raonant com abans, trobarem que g serà de la forma

$$g(w) = z_0 + \frac{1}{w} + h(w)$$

amb $h(w)$ analítica en un entorn de l'infinit. Calculant, surt

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} = -\frac{2}{w} + \dots \quad \text{si } w \in \Pi^+ \text{ i } |w| \text{ és prou gran.}$$

Per tant, g''/g' és analítica i nul·la a l'infinit.

Considerem ara la funció $\varphi(z)$ definida al semiplà inferior per la igualtat

$$\varphi(z) = \overline{g(\bar{z})},$$

de manera que φ és holomorfa a Π^- . Si ara fixem un interval (a_k, a_{k+1}) i apliquem a φ el gir que transforma el costat $[z_k, z_{k+1}]$ del polígon en un segment de l'eix real, llavors aquesta funció girada de φ serà la reflexió de g

a través de (a_k, a_{k+1}) en el sentit que empalmarà contínuament amb g sobre aquest interval. Si això ho fem per a cada $k = 1, \dots, n$, trobem diverses “reflexions” de g al semiplà inferior que són diferents i, per tant, diverses extensions a Π^- de g' i g'' . Ara bé, el valor de g''/g' és el mateix per a totes aquestes extensions perquè aplicar un gir és multiplicar per una constant de mòdul 1. Així, resulta que g''/g' és una funció meromorfa a tota l'esfera de Riemann que té un pol simple a cada a_k amb residu $\alpha_k - 1$ i analítica i nul·la a l'infinit. Ha de ser, per tant, de la forma (8.14). $\square$

La prova anterior es basa en l'exposició de [7].

Convé fer alguns comentaris a la fórmula de Schwarz-Christoffel.

a) La fórmula (8.12) val també quan g és la representació conforme del disc $\mathbb{D}$ sobre U substituint els punts $a_1, \dots, a_n$ pels punts $w_1, \dots, w_n$ tals que $g(w_k) = z_k$. Per veure-ho, només cal fer servir una homografia entre el disc i el semiplà per arribar a la conclusió que g''/g' té un pol simple a cada w_k amb residu $\alpha_k - 1$, i és nul·la a l'infinit, i després raonar per reflexió sobre els arcs que $w_1, \dots, w_n$ determinen a la circumferència unitat. Així, s'arriba a la fórmula corresponent a (8.14) i després només cal integrar dues vegades.

b) Per entendre més bé la fórmula (8.12) podem pensar que quan $w = x$ recorre l'eix real, $g(x)$ ha de recórrer la frontera de U , que és una línia polygonal. Per veure que això és així, és millor derivar i mirar la fórmula (8.13), la qual dóna lloc a la igualtat (fig. 8.25)

$$\arg g'(x) = \arg A + (\alpha_1 - 1) \arg(x - a_1) + \dots + (\alpha_n - 1) \arg(x - a_n).$$

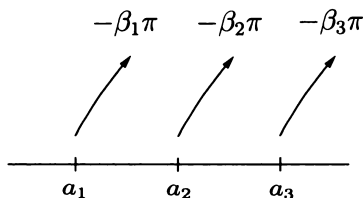


Figura 8.25

Com que $\arg g'(x)$ és el valor del gir que hem efectuat per passar de l'eix real a la frontera del polígon, veiem que a cada interval (a_k, a_{k+1}) , $\arg g'(x)$ es manté constant i que, per tant, estem recorrent un segment rectilini, però quan “saltem” per a_k , $\arg g'(x)$ té un augment de $-(\alpha_k - 1)\pi = \beta_k\pi$, és a dir, “saltem” al costat següent del polígon.

c) Amb les consideracions que hem fet és molt fàcil de donar ara la demostració del teorema de Riemann en el cas, molt particular, que el domini simplement connex U sigui l'interior d'un triangle.

Suposem que U és l'interior d'un triangle de vèrtexs z_1, z_2, z_3 i angles interiors $\alpha_k \pi$, $k = 1, 2, 3$ amb $0 < \alpha_k < 2$ i $\sum_1^3 \alpha_k = 1$ i considerem la funció

$$g(w) = \int_{w_0}^w (w - a_1)^{\alpha_1 - 1} (w - a_2)^{\alpha_2 - 1} (w - a_3)^{\alpha_3 - 1} dw \quad w_0, w \in \Pi^+, \quad (8.16)$$

on $a_1 < a_2 < a_3$ són tres punts arbitraris de $\mathbb{R}$. És clar que g és holomorfa a Π^+ i a més s'estén contínuament a $\mathbb{R}$ perquè $1 - \alpha_k < 1$, $k = 1, 2, 3$ i la integral que defineix g és convergent al voltant de a_k . Però, a més, aquesta integral és convergent en el punt de l'infinit, perquè fent el canvi $w \rightarrow 1/w$ queda com a valor de (8.16)

$$- \int_{1/w_0}^{1/w} (1 - a_1 w)^{\alpha_1 - 1} (1 - a_2 w)^{\alpha_2 - 1} (1 - a_3 w)^{\alpha_3 - 1} dw,$$

que és contínua a l'origen. A b) ja hem fet veure que, quan $w = x$ recorre l'eix real (incloent-hi l'infinit), $g(x)$ recorre la vora d'un triangle, T , de vèrtexs $g(a_1)$, $g(a_2)$ i $g(a_3)$ i angles interiors $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. A més, la funció g ha de ser injectiva a Π^+ i ha d'aplicar Π^+ a l'interior del triangle T .

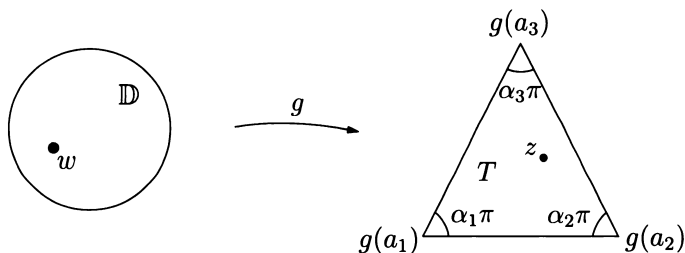


Figura 8.26

Per a provar aquesta última afirmació substituïm el semiplà Π^+ pel disc unitat $\mathbb{D}$ i apliquem el principi de l'argument (teorema 5.27). Encara que la funció g no és holomorfa a $\mathbb{D}$, sinó que només és holomorfa a $\mathbb{D}$ i contínua a $\mathbb{D}$, el teorema 5.27 es pot aplicar fent un argument de pas al límit per a les funcions $g_r(w) = g(rw)$, $r < 1$. Com que per a cada punt $z \in T$ és $\text{Ind}(\partial T, z) = 1$, resulta que g pren el valor z exactament una vegada a $\mathbb{D}$ (fig. 8.26).

Tornant al semiplà, hem vist que la funció g transforma conformement Π^+ en l'interior de T . Ara bé, el triangle T i el triangle de partida de vèrtexs z_1, z_2, z_3 tenen els mateixos angles i, per tant, són semblants. Fent servir, doncs, una semblança després de g , passarem conformement de Π^+ al triangle donat, U .

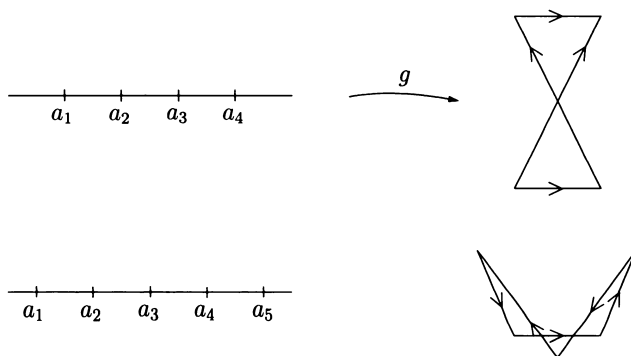


Figura 8.27

Observació 8.4. Si volguéssim fer el mateix raonament però partint de 4 o més punts $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sobre l'eix real, i angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ amb $\sum \alpha_k = n-2$, no podríem garantir que la funció g corresponent ens donés una representació conforme de Π^+ sobre l'interior d'un polígon de n costats, perquè podria ser que quan x recorre l'eix real, $g(x)$ recorregués la vora d'un polígon que no fos una corba de Jordan, sinó que tingués autointerseccions (fig. 8.27). No hi ha cap manera senzilla de saber, a partir dels angles α_k i els punts a_k , si la corba poligonal que dona la funció $g(x)$ de (8.12), quan $x \in \mathbb{R}$, és simple o no.

d) La fórmula de Schwarz-Christoffel es pot estendre al cas d'un domini no acotat U limitat per una poligonal que, ara, no serà tancada. Un dels casos més freqüents en les aplicacions és quan $z_0 = \infty$ és un vèrtex de la poligonal i la representació $g: \Pi^+ \rightarrow U$ compleix $g(\infty) = \infty$. Llavors les fórmules (8.12), (8.13) i (8.14) valen sense cap terme corresponent al punt de l'infinit. Una manera de veure-ho és fent tendir a ∞ un dels paràmetres a_k .

Exemple 8.32. Suposem que tenim $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ amb $0 < \alpha_k < 2$ i $\sum_{k=1}^3 \alpha_k = 1$. Fixem la mida i la posició d'un triangle d'angles $\alpha_k \pi$, $k = 1, 2, 3$, triant el segment $[0, 1]$ com un costat i sigui z_3 el tercer vèrtex. La representació conforme g de Π^+ sobre el triangle que compleixi $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = z_3$

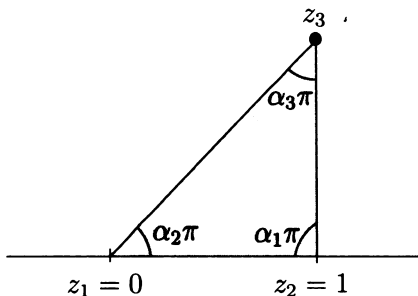


Figura 8.28

serà de la forma

$$g(w) = A \int_0^w (w+1)^{\alpha_1-1} \cdot w^{\alpha_2-1} \cdot (w-1)^{\alpha_3-1} dw + B.$$

Observem que, en aquest cas, podem triar lliurement els punts de l'eix real a_1 , a_2 , a_3 que es corresponen per g amb els vèrtexs del triangle, perquè sempre hi ha una homografia de Π^+ a Π^+ que transforma una terna real en una altra terna real (fig. 8.28).

Com que $g(0) = 0$, és $B = 0$ i A queda determinada perquè $g(1) = z_3$, però la integral anterior no es pot calcular explícitament. $\square$

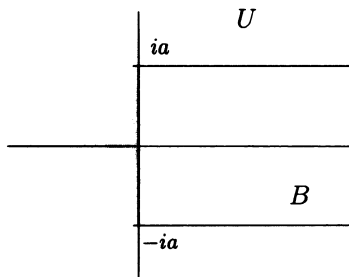


Figura 8.29

Exemple 8.33. Considerem ara la representació conforme g de Π^+ en el domini U que sigui l'exterior d'una banda horitzontal $B = \{z = x + iy : x > 0, -a < y < a\}$ amb $a > 0$. La poligonal que limita U té els vèrtexs $\pm ia$ amb angle interior de $-3\pi/2$ i un vèrtex a l'infinit amb angle 0. Agafem g amb

$g^{-1}(-ia) = -1$, $g^{-1}(ia) = 1$, $g^{-1}(0) = 0$ (fig. 8.29). Resulta

$$g(w) = A \int_0^w (w^2 - 1)^{1/2} dw.$$

Aquesta integral es pot calcular (exercici) i dóna

$$g(w) = A(w\sqrt{1-w^2} + \arcsin w).$$

Com que $g(1) = A\pi/2 = ia$, s'obté

$$g(w) = i \frac{2a}{\pi} (w\sqrt{1-w^2} + \arcsin w). \quad \square$$

Exemple 8.34. Representació conforme del semiplà Π^+ sobre el mateix semiplà al qual se li ha tallat un segment vertical $[0, ia]$, $a > 0$.

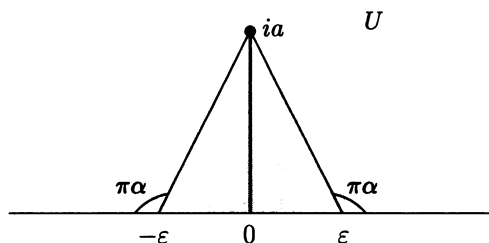


Figura 8.30

En aquest cas, mirem el domini U com a límit dels dominis que s'obtenen en treure de Π^+ un triangle de base molt petita, 2ε , i altura a , quan $\varepsilon \rightarrow 0$ (fig. 8.30). Per al complementari del triangle, la representació g_ε que compleix $g_\varepsilon(-1) = -\varepsilon$, $g_\varepsilon(0) = ia$, $g_\varepsilon(1) = \varepsilon$ és

$$g_\varepsilon(w) = A \int_0^w (w+1)^{\alpha-1} \cdot w^{2-2\alpha} \cdot (w-1)^{\alpha-1} dw + B$$

(vegeu la figura per al significat de α). Ara, quan $\varepsilon \rightarrow 0$, és $\alpha \rightarrow 1/2$ i queda

$$g(w) = A \int_0^w \frac{w}{\sqrt{w^2-1}} dw + B,$$

que dóna

$$g(w) = A\sqrt{w^2-1} + B$$

amb $g(-1) = B = 0$, $g(0) = ia = A$. Per tant,

$$g(w) = a\sqrt{w^2-1}. \quad \square$$

8.9 Representació conforme de dominis doblement connexos

El teorema de Riemann dóna tots els models de dominis simplement connexos, mòdul representació conforme: són el pla $\mathbb{C}$ i el disc unitat $\mathbb{D}$.

Què passa si considerem ara els dominis del pla de grau de connexió n amb $n \geq 2$? (definició 1.14). És a dir, quins són els models dels dominis n -connexos, tret d'una representació conforme? Aquest problema és molt més complicat i no el tractarem aquí. Ens referirem, bàsicament, al cas $n = 2$ sense fer-ne, però, un estudi complet.

Considerem, doncs, dominis doblement connexos, és a dir, dominis simplement connexos als quals s'ha fet un forat. Els exemples més senzills d'aquests dominis són les corones. Si $0 < r < R$, posem $C(r, R) = C(0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ per a una corona circular centrada a l'origen. Es pot demostrar que tot domini doblement connexés conformement equivalent a una corona o a un disc puntejat o al pla puntejat (que també es poden considerar com a corones). Si tenim en compte aquest resultat, que no demostrarem, se'n desprèn que per tal de classificar els dominis doblement connexos n'hi ha prou, bàsicament, de classificar les corones centrades a l'origen. Contràriament al que hom podria pensar, en general, dues corones diferents no són equivalents.

Si dilatem la corona $C(r, R)$ per un factor $\alpha > 0$, és a dir, apliquem la transformació $z \rightarrow \alpha z$, obtenim la corona $C(r', R')$ amb $r' = \alpha r$, $R' = \alpha R$ (fig. 8.31).

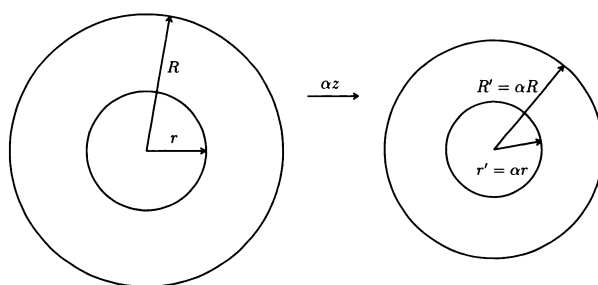


Figura 8.31

Aquestes dues corones són, evidentment, equivalents i els seus radis compleixen

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}. \quad (8.17)$$

És clar que la condició (8.17) és suficient per tal que $C(r, R)$ i $C(r', R')$ siguin equivalents, ja que només cal prendre $z \rightarrow \alpha z$ amb $\alpha = r'/r = R'/R$. El que és més interessant és el fet que aquesta condició suficient també és necessària, tal com ho prova el resultat següent.

Teorema 8.35. *Dues corones $C(r, R)$ i $C(r', R')$ són conformement equivalents si i només si es compleix la condició*

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}.$$

Demostració. Aplicant dilatacions podem suposar $r = r' = 1$. Sigui $w = f(z)$ una representació conforme de $C(1, R)$ sobre $C(1, R')$ i vegem que $R = R'$.

Per la proposició 8.9, quan $|z| \rightarrow 1$ a $C(1, R)$, ha de ser $|f(z)| \rightarrow 1$, o bé $|f(z)| \rightarrow R'$. Canviant f per R'/f , si és necessari, podem aconseguir que $|f(z)| \rightarrow 1$ quan $|z| \rightarrow 1$ i, en conseqüència, $|f(z)| \rightarrow R'$ quan $|z| \rightarrow R$ (fig. 8.32).

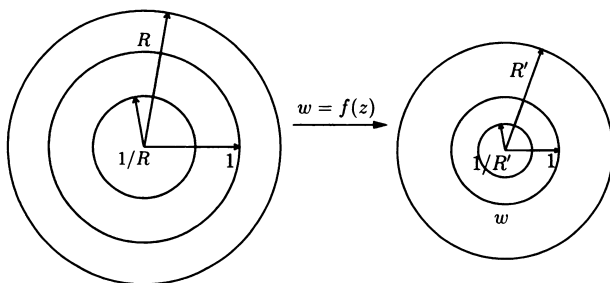


Figura 8.32

Ara, aplicant el principi de reflexió (proposició 8.22) respecte del cercle unitat podem estendre f a una representació conforme de la corona $\{z: 1/R < |z| < 1\}$ sobre la corona $\{w: 1/R' < |w| < 1\}$. Si tornem a aplicar aquest principi, ara respecte del cercle de radi $1/R$, estendrem f a una representació de $\{z: \frac{1}{R^2} < |z| < \frac{1}{R}\}$ sobre $\{w: \frac{1}{(R')^2} < |w| < \frac{1}{R'}\}$. Reiterant aquest procés obtindrem, per inducció, una representació conforme del disc puntejat $D'(0, R)$ sobre $D'(0, R')$, la qual té l'origen com a singularitat evitable. Arribem, doncs, finalment a una representació conforme, que continuem anomenant f , de $D(0, R)$ sobre $D(0, R')$ que complirà $f(0) = 0$ i que envia el cercle $\{z: |z| = 1\}$ sobre el cercle $\{w: |w| = 1\}$.

Ara, la funció $z \rightarrow \frac{f(Rz)}{R'}$ és una representació conforme del disc unitat $\mathbb{D}$

sobre si mateix que envia el 0 al 0. Per tant, pel teorema 8.27, ha de ser

$$\frac{f(Rz)}{R'} = e^{i\alpha} z, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |z| < 1,$$

o bé

$$f(z) = R' e^{i\alpha} \frac{z}{R}, \quad |z| < R.$$

Prenent $|z| = 1$, que implica $|f(z)| = 1$, s'arriba a $R = R'$. □

El teorema que acabem de provar diu que si considerem la família de corones $C(1, R)$ amb $R > 0$, llavors qualsevol corona del pla és conformement equivalent a una d'aquestes, i dues corones de la família, diferents, no són equivalents entre si.

Altres exemples senzills de dominis doblement connexos són el disc puntejat, $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, i el pla puntejat, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aquests dos dominis no són equivalents entre si i tampoc poden ser equivalents a cap corona, perquè la representació conforme corresponent s'estendria analíticament al punt 0, d'acord amb l'apartat a) del teorema 5.5. Tal com hem dit, es pot demostrar que tot domini del pla doblement connex és conformement equivalent al pla puntejat, o bé al disc puntejat o bé a una corona $C(1, R)$, $R > 1$. Aquest resultat descriu tots els models, mòdul representació conforme, dels dominis d'ordre de connexió igual a 2.

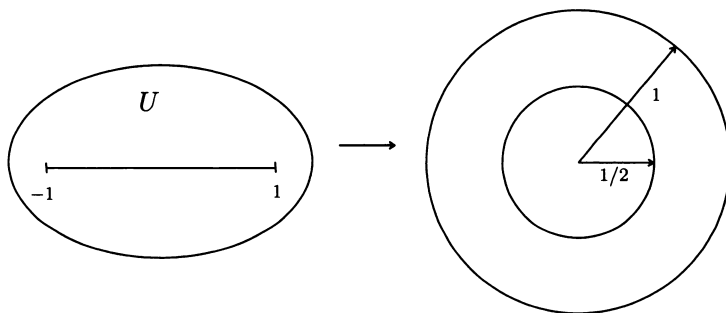


Figura 8.33

Exemple 8.36. Considerem l'el·lipse centrada a l'origen de semieixos $5/2$ i $3/2$ i sigui U l'interior d'aquesta el·lipse menys el segment $[-1, 1]$. D'aquesta manera U és un domini doblement connex, el qual ha de ser, pel que hem dit, conformement equivalent a una corona. L'exemple F) de la secció 8.7 fa veure que aquesta corona serà $C(1/2, 1)$ i que la representació de U sobre la corona està donada per la inversa de l'aplicació de Jowkowsky (fig. 8.33). □

Tal com hem dit al començament d'aquesta secció, la representació conforme de dominis d'ordre de connexió superior a 2 és més complicada. Un resultat que estén d'alguna manera el que hem dit per als dominis doblement connexos és el següent (vegeu [1, pàg. 255]):

Si U és un domini n -connex, llavors U és conformement equivalent a una corona a la qual se li han tret $n - 2$ arcs situats sobre circumferències centrades a l'origen (fig. 8.34).

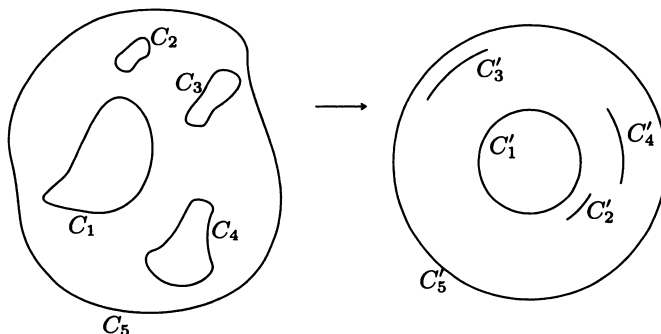


Figura 8.34

Cal pensar, en aquest cas, que hi ha dos contorns fronterers de les components de $\mathbb{C} \setminus U$, que van a parar a les vores de la corona, i els altres contorns van a parar a contorns que han degenerat en un arc.

8.10 Aplicacions de la representació conforme

En aquesta secció donem dues aplicacions de la representació conforme a dos problemes ben diferents.

8.10.1 La projecció de Mercator transversa

El problema que aquí considerem és el problema bàsic de la cartografia, és a dir, la representació de la superfície de la Terra, o d'un tros d'aquesta superfície, sobre un pla. Això és el que fan els mapes i, inicialment, es podria pensar que aquesta representació es fa conservant les distàncies, és a dir, que, tret d'un factor d'escala, la distància entre dos punts sobre la Terra coincideix amb la distància entre els punts corresponents del mapa. Però això és impossible, perquè cap tros d'esfera admet una parametrització isomètrica per un pla. Aquest fet és una conseqüència d'un teorema molt important de geometria

diferencial, que és el teorema egregi de Gauss però, en el cas de l'esfera, també es pot provar amb consideracions més elementals.

Quin tipus de representació dona un mapa, doncs, si no conserva les distàncies? Observem que una representació plana de la Terra que conservés les distàncies també conservaria els angles; doncs bé, les representacions que es fan servir per a fer els mapes conserven precisament els angles, encara que no puguin conservar les distàncies. La idea d'una projecció conforme (és a dir, conservant angles) de la Terra en un pla va ser concebuda per Mercator, i la projecció utilitzada avui en dia és una variant de la projecció de Mercator, anomenada *projecció de Mercator transversa*. Explicarem en què consisteix aquesta projecció i, pel que hem dit, ja es veu que hi pot jugar un paper important la idea de representació conforme.

La projecció de Mercator és una projecció de la Terra sobre un pla, posem de coordenades (x, y) , que compleixi les condicions següents:

- a) És conforme.
- b) Aplica l'equador sobre l'eix de les ordenades, conservant les distàncies entre la realitat i la projecció (sobre l'equador).
- c) Aplica els punts de la Terra de longitud positiva sobre el semiplà de la dreta ($x > 0$) i els punts de latitud positiva sobre el semiplà superior ($y > 0$).

La projecció de Mercator és bona perquè és conforme i perquè els paral·lels els transforma en rectes horitzontals, i els meridians, en rectes verticals. Però té l'inconvenient que, en allunyar-se de l'equador, les distàncies es distorsionen molt. Per aquest motiu ha estat substituïda, en la construcció de mapes, per la projecció de Mercator transversa. La idea d'aquesta projecció és dividir la regió de la Terra compresa entre els dos cercles polars en fusos de 6° d'amplitud i aplicar a cada un d'aquests fusos una projecció de Mercator diferent on el paper de l'equador el fa el meridià central del fus.

Així doncs, considerem la regió R de la Terra compresa entre els dos cercles polars i entre dos meridians que determinin un fus de 6° d'obertura, i sigui m_0 el meridià central d'aquesta regió. Es tracta de trobar una projecció de R sobre el pla (x, y) de manera que és compleixin, bàsicament, les condicions següents:

- a') És conforme.
- b') Aplica el meridià m_0 sobre l'eix de les y .
- c') Sobre el meridià m_0 es conserven les distàncies entre la realitat i la projecció.

Naturalment, cal tenir en compte també uns factors d'escala que ara no considerem.

Per tal de construir aquesta projecció comencem per considerar la Terra com un el·lipsoide de semieixos a , b , de manera que podem parametritzar R en la forma

$$\begin{aligned}x &= a \cos u \cos \lambda \\y &= a \cos u \sin \lambda \\z &= b \sin u,\end{aligned} \quad (\lambda, u) \in V \quad (8.18)$$

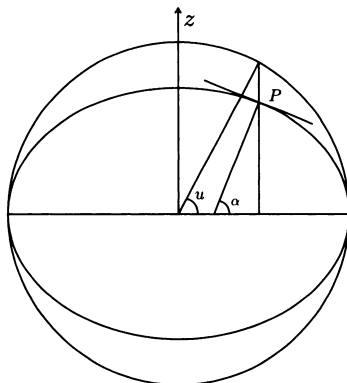


Figura 8.35

on λ representa la longitud del punt $P(x, y, z)$ comptada a partir de m_0 , u és l'angle representat a la figura 8.35, i V és un obert de $\mathbb{R}^2$. Observem que u no és la latitud, φ , de P , però s'hi acosta molt. La latitud és l'angle amb el pla x, y de la perpendicular a l'el·lipsoide per P , i es pot establir fàcilment la relació entre u i φ . Notem també que en el cas d'una esfera, $a = b$, u és la latitud, i la parametrització (8.18) correspon a les coordenades esfèriques.

La funció $(x, y, z) = f(\lambda, u)$ descrita a (8.18), per a $(\lambda, u) \in V$, dóna la regió R com una superfície parametritzada per f . La parametrització f es diu que és conforme si l'aplicació lineal tangent $f'(\lambda, u)$ de $\mathbb{R}^2$ al pla tangent a R en el punt $f(\lambda, u)$ conserva els angles quan es considera a $\mathbb{R}^2$ el producte escalar habitual i en el pla tangent el producte escalar induït pel de $\mathbb{R}^3$. Sabem que f és conforme quan la matriu dels vectors $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ i $\frac{\partial f}{\partial u}$ és múltiple d'una matriu

ortogonal, és a dir, quan la matriu dels seus productes escalars és de la forma

$$h(\lambda, u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.19)$$

on $h(\lambda, u)$ és una funció diferenciable que no s'anul·la en cap punt.

En el nostre cas tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= (-a \cos u \sin \lambda, a \cos u \cos \lambda, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= (-a \sin u \cos \lambda, -a \sin u \sin \lambda, b \cos u), \end{aligned}$$

i la matriu de productes escalars és

$$\begin{pmatrix} a^2 \cos^2 u & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u \end{pmatrix} = a^2 \cos^2 u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tan^2 u + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{pmatrix},$$

que no és de la forma (8.19). Ara bé, si s'introdueix una nova variable l , definida per

$$l = l(u) = \int \sqrt{\tan^2 u + \left(\frac{b}{a}\right)^2} du,$$

i es canvia u per l , resulta que en les coordenades (λ, l) la nova matriu de productes escalars és

$$a^2 \cos^2 u(l) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que sí que és de la forma (8.19). Això vol dir que la nova parametrització de R donada per:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & R \\ (\lambda, L) & \longrightarrow & f(\lambda, l) \end{array}$$

és conforme. La seva inversa $f^{-1}: R \rightarrow V$ també és conforme i aplica el meridià m_0 , que correspon a $\lambda = 0$ sobre l'eix de la variable l . Així, per tal que f^{-1} sigui la projecció de Mercator transversa, falta satisfer la condició b'), de conservació de les distàncies entre dos punts de m_0 i els seus corresponents en el pla.

Amb aquesta finalitat introduïm la notació complexa posant $w = \lambda + il$ per al punt (λ, l) i busquem una funció $F: V \rightarrow \mathbb{C}$ de tal manera que la representació plana de R donada per la funció $F \circ f^{-1}: R \rightarrow \mathbb{C}$ compleixi a'), b') i c'). Això ho aconseguirem si triem F de la manera següent: en primer lloc,

agafem F que sigui holomorfa i, per tant, conforme; en segon lloc, imposem que transformi l'eix imaginari en l'eix imaginari: $F(il) = iy$, si posem $F = x + iy$. Finalment, la conservació de les distàncies sobre m_0 es pot obtenir així:

Per a cada punt P de m_0 és $f^{-1}(P) = il$, on l és el valor del paràmetre que correspon a P . Sigui τ la distància de P a l'equador seguint m_0 , de manera que en variar P , τ és una funció de l , $\tau = \tau(l)$. Aquesta funció no és coneguda explícitament, però és fàcil raonar que és una funció analítica de la variable real l (fig. 8.36).

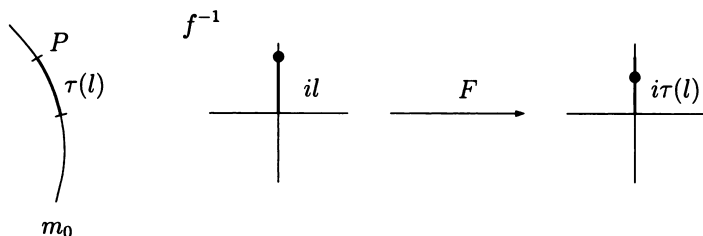


Figura 8.36

Si podem triar la funció F de manera que compleixi $F(il) = i\tau(l)$, és a dir, tal que l'ordenada de $F(il)$ coincideixi amb la distància a l'equador del punt de paràmetres $(0, l)$, tindrem assegurada la propietat b'). El problema, doncs, des del punt de vista de la variable complexa, consisteix a trobar una funció F holomorfa a V coneguda sobre l'eix imaginari a través de $F(il) = i\tau(l)$, on $\tau(l)$ és analítica. La solució a aquest problema, almenys localment, és molt fàcil de trobar perquè $\tau(l)$ estarà donada per una sèrie de potències, posem $\tau(l) = \sum_0^{\infty} c_n l^n$. Ara prenem com a F l'extensió analítica de τ obtinguda substituint l per la variable complexa w , de fet w/i , i definim

$$F(w) = i \sum_0^{\infty} c_n \left(\frac{w}{i} \right)^n,$$

de manera que F és holomorfa i $F(il) = i \sum_0^{\infty} c_n l^n = i\tau(l)$. Es veu, doncs, que la projecció de Mercator transversa depèn fortament de propietats de les funcions analítiques, especialment del fet que aquestes funcions conservin els angles.

Més detalls sobre la construcció anterior es poden trobar en l'article de Joan Girbau: "Si no es pot representar cap terreny a escala, que fan els cartògrafs?" (*Les bases matemàtiques de la civilització tecnològica*, Fundació Caixa de Sabadell, 1999, pàg. 73-81), en el qual es basa la nostra exposició.

8.10.2 Representació conforme i hidrodinàmica

Suposem que volem estudiar el moviment d'un fluid perfecte, incompressible, homogeni i irrotacional que es mou per una regió plana, U , simplement connexa (vegeu l'apartat 7.1.3 per a les nocions generals sobre fluids). Fent servir notació complexa, representarem el camp de velocitats del fluid per una funció $f(z)$, definida per a $z \in U$, i suposarem que la velocitat no varia amb el temps.

Sabem que el fet que el fluid sigui incompressible vol dir que $\operatorname{div}(f) = 0$, és a dir, que es compleix l'equació $u_x + v_y = 0$ si $f = u + iv$. Si γ representa un camí tancat dins de U amb vector normal $\vec{N}$, la fórmula de Green dóna

$$\int_{\gamma} \langle f \cdot \vec{N} \rangle ds = 0,$$

que vol dir que el flux del fluid a través de γ és nul. Aquest fet (equivalent a la incompressibilitat del fluid) s'expressa dient que *no hi ha fonts a U* , és a dir, ni entrades ni sortides de fluid en cap punt de U . Pot ser, però, que hi hagi fonts en punts de la frontera de U .

Com que també suposem que el moviment del fluid és irrotacional, és a dir, $\operatorname{rot}(f) = 0$, fet que es tradueix en l'equació $v_x - u_y = 0$, se sap que la funció $\overline{f}(z) = u - iv$, la conjugada del camp de velocitats, és una funció holomorfa a U . En ser U simplement connex, existeix una primitiva holomorfa F de $\overline{f}$ a U . Si posem $F = \varphi + i\psi$, la relació $F' = \overline{f}$ es tradueix en

$$\vec{\nabla}\varphi = f, \quad \vec{\nabla}^\perp\psi = \overline{f}.$$

La funció φ és, per tant, una *funció potencial* del camp f i la funció holomorfa F s'anomena *potencial complex* d'aquest camp. La funció ψ , que figura a l'ítem d) de l'apartat 7.1.3 però que ara no depèn de t , és harmònica perquè $\psi = \operatorname{Im} F$. Això correspon a l'equació d'Euler $\Delta\psi = -\xi = \operatorname{rot}(f) = 0$. La funció ψ s'anomena *funció de corrent* del fluid. La raó d'aquest nom és la següent: les corbes de nivell de la funció φ són perpendiculars al vector $\vec{\nabla}\varphi = f$. Tal com hem observat en l'apartat 7.1.1, les corbes de nivell d'un parell de funcions harmòniques conjugades són perpendiculars entre si. Per tant, les corbes de nivell de la funció ψ són tangents a f i són, en conseqüència, les trajectòries del camp f que són les trajectòries del fluid o *línies de corrent*.

Ara convé considerar el comportament del fluid a la frontera del domini U . Hem suposat que a U no hi havia fonts; però, tal com hem dit, n'hi pot haver en punts de ∂U . Observem que la paraula *font* té un sentit relatiu perquè tant es pot tractar d'un punt d'entrada de fluid com d'un punt de sortida: depèn del signe del flux del camp f al voltant del punt.

Suposarem que si en tot un arc de ∂U no hi ha cap font, el camp de velocitats f és paral·lel a ∂U al llarg d'aquest arc. Això correspon a la condició de contorn $f \cdot \vec{N} = 0$ si $\vec{N}$ és el vector normal a ∂U . Llavors aquest arc de ∂U es pot considerar com una línia de corrent, i, per tant, la funció de corrent $\psi = \text{Im } F$ haurà de ser constant en aquesta part de ∂U . Un exemple és un fluid que es mou en el semiplà superior $\Pi^+ = \{w: \text{Im } w > 0\}$ amb una font d'entrada a l'origen. La funció de corrent ψ serà una funció harmònica a Π^+ , constant a cada semirecta $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$. Aquesta funció és $c \text{Arg } w$, amb c constant. El potencial complex del fluid serà $F(w) = c \text{Log } w$, $w \in \Pi^+$, i el camp de velocitats és

$$f(w) = \overline{F'(w)} = c \frac{1}{w},$$

que està descrit a l'exemple 3.6 (vegeu la figura 8.37). Aquest camp té una font a l'origen perquè si γ representa la circumferència de centre 0 i radi 1, és $\int_{\gamma} \langle f, \vec{N} \rangle ds = 2\pi c$. El flux del camp f que entra a Π^+ és la integral anterior estesa només a $\gamma \cap \Pi^+$ i val $c\pi$. Si $c > 0$, hi ha una entrada de fluid, i si $c < 0$, una sortida.

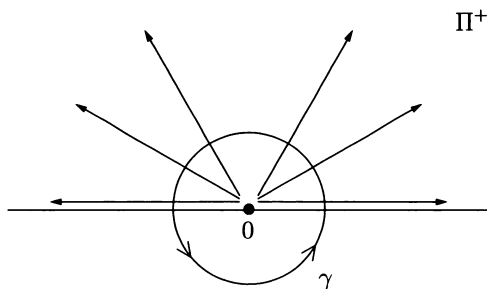


Figura 8.37

Fins i tot en el cas que no hi hagi cap font a la frontera del domini, el fet que ψ sigui harmònica a U i constant a ∂U no determina la funció de corrent. Per exemple en el semiplà superior Π^+ del pla $w = u + iv$, la funció $\psi_1(u, v) = Av$ amb A una constant real és harmònica i nul·la a $\partial \Pi^+$. Correspon al potencial complex $F_1(w) = Aw$. Però també és harmònica i nul·la a la frontera de Π^+ la funció $\psi_2(u, v) = Ae^u \sin v$ que correspon al potencial complex $F_2(w) = Ae^w$. En el primer cas la línia de corrent $\psi_1 = 0$ consisteix en $\partial \Pi^+$ mentre que en el segon cas la línia $\psi_2 = 0$ consta de l'eix real i de les rectes $v = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, que són interiors al domini, i Ae^w és el potencial complex per al flux en una banda d'amplitud π . En molts casos, però, les condicions físiques del problema fan veure que la funció de corrent està determinada pel fet de ser harmònica

al domini i constant a la seva frontera. Quan el domini no és acotat i no hi ha cap font a la frontera una condició analítica que determina la funció de corrent és un comportament correcte en el punt de l'infinit, donat per una condició del tipus $\lim_{|w| \rightarrow \infty} (F(w) - Aw) = 0$, per a alguna constant A on F és el potencial complex.

Suposem que en un domini simplement connex U' tenim un fluid que es mou amb un camp de velocitats f que té un potencial complex $F = \varphi + i\psi$ i sigui g una representació conforme d'un altre domini U sobre U' de manera que transformi la frontera de U en la frontera de U' . Llavors és evident que les funcions harmòniques $\varphi \circ g$ i $\psi \circ g$ es poden interpretar com el potencial de la velocitat i com la funció de corrent d'un flux a la regió U que té potencial complex $F \circ g$. Per exemple considerem $U' = \Pi^+$ i el flux uniforme donat pel potencial complex $F(w) = Aw$, A constant real, del qual ja hem parlat abans, i sigui U el primer quadrant del pla $z = x + iy$, $U = \{z: x, y > 0\}$; llavors la transformació $w = z^2$ aplica conformement U sobre Π^+ i conserva les fronteres. La funció $Az^2 = A(x^2 - y^2 + 2ixy)$ és el potencial complex d'un flux a U que té per funció de corrent $2Axy$. Les línies de corrent són les hipèrboles $xy = c$, c constant (fig. 8.38) i el camp de velocitats és $2A\bar{z} = 2A(x - iy)$ que té per mòdul $2A\sqrt{x^2 + y^2}$. Sempre que considerem en un domini U un flux uniforme, és a dir, que es correspon amb el flux uniforme en el semiplà superior de potencial complex Aw a través d'una representació conforme $g: U \rightarrow \Pi^+$ que transforma ∂U en $\partial \Pi^+$, les línies de corrent a U es poden descriure en termes de la transformació inversa $h = g^{-1}: \Pi^+ \rightarrow U$ per les corbes $\gamma(t) = h(t + ic)$, $t \in \mathbb{R}$, c constant. Això és el que fem en els dos primers exemples següents.

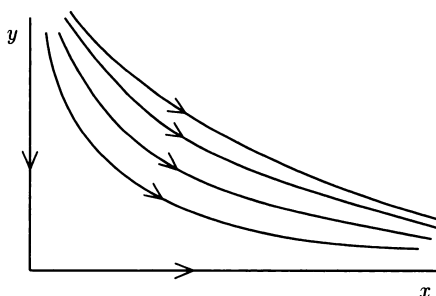


Figura 8.38

Exemple 8.37. Considerem un fluid que es mou uniformement en el semiplà superior en el qual hi ha un obstacle format per un bastó vertical $[0, ia]$, $a > 0$ de manera que no hi hagi cap font sobre l'eix real (fig. 8.39).

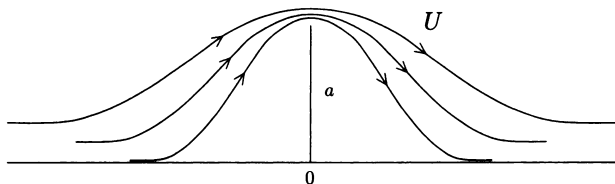


Figura 8.39

En l'exemple 8.34 hem vist que la representació conforme de Π^+ sobre $U = \Pi^+ \setminus [0, ia]$ està donada per la funció

$$h(w) = a\sqrt{w^2 - 1},$$

que envia ∞ a ∞ . Per tant, les línies de corrent són les trajectòries

$$\gamma(t) = h(t + ic) = a\sqrt{(t + ic)^2 - 1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c > 0. \quad \square$$

Exemple 8.38. Estudiem ara el moviment uniforme d'un fluid que es mou horitzontalment i salta un graó d'alçada 1 (fig. 8.40). El domini corresponent és el semiplà superior amb un graó:

$$U = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 1\}.$$

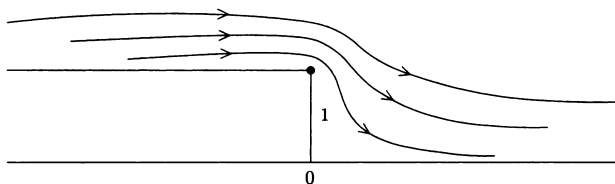


Figura 8.40

Busquem la representació conforme h de Π^+ sobre U amb $h(\infty) = \infty$, $h(-1) = i$, $h(1) = 0$. Aplicant la fórmula de Schwarz-Christoffel amb angles $\alpha_1 = 3\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2$, resulta

$$h(w) = A \int_0^w (w+1)^{\frac{1}{2}} (w-1)^{-\frac{1}{2}} dw + B, \quad A \text{ i } B \text{ constants.}$$

Aquesta integral es pot calcular convertint-la en una integral racional amb el canvi $\frac{w+1}{w-1} = u$ i resulta

$$h(w) = A(\sqrt{w^2 - 1} + \operatorname{Log}(w + \sqrt{w^2 - 1})) + B.$$

Fent servir $h(-1) = i$, $h(1) = 0$ s'obté

$$Ai\pi + B = i, \quad B = 0,$$

és a dir, $A = 1/\pi$, $B = 0$,

Així, les línies de corrent són les trajectòries

$$\gamma(t) = h(t + ic) =$$

$$= \frac{1}{\pi} (\sqrt{(t + ic)^2 - 1} + \text{Log}(t + ic + \sqrt{(t + ic)^2 - 1})), \quad t \in \mathbb{R}, \quad c > 0. \quad \square$$

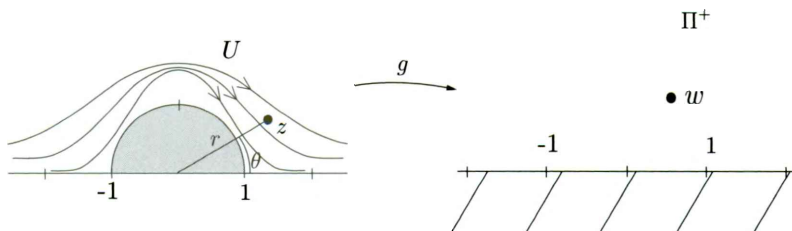


Figura 8.41

Exemple 8.39. Considerem, finalment, el flux uniforme d'un líquid que es mou horitzontalment i troba un obstacle semicilíndric. El model, en aquest cas, el dona el domini $U = \{z \in \Pi^+ : |z| > 1\}$ (fig. 8.41). Aquest domini es pot transformar conformement en Π^+ amb la funció

$$w = g(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

que transforma la frontera de U en l'eix real (exemple F) de la secció 8.7). Prenent coordenades polars en el pla z , $z = re^{i\theta}$, resulta

$$\text{Re } g(r, \theta) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta,$$

$$\text{Im } g(r, e^{i\theta}) = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta,$$

de manera que les línies de corrent són les trajectòries:

$$\text{Im } g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = c, \quad c > 0. \quad \square$$

8.11 Exercicis

1. Siguin D_1, D_2 dos discos del pla i $z_0 \in D_1, w_0 \in D_2$. Trobeu una representació conforme $f: D_1 \rightarrow D_2$ de manera que $f(z_0) = w_0$.
2. Feu servir el lema de Schwarz per a provar que si $f: U \rightarrow U$ és holomorfa on $U = \{z = x + iy: |y| < \pi/2\}$, llavors es compleix $|f'(x)| \leq 1$ per a $x \in \mathbb{R}$.
3. Sigui $f \in H(\mathbb{D})$ amb $f(0) = 1$ i $\operatorname{Re} f \geq 0, z \in \mathbb{D}$. Proveu que es compleix

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Què es pot dir quan alguna de les dues desigualtats anteriors és una igualtat per a algun punt $z \in \mathbb{D}$?

4. Sigui f una funció contínua a $\overline{\mathbb{D}}$ i meromorfa a $\mathbb{D}$ que compleix $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Siguin $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_m$ els zeros i els pols de f a $\mathbb{D}$, respectivament (justifiqueu que n'hi ha només un nombre finit). Si posem $\tau_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ quan $|a| < 1$, proveu que la funció

$$f(z) \cdot \tau_{b_1}(z) \dots \tau_{b_m}(z) \frac{1}{\tau_{a_1}(z)} \dots \frac{1}{\tau_{a_n}(z)} \quad \text{per a } |z| < 1,$$

és una constant de mòdul igual a 1.

5. Sigui $f: \mathbb{D} \rightarrow U$ una transformació conforme de manera que $U = f(\mathbb{D})$ és un domini convex del pla. Proveu que per a cada $0 < r < 1$ el domini $f(D(0, r))$ també és convex.

Indicació: Per a $z_1, z_2 \in D(0, r)$ amb $|z_1| \leq |z_2|$ i $0 < t < 1$ considereu la funció $\varphi(z) = tf(zz_1/z_2) + (1-t)f(z)$.

6. Proveu que una homografia transforma un parell de circumferències concèntriques en un altre parell de circumferències concèntriques i la raó dels radis es manté constant.
7. Sigui $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funció holomorfa amb sèrie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ al voltant de l'origen. Proveu, per inducció, que per a cada $n \in \mathbb{N}$ hi ha un producte de Blaschke, B_n , de grau n (exemple 8.29), que té com a sèrie de Taylor a l'origen

$$B_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n + \dots, \quad b_n \in \mathbb{C}.$$

És a dir, f i B_n tenen els n primers coeficients de la sèrie de Taylor iguals.

8. Trobeu una representació conforme del semiplà superior sobre el domini $U = \mathbb{D} \setminus \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$.
9. Sigui U un domini de Jordan i $f \in C(\overline{U}) \cap H(U)$ de manera que f és injectiva sobre ∂U . Proveu que f és una representació conforme de U sobre $f(U)$ i un homeomorfisme de $\overline{U}$ sobre $\overline{f(U)}$.
Indicació: Utilitzeu el principi de l'argument.
10. Trobeu una representació conforme del semiplà superior sobre el domini exterior a una el·lipse que té per focus els punts 1 i -1 .
11. Sigui Π^+ el semiplà superior i $U = \Pi^+ \setminus \{z = iy : 1 \leq y < +\infty\}$. Proveu que a U es poden definir determinacions contínues de les funcions $\sqrt{1+z^2}$ i $\sqrt{1-z^2}$ i feu-les servir per a provar que la transformació $f(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ aplica conformement Π^+ sobre U .
12. Sigui Q un quadrat centrat a l'origen i $f: \mathbb{D} \rightarrow Q$ una representació conforme de $\mathbb{D}$ sobre Q . Posem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, si $|z| < 1$. Proveu que $c_n = 0$ si n no és de la forma $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.
Indicació: S'ha de complir $f(iz) = if(z)$, per a $z \in \mathbb{D}$.
13. Trobeu una representació conforme del disc unitat sobre la part exterior d'una paràbola amb focus a l'origen i vèrtex en el punt 1.
14. Trobeu una funció u harmònica al disc unitat $\mathbb{D}$ de manera que, a més, compleixi $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} u(z) = 0$ si $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ i $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} u(z) = 1$ si $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$. Proveu que aquest problema té més d'una solució.
15. a) Doneu les hipòtesis precises per tal que la funció u definida per la igualtat (8.7) sigui la solució del problema de Dirichlet al semiplà Π^+ amb valors a la frontera iguals als de la funció φ i demostreu-ho.
b) Feu el mateix per al problema de Neumann a Π^+ amb la funció definida per (8.8).
16. Per a $c > 0$, trobeu l'expressió integral d'una representació conforme del semiplà superior sobre el domini

$$U = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < c\}.$$

En el cas particular $c = 1$, trobeu explícitament la representació conforme $f: \Pi^+ \rightarrow U$ que compleix $f(0) = 0$, $f(1) = \infty$ i $f(\infty) = 1 + i$.

17. Proveu que la funció

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \quad \text{on } 0 < k < 1,$$

defineix una representació conforme del semiplà superior sobre un rectangle. Determineu els vèrtexs d'aquest rectangle en funció dels paràmetres

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proveu que la transformació f^{-1} es pot estendre a una funció meromorfa a tot el pla complex i determineu els zeros i els pols d'aquesta funció.

18. Proveu que les funcions $f_I(z) = \int_0^z (1-\xi^n)^{-2/n} d\xi$, $f_E(z) = \int_0^z (1-\xi^n)^{2/n} \frac{d\xi}{\xi}$ apliquen conformement el disc unitat sobre els dominis interior i exterior, respectivament, d'un polígon regular de n costats.

19. Trobeu una representació conforme del domini $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ en el semiplà inferior que, estesa a $\overline{U}$, deixi fixos els punts -1 i 1 i envii i al 0 .

20. Trobeu una representació conforme de l'òval $U = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - x_0^2| < r^2\}$ amb $x_0 \in \mathbb{R}$ i $0 < x_0 < r$ sobre el disc unitat.

Indicació: Utilitzeu el principi de reflexió.

21. Trobeu una representació conforme del semiplà superior Π^+ sobre el domini $U = \Pi^+ \setminus \{z = x + i : x \leq 0\}$.

22. Considerem els dominis

$$U_1 = \{z = x + iy : |y| < \pi\} \setminus \{z = x + iy : x = 0, |y| \geq \pi/2\}$$

$$U_2 = \{z = x + iy : |y| < \pi\} \setminus \{z = x + iy : |x| \geq 1, y = 0\}.$$

Trobeu sengles representacions conformes de U_1 , U_2 sobre el disc unitat.

El teorema de Riemann i el problema de Dirichlet

L'objectiu d'aquest capítol és la demostració del teorema de Riemann sobre representació conforme. La prova més habitual d'aquest resultat (deguda a Koebe) es basa en les propietats de les successions uniformement acotades de funcions holomorfes (famílies normals). El teorema de Riemann també es pot deduir de l'existència de solució del problema de Dirichlet en un domini simplement connex. Aquest camí és més llarg, però posa de manifest la relació entre la representació conforme i el problema de Dirichlet a través de la funció de Green i correspon al punt de vista de Riemann. Nosaltres donarem les dues proves, cadascuna de les quals requereix una preparació adequada. En un cas és l'estudi de les famílies normals, i en l'altre, la construcció de la funció de Green d'un domini simplement connex. Les propietats de les successions de funcions holomorfes o harmòniques, que tractem detalladament, tenen un gran interès en variable complexa, més enllà de la prova del teorema de Riemann.

9.1 Successions de funcions holomorfes o harmòniques

9.1.1 La convergència local uniforme

És ben sabut de l'anàlisi de funcions de variable real que un procediment per a obtenir noves funcions és fent límits o sumant sèries de funcions conegudes.

Així, donades les successions de funcions (f_n) , (g_n) , $n = 1, 2, \dots$, definides en un domini comú U , es poden considerar les funcions

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x), \quad x \in U.$$

És clar que això només és possible si la successió (f_n) o la sèrie $\sum g_n$ convergeixen en algun sentit. Com a mínim, cal que hi hagi convergència puntual, és a dir, que per a cada $x \in U$ fixat la successió o la sèrie de números $(f_n(x))$ o $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ siguin convergents.

A partir d'ara limitarem les consideracions al cas de successions de funcions, perquè l'estudi de les sèries de funcions es redueix a l'estudi de les successions de les sumes parcials.

La convergència puntual d'una successió de funcions (f_n) cap a la funció f a U , no garanteix que les propietats de les funcions f_n es transmetin a la funció f . Així, és ben conegut que pot ser que cada f_n sigui contínua a U i que el seu límit puntual f no ho sigui. Per a garantir la conservació de la continuïtat, o bé d'altres propietats de les funcions f_n en el pas al límit, cal imposar formes més fortes de convergència, de les quals la més important és la *convergència uniforme*. Així, si les funcions f_n són contínues a U i tendeixen uniformement cap a f a U , llavors f també és contínua.

Ara ens interessarà considerar el cas que U sigui un obert del pla complex i les funcions f_n estiguin definides a U . Per això pensarem que són funcions de la variable complexa $z \in U$ que, naturalment, prendran valors també complexos. Suposem que les funcions f_n , $n = 1, 2, \dots$ són contínues a l'obert U i que $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ és el seu límit puntual. Si tenim en compte que la continuïtat és una propietat local, és a dir, que una funció és contínua a U si i només si ho és a l'entorn de cada punt de U , veurem que per tal d'assegurar que f sigui contínua a U no cal exigir que la successió (f_n) convergeixi uniformement cap a f a U , sinó que n'hi ha prou que es compleixi la condició següent:

Per a cada punt $a \in U$ existeix un disc $D(a, r) \subset U$ de manera que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformement per a $z \in D(a, r)$, quan $n \rightarrow \infty$.

Si es compleix la condició anterior, es diu que la successió (f_n) tendeix cap a f *localment uniformement* a U (a partir d'ara suprimirem la referència *quan* $n \rightarrow \infty$). És clar, tal com ja s'ha dit, que si $f_n \rightarrow f$ localment uniformement a U i les funcions f_n són contínues a U , també ho és f . Tenim el resultat següent:

Proposició 9.1. *Les funcions (f_n) tendeixen localment uniformement cap a f a U si i només si per a tot conjunt $K \subset U$, K compacte, les funcions (f_n) tendeixen uniformement cap a f a K .*

Demostració. En un sentit és clar perquè només cal prendre $K = \overline{D}(a, r) \subset U$. En l'altre sentit, donat $K \subset U$, només cal recobrir-lo per una quantitat finita de discos $K \subset \bigcup_{i=1}^N D(a_i, r_i)$, $\overline{D}(a_i, r_i) \subset U$ i tenir en compte que si hi ha convergència uniforme a cada disc $D(a_i, r_i)$, també n'hi ha a K . $\square$

Per raó de la proposició anterior, quan $f_n \rightarrow f$ localment uniformement a U , també es diu que (f_n) tendeix cap a f *uniformement sobre compactes* a U .

Exemple 9.2. Sigui $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ la suma d'una sèrie de potències de radi de convergència $R > 0$. Sabem que la sèrie $\sum c_n z^n$ convergeix uniformement cap a $f(z)$ a cada disc compacte $\overline{D}(0, r)$ amb $r < R$. Això vol dir que $\sum c_n z^n$ convergeix cap a $f(z)$ uniformement sobre els compactes del disc obert $D(0, R)$ perquè cada compacte d'aquest disc està contingut en un disc $\overline{D}(0, r)$ per a algun $r < R$. Però, en canvi, pot ser que la sèrie $\sum c_n z^n$ no convergeixi uniformement a tot el disc $D(0, R)$. Per tenir un exemple d'aquesta situació només cal prendre la sèrie geomètrica $\sum_0^\infty z^n$ de radi de convergència $R = 1$. La convergència cap a la funció $\frac{1}{1-z}$ no és uniforme a $\mathbb{D}$, perquè si ho fos, voldria dir que el terme general z^n tendiria uniformement cap a 0 al disc $\mathbb{D}$, afirmació que és falsa. $\square$

A nosaltres ens interessa considerar successions de funcions (f_n) que siguin holomorfes o harmòniques en un obert U de manera que $f(z) = \lim_n f_n(z)$ per a $z \in U$ i poder saber en quines condicions f també serà holomorfa o harmònica a U . Com ha de ser la convergència de les funcions (f_n) cap a f per garantir la conservació de l'holomorfia o de l'harmonicitat?

Observem que el fet que una funció sigui holomorfa o harmònica a U també és una propietat local, com la continuïtat. Per tant, és clar que si la convergència uniforme de (f_n) cap a f és suficient per garantir que f sigui holomorfa o harmònica, també serà suficient la convergència de (f_n) cap a f uniformement sobre compactes a U . Doncs bé, resulta que la convergència uniforme sobre compactes, equivalent, com sabem, a la convergència local uniforme, és l'adequada per a garantir la conservació de l'holomorfia i de l'harmonicitat. Pel que fa a les funcions holomorfes, tenim el resultat següent:

Teorema 9.3 (Weierstrass). *Siguin f_n , $n = 1, 2, \dots$ funcions holomorfes a l'obert U del pla complex i suposem que la successió (f_n) convergeix cap a*

una funció f uniformement sobre els compactes de U . Llavors la funció f és holomorfa a U i, a més, la successió de derivades (f'_n) tendeix cap a f' també uniformement sobre els compactes de U .

Demostració. Comencem per observar el fet següent: si $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ és un camí contingut a U , es compleix, en les hipòtesis del teorema,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_n \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (9.1)$$

En efecte, com que $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre el compacte $\gamma([a, b])$, tenim $f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \rightarrow f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ uniformement a $[a, b]$, i integrant resulta (9.1).

Ara, per a provar que f és holomorfa a U tenim dues possibilitats. La primera és utilitzar el teorema de Morera (teorema 4.11). Ja sabem que f és contínua a U , i si Δ és qualsevol triangle contingut a U , és $\int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0$ pel teorema de Cauchy, i fent servir (9.1) resulta

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_n \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0,$$

igualtat que, d'acord amb el teorema de Morera, diu que f és holomorfa a U .

La segona possibilitat és utilitzar la fórmula integral de Cauchy. Sigui $\overline{D}(a, r) \subset U$ un disc i γ la seva frontera recorreguda en sentit positiu. Hom té

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{w - z} dw, \quad z \in D(a, r). \quad (9.2)$$

Com que $\frac{f_n(w)}{w - z} \rightarrow \frac{f(w)}{w - z}$ uniformement per a w variant a γ i z fix, resulta

$$f(z) = \lim_n f_n(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in D(a, r)$$

i aquesta igualtat prova que $f(z)$ és holomorfa al disc $D(a, r)$.

Per a veure que $f'_n(z) \rightarrow f'(z)$ localment uniformement fixem, com abans, un disc $\overline{D}(a, r) \subset U$. De (9.2) resulta

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w - z)^2} dw, \quad z \in D(a, r),$$

que dona lloc a

$$\lim_n f'_n(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w - z)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw = f'(z)$$

si $z \in D(a, r)$. Finalment, la convergència de (f'_n) cap a f' és uniforme en el disc $\overline{D}(a, r')$ amb $r' < r$ perquè, donat $\varepsilon > 0$, hom té

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w) - f_n(w)|}{|w - z|^2} |dw| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dw|}{(r' - r)^2} = \frac{\varepsilon r}{(r' - r)^2}$$

si $n \geq n_0$, n_0 prou gran. $\square$

Observació 9.1. a) El resultat anterior es pot reiterar i deduir que si $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes de U , llavors $f_n^{(m)} \rightarrow f^{(m)}$ uniformement sobre compactes a U per a cada $m = 1, 2, \dots$

b) Si tenim una sèrie de funcions holomorfes uniformement convergents sobre compactes

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

el teorema de Weierstrass diu que es pot derivar terme a terme per a obtenir una sèrie de derivades

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z),$$

que també convergeix uniformement sobre compactes. En particular, si partim d'una sèrie de potències

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$$

de radi de convergència positiu, retrobem el teorema 2.31, que dona

$$f'(z) = \sum_0^{\infty} n c_n z^{n-1},$$

a l'interior del disc de convergència.

c) En relació amb la convergència de successions de funcions holomorfes, és convenient tenir present el principi del màxim. Efectivament si $f_n \in C(\overline{U}) \cap H(U)$, on U és un domini acotat, el principi del màxim ens assegura que si la successió (f_n) convergeix uniformement a la frontera de U , ja convergeix uniformement a tot U , perquè només cal fer servir la condició uniforme de Cauchy i observar que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon \text{ per a } z \in \partial U \text{ implica } |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon \text{ per a tot } z \in U.$$

En el teorema de Weierstrass hem donat dues proves del fet que el límit uniforme sobre compactes d'una successió de funcions holomorfes és holomorfa. La que es basa en la representació integral de Cauchy d'una funció holomorfa fa pensar en un resultat anàleg per a funcions harmòniques per a les quals tenim la representació integral de Poisson.

Teorema 9.4. *Sigui (u_n) una successió de funcions harmòniques a l'obert U i suposem que $u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z)$ uniformement sobre els compactes de U . Llavors u és harmònica a U .*

Demostració. Agafem un disc $\overline{D}(a, r) \subset U$ i apliquem a cada u_n la fórmula de Poisson (7.32) per a obtenir

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(a, r)} \frac{r^2 - |z - a|^2}{|w - z|^2} u_n(w) ds(w).$$

Per les hipòtesis sobre la convergència uniforme de (u_n) , resulta

$$u(z) = \lim_n u_n(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(a, r)} \frac{r^2 - |z - a|^2}{|w - z|^2} u(w) ds(w),$$

que prova que u és harmònica pel fet de ser-ho el nucli de Poisson,

$$z \longrightarrow \frac{r^2 - |w - a|^2}{|w - z|^2}. \quad \square$$

Tornant al cas d'una successió de funcions holomorfes (f_n) que convergeixen uniformement sobre els compactes de U cap a una funció f , és fàcil provar que la univalència de les funcions f_n (és a dir, la injectivitat) és una propietat que també es conserva en el pas al límit, sempre que f no sigui constant. Tenim el resultat següent:

Teorema 9.5 (Hurwitz). *Sigui U un domini del pla complex i (f_n) una successió de funcions holomorfes a U amb $f_n(z) \neq 0$, $z \in U$, $n = 1, 2, \dots$ que convergeix uniformement sobre els compactes de U cap a una funció f . Llavors o bé f és idènticament nul·la a U , o bé $f(z) \neq 0$ per a tot punt $z \in U$.*

Demostració. Suposem que f no és idènticament nul·la i fixem un punt $z_0 \in U$. Com que els zeros de f (si en té) han de ser aïllats, hi ha un $r > 0$ de manera que $f(z) \neq 0$ si $0 < |z - z_0| \leq r$. En particular, $|f(z)| \geq \delta > 0$ si $z \in C(z_0, r)$, i, per la convergència uniforme, també serà $|f_n(z)| \geq \delta/2$ si $z \in C(z_0, r)$ i $n \geq n_0$. Així, doncs, resulta que $\frac{1}{f_n(z)} \rightarrow \frac{1}{f(z)}$ uniformement a $C(z_0, r)$ a causa de les

acotacions inferiors anteriors i també sabem que $f'_n(z) \rightarrow f'(z)$ uniformement a $C(z_0, r)$, pel teorema de Weierstrass. Es pot concloure, doncs, que

$$\lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'_n}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Ara, pel principi de l'argument (teorema 5.27) les integrals de l'esquerra són zero perquè cap funció f_n té zeros. El fet que la integral de la dreta sigui zero vol dir, pel mateix principi, que $f(z_0) \neq 0$. $\square$

Corol·lari 9.6. *Segui U un domini del pla, $f_n \in H(U)$, $n = 1, 2, \dots$ i $f(z) = \lim_n f_n(z)$, uniformement sobre els compactes de U . Si cada funció f_n és injectiva a U , llavors la funció f o bé és injectiva, o bé és constant a U .*

Demostració. Suposem que f no és constant. Si no fos injectiva a U , trobaríem dos punts $z_1 \neq z_2$ de U amb $f(z_1) = f(z_2) = w$. Agafem discos disjunts $D(z_1, r), D(z_2, r) \subset U$. A cada un d'ells tenim $f_n(z) - w \rightarrow f(z) - w$ uniformement sobre compactes. Com que la funció $f(z) - w$ no és idènticament nul·la i s'anul·la tant a $D(z_1, r)$ com a $D(z_2, r)$, d'acord amb el teorema de Hurwitz les funcions $f_n(z) - w$ s'han d'anul·lar a $D(z_1, r)$ i a $D(z_2, r)$ per a $n \geq n_0$ (si no, podríem formar una successió de funcions sense zeros que tindrien un límit, $f(z) - w$, amb un zero). Però això vol dir que f_n , per a n prou gran, prendrà el valor w a $D(z_1, r)$ i a $D(z_2, r)$ fet que és impossible perquè f_n és injectiva i $D(z_1, r) \cap D(z_2, r) = \emptyset$. $\square$

9.1.2 Famílies normals

Si volem obtenir noves funcions com a límits de successions de funcions conegudes, necessitarem algun criteri que ens digui quan una successió donada pot tenir límit. Naturalment, no es pot esperar que qualsevol successió tingui límit (en la convergència que sigui) però generalment és suficient poder garantir que donada una successió de funcions (f_n) d'una classe determinada, hi ha una successió parcial (f_{k_n}) que té límit, $f(z) = \lim_n f_{k_n}(z)$, perquè llavors, de fet, f és límit d'una successió de funcions de la classe i heretarà les propietats de les funcions f_n si la convergència és prou bona.

Per tal d'estudiar aquest problema, és a dir, l'existència de successions parcials convergents d'una successió donada, recordem primer el que passa quan es tracta, simplement, de successions numèriques. Si (z_n) és una successió de punts del pla que convergeix cap a un punt $z = \lim_n z_n$, llavors necessàriament la successió (z_n) és acotada, és a dir, $\sup_n |z_n| < +\infty$. El recíproc no és cert:

si (z_n) és una successió acotada, no té per què ser convergent, però el teorema de Bolzano-Weierstrass assegura que (z_n) té almenys una successió parcial convergent. Així doncs, en aquest cas, l'acotació és el criteri per assegurar que una successió té una parcial convergent. El teorema de Bolzano-Weierstrass és un principi bàsic de l'anàlisi que, de fet, és equivalent a la completesa del cos real. També és una manera alternativa de dir que els conjunts tancats i acotats de l'espai euclidià són compactes.

Què passa si substituïm la successió de punts (z_n) per una successió de funcions (f_n) ? Suposem, de moment, que les funcions f_n estan definides sobre un compacte K i que són contínues a K . La convergència natural ara és la convergència uniforme sobre K que ens assegura que si (f_n) té límit en aquesta convergència, posem f , llavors f també serà contínua a K . Si $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ uniformement sobre K , és immediat que la successió (f_n) ha de ser acotada, on acotada vol dir *uniformement acotada a K* , és a dir, hi ha una constant $M > 0$ de manera que $|f_n(z)| \leq M$, $n = 1, 2, \dots$ i $z \in K$. Ara, si suposem que (f_n) és uniformement acotada sobre K , podem dir, com en el cas de successions de punts, que hi ha una parcial (f_{k_n}) uniformement convergent a K ? La resposta és que no, i de fet pot passar que, essent (f_n) uniformement acotada a K , no tingui cap parcial que sigui ni tan sols puntualment convergent a K , tal com ho mostra l'exemple següent.

Exemple 9.7. Sigui $K = [0, 2\pi]$, $f_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$. Hom té $|f_n(x)| \leq 1$, per a $x \in K$, $n = 1, 2, \dots$ però, en canvi, no poden existir enters (k_n) tals que $\lim_n \sin k_n x$ existeixi per a cada $x \in K$, perquè aleshores tindríem

$$\lim_n (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 = 0 \quad x \in [0, 2\pi],$$

igualtat que, pel teorema de la convergència dominada, implica

$$\lim_n \int_0^{2\pi} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 dx = 0,$$

mentre que un càlcul senzill prova que

$$\int_0^{2\pi} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 dx = 2\pi \text{ si } k_n \text{ és enter}$$

i arribaríem a una contradicció. □

Què cal més, doncs, perquè una successió uniformement acotada de funcions contínues a K tingui una parcial uniformement convergent a K ? El concepte clau és l'*equicontinuitat*. Cal que la successió sigui equicontínua a K .

Per tal de posar-nos en una situació més general, considerem qualsevol família $\mathcal{F}$ de funcions contínues sobre un compacte K . Recordem que la família

$\mathcal{F}$ es diu que és *equicontínua* a K si, donat $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ de manera que es compleixi la condició

$$z, w \in K, |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon, \quad \text{per a tota } f \in \mathcal{F}.$$

El punt essencial és que si una successió de funcions contínues és uniformement convergent a K , llavors també és equicontínua a K . En el sentit contrari, si una successió de funcions és puntualment acotada i equicontínua a K , llavors té una parcial uniformement convergent a K . Aquests fets, enunciat amb precisió per a una família $\mathcal{F}$ de funcions, són el contingut del resultat clàssic següent.

Teorema 9.8 (Arzelà-Ascoli). *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions contínues sobre un compacte K . Les afirmacions següents són equivalents:*

- a) *Qualsevol successió de funcions de la família $\mathcal{F}$ té una successió parcial que és uniformement convergent a K .*
- b) *La família $\mathcal{F}$ és puntualment acotada i equicontínua a K .*

Puntualment acotada vol dir que per a cada $z \in K$ és $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z)| < \infty$.

La demostració del teorema 9.8 es pot veure a [10, pàg. 156–158]. Es prova, a més, que si (f_n) és puntualment acotada i equicontínua, llavors, de fet, (f_n) és uniformement acotada.

En el cas que, com fins ara, tractem amb funcions contínues sobre compactes convé fer notar el següent: la definició d'equicontinuitat que hem donat és, de fet, la d'*equicontinuitat uniforme sobre K* , però es pot donar també la noció de família equicontínua en un punt $z_0 \in K$. La família $\mathcal{F}$ serà *equicontínua en el punt z_0* si per a cada $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ de manera que

$$z \in K, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{per a cada } f \in \mathcal{F}.$$

Utilitzant un argument de recobriment, resulta immediatament l'equivalència dels dos conceptes.

Proposició 9.9. *Una família $\mathcal{F}$ de funcions és equicontínua (uniformement) sobre el compacte K si i només si és equicontínua a cada punt de K .*

Tenint en compte que a nosaltres ens interessa estudiar successions de funcions holomorfes i harmòniques que estan definides en un obert U del pla, i que la convergència natural, en aquest cas, és la convergència uniforme sobre els compactes de U , donarem una variant del teorema d'Arzelà-Ascoli en aquest context.

Teorema 9.10. *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions contínues sobre un obert U del pla. Les afirmacions següents són equivalents:*

- a) *Qualsevol successió de funcions de la família $\mathcal{F}$ té una successió parcial que és uniformement convergent sobre els compactes de U .*
- b) *La família $\mathcal{F}$ és puntualment acotada a U i equicontínua a cada punt de U .*

Demostració. La demostració de $a) \Rightarrow b)$ és la mateixa que la de la implicació corresponent en el teorema 9.8. És molt fàcil, per exemple, raonant per reducció a l'absurd.

Per veure que $b) \Rightarrow a)$ prenem una successió exhaustiva de compactes de U , és a dir, una successió de compactes $K_n \subset U$ tals que

- 1) $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$
- 2) Si $K \subset U$ és compacte, existeix un $n \in \mathbb{N}$ amb $K \subseteq K_n$,

d'acord amb el lema 1.15.

Sigui ara (f_n) una successió de funcions de la família $\mathcal{F}$. Per $b)$, la proposició 9.9 i el teorema 9.8 aplicats al compacte K_1 podem trobar una successió parcial de (f_n) , que anomenarem (f_n^1) , de manera que és uniformement convergent sobre K_1 . Pel mateix motiu podem trobar una parcial de la successió (f_n^1) , posem (f_n^2) , que sigui uniformement convergent sobre K_2 , la qual també convergirà sobre K_1 . Continuant aquest procés trobarem $(f_n^m)_{n=1,2,\dots}$, que serà uniformement convergent sobre $K_1, K_2, \dots, K_m$. La successió diagonal $(f_n^n)_{n=1,2,\dots}$ serà uniformement sobre cada compacte K_n i, per la propietat 2), també ho serà sobre tot compacte de U . $\square$

D'acord amb el teorema 9.10, si volem veure que una determinada família de funcions contínues sobre U , $\mathcal{F}$, té la propietat que de tota successió de $\mathcal{F}$ se'n pot treure una parcial uniformement convergent sobre els compactes de U , necessàriament haurem de comprovar que $\mathcal{F}$ és equicontínua a U . En el cas que les funcions de $\mathcal{F}$ siguin diferenciables, un criteri per a assegurar l'equicontinuitat de $\mathcal{F}$ és que les derivades de les funcions de $\mathcal{F}$ estiguin uniformement acotades sobre els compactes de U o, el que és el mateix, que estiguin localment uniformement acotades.

Per exemple, suposem que estem tractant amb una família de funcions, $\mathcal{F}$, definides i diferenciables a la recta real i suposem que per a cada $x_0 \in \mathbb{R}$, fixat, i cada $r > 0$ existeix $M_r > 0$ amb

$$|f'(x)| \leq M_r \quad \text{si} \quad |x - x_0| < r, \quad \text{per a tota } f \in \mathcal{F}.$$

Una aplicació del teorema del valor mitjà dona:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M_r |x - x_0| \quad \text{si} \quad |x - x_0| < r, \quad f \in \mathcal{F},$$

desigualtat que prova que $\mathcal{F}$ és equicontínua en el punt x_0 . És clar que si tinguéssim funcions de dues variables reals amb les derivades parcials acotades

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq M_r, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M_r$$

si $d((x, y), (x_0, y_0)) < r$, per a tota $f \in \mathcal{F}$, arribaríem igualment a la conclusió que $\mathcal{F}$ és equicontínua en el punt (x_0, y_0) .

És un fet essencial que una família uniformement acotada de funcions holomorfes o harmòniques és automàticament equicontínua.

Proposició 9.11. *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en un obert U del pla que està uniformement acotada sobre cada compacte de U . Llavors la família $\mathcal{F}$ és equicontínua a cada punt de U .*

El mateix resultat val si $\mathcal{F}$ és una família de funcions harmòniques a U .

Demostració. Suposem que les funcions de $\mathcal{F}$ són holomorfes i agafem $z_0 \in U$ i $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Per hipòtesi existeix $M_r > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M_r \quad \text{si} \quad |z - z_0| \leq r, \quad f \in \mathcal{F}.$$

La primera desigualtat de Cauchy (teorema 4.38) dona

$$|f'(z)| \leq 2 \frac{M_r}{r} \quad \text{si} \quad |z - z_0| \leq \frac{r}{2}, \quad f \in \mathcal{F},$$

perquè $\overline{D}(z, r/2) \subset \overline{D}(z_0, r)$ si $|z - z_0| \leq r/2$.

Ara, si $z \in D(z_0, r/2)$, integrant al llarg del segment que va de z_0 a z , hom té

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \int_{z_0}^z f'(w) dw \right| \leq \int_{z_0}^z |f'(w)| |dw| \leq 2 \frac{M_r}{r} |z - z_0|$$

sempre que $|z - z_0| \leq r/2$ i $f \in \mathcal{F}$. Això prova que la família $\mathcal{F}$ és equicontínua a z_0 .

En el cas que les funcions de $\mathcal{F}$ siguin harmòniques, les tractarem com a funcions de les variables x, y . Pel que hem dit abans és clar que n'hi ha prou de veure que si $z_0 \in U$, hom té una acotació del tipus

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(z) \right| \leq M_r, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y}(z) \right| \leq M_r, \quad \text{si} \quad |z - z_0| \leq r, \quad u \in \mathcal{F}$$

o, de manera equivalent,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right| \leq M_r, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) \right| \leq M_r, \quad |z - z_0| \leq r, \quad u \in \mathcal{F}.$$

Suposem, per simplificar la notació, que $z_0 = 0$ i $\mathbb{D} \subset U$. Representem u per la fórmula de Poisson (7.19):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|1 - e^{-i\theta}z|^2} u(e^{i\theta}) d\theta, \quad |z| < 1.$$

D'acord amb les hipòtesis tenim $|u(z)| \leq M_{1/2}$, si $|z| \leq 1/2$ i $u \in \mathcal{F}$. Derivant l'expressió de $u(z)$ i acotant el resultat, surt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right| &\leq M_{1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial z} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) \right| d\theta, \\ \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) \right| &\leq M_{1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) \right| d\theta \end{aligned}$$

sempre que $|z| \leq 1/2$, $u \in \mathcal{F}$.

Així, l'equicontinuitat de la família $\mathcal{F}$ quedarà provada si veiem que tant $\frac{\partial}{\partial z} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})$ com $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})$ estan uniformement acotades, respecte de θ , quan $|z| \leq 1/2$.

Amb aquesta finalitat, només cal escriure el nucli de Poisson en la forma

$$P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - e^{-i\theta}z|^2} = 1 + \frac{ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} + \frac{\bar{z}e^{i\theta}}{1 - \bar{z}e^{i\theta}},$$

de la qual es dedueix

$$\frac{\partial P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})}{\partial z} = \frac{e^{-i\theta}}{(1 - ze^{-i\theta})^2}, \quad \frac{\partial P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{(1 - \bar{z}e^{i\theta})}.$$

I d'aquí,

$$\left| \frac{\partial P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})}{\partial \bar{z}} \right| \leq \frac{1}{|e^{i\theta} - z|^2} \leq 4 \quad \text{si} \quad |z| \leq \frac{1}{2}. \quad \square$$

Tenim ara el resultat bàsic sobre successions de funcions holomorfes o harmòniques.

Teorema 9.12 (Montel). *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes en un obert U del pla. Llavors són equivalents:*

a) Qualsevol successió de funcions de la família $\mathcal{F}$ té una successió parcial que és uniformement convergent sobre els compactes de U .

b) La família $\mathcal{F}$ està uniformement acotada sobre els compactes de U .

El mateix enunciat val si $\mathcal{F}$ és una família de funcions harmòniques a U .

Demostració. La implicació $a) \Rightarrow b)$ val per a tota família de funcions contínues, perquè la condició a) implica que la família $\mathcal{F}$ és equicontínua i puntualment acotada (teorema 9.10), i llavors si $z_0 \in U$, existeix $\delta > 0$ amb $|f(z) - f(z_0)| < 1$ si $|z - z_0| < \delta$, per a $f \in \mathcal{F}$. Així, doncs, $|f(z)| \leq |f(z_0)| + 1$, $|z - z_0| < \delta$, $f \in \mathcal{F}$, i la família $\mathcal{F}$ és localment uniformement acotada.

Per a $b) \Rightarrow a)$ només cal combinar el teorema 9.10 amb la proposició 9.11. $\square$

En el cas d'una família de funcions holomorfes uniformement acotades sobre els compactes de U , es parla també d'una *família normal* de funcions holomorfes a U . Cal tenir present, però, que en la terminologia clàssica de Montel s'aplica la denominació de família normal a una classe de funcions holomorfes $\mathcal{F}$ amb la propietat que tota successió de $\mathcal{F}$ té una parcial uniformement convergent sobre cada compacte, o bé una parcial uniformement convergent cap a ∞ , sobre cada compacte.

En el cas de famílies de funcions harmòniques, hi ha un altre criteri de normalitat, és a dir, un criteri per garantir que tota successió de la família té una parcial uniformement convergent sobre compactes, sigui cap a una funció harmònica, o bé cap a ∞ . És, senzillament, que la família estigui formada per funcions harmòniques positives. Aquest criteri, conegut com a principi de Harnack, es basa en una desigualtat del mateix nom (vegeu l'exercici 7 del capítol 7).

Proposició 9.13 (Desigualtat de Harnack). Si u és una funció harmònica i positiva en el disc $D(z_0, R)$, llavors

$$\frac{R-r}{R+r}u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(z_0) \quad \text{si} \quad |z - z_0| = r < R. \quad (9.3)$$

Demostració. N'hi ha prou de considerar el cas $z_0 = 0$, $R = 1$. S'ha de veure, doncs, que

$$\frac{1-r}{1+r}u(0) \leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{1+r}{1-r}u(0) \quad \text{si} \quad 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (9.4)$$

Si $P_r(\tau - \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\theta)+r^2}$, hom té les desigualtats:

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{1-r^2}{1+2r+r^2} \leq 2\pi P_r(\tau - \theta) \leq \frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \frac{1+r}{1-r},$$

$$0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (9.5)$$

Com que $\lim_{r \rightarrow 1} u(rz) = u(z)$, substituint la funció u per una dilatada seva i passant al límit després, podem suposar que u és contínua al disc unitat $\mathbb{D}$ de manera que, per la fórmula de Poisson, és

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\tau - \theta) u(e^{i\tau}) d\tau.$$

Com que $u(z) \geq 0$, multiplicant (9.5) per $u(re^{i\tau})$, integrant i tenint en compte que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\tau}) d\tau = u(0)$ (per la propietat de la mitjana) resulta (9.4). $\square$

Podem donar ara el criteri de normalitat per a famílies de funcions harmòniques positives.

Teorema 9.14. *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions harmòniques positives en un domini U del pla complex. Llavors tota successió de funcions de $\mathcal{F}$ té una successió parcial que convergeix cap a una funció harmònica a U , uniformement sobre els compactes de U , o bé convergeix cap a infinit, uniformement sobre els compactes de U .*

Demostració. Sigui (u_n) una successió de funcions de $\mathcal{F}$. El teorema és conseqüència del comportament de (u_n) en els dos casos següents:

a) Existeix un punt $z_0 \in U$ tal que $\lim_n u_n(z_0) = \infty$.

En aquest cas, $\lim_n u_n(z) = \infty$ uniformement sobre els compactes de U . En efecte: la primera desigualtat de (9.3), aplicada a cada u_n , ens diu que $\lim_n u_n(z_0) = \infty$ implica $\lim_n u_n(z) = \infty$ uniformement en un disc al voltant de z_0 . La segona desigualtat de (9.3) ens diu que si $(u_n(z_0))$ està acotada, llavors $(u_n(z))$ està uniformement acotada en un entorn de z_0 . Així doncs, si posem

$$A = \{z \in U : \lim_n u_n(z) = \infty\}, \quad B = U \setminus A,$$

resulta que A és obert i no buit per hipòtesi, i B també és obert. Com que U és connex, tenim $A = U$ i $\lim_n u_n(z) = \infty$ localment uniformement a U .

b) Existeix un punt $z_0 \in U$ tal que $\sup_n u_n(z_0) < +\infty$.

En aquest cas, (u_n) és uniformement acotada sobre els compactes de U . En efecte, pel que acabem de veure, ha de ser $\sup_n u_n(z) < +\infty$, per a $z \in U$, i això implica, per (9.3), que (u_n) és localment uniformement acotada a U .

Ara, donada la successió (u_n) de $\mathcal{F}$ només cal observar que, fixat un punt $z_0 \in U$, o bé $\lim_n u_n(z_0) = \infty$, o bé existeix una parcial (u_{k_n}) de (u_n) amb $\sup_n u_{k_n}(z_0) < +\infty$. En el primer cas, apliquem a), i en el segon, apliquem b) i el teorema 9.12 per arribar a la conclusió de l'enunciat del teorema. $\square$

Corol·lari 9.15. *Sigui (u_n) una successió monòtona creixent de funcions harmòniques en un domini U . Llavors (u_n) és uniformement convergent sobre els compactes de U cap a una funció harmònica a U , o bé cap a infinit.*

Demostració. La successió (v_n) amb $v_n(z) = u_n(z) - u_1(z)$ està formada per funcions harmòniques positives i és creixent. El teorema 9.14 aplicat a la successió (v_n) dona la conclusió per a aquesta successió i, per tant, també per a la successió (u_n) . $\square$

9.1.3 La topologia de l'espai de les funcions contínues sobre un obert

En els apartats anteriors s'ha posat de manifest que la noció de convergència uniforme sobre els compactes d'un obert d'una successió de funcions contínues és natural tant per a les funcions contínues com per a les funcions holomorfes o harmòniques. Pot ser interessant veure ara que aquesta idea de convergència és la que correspon a una mètrica completa definida en l'espai de les funcions contínues sobre un obert.

Fixem, doncs, un obert U del pla complex i considerem $C(U)$, l'espai de les funcions contínues sobre U . Sigui $(K_n)_{n=1,2,\dots}$ una successió de compactes de U com en el lema 1.15 (de fet n'hi ha prou que els K_n compleixin a) i b) d'aquest lema), i per a cada funció $f \in C(U)$ posem

$$M_n(f) = \sup\{|f(z)| : z \in K_n\},$$

$$p_n(f) = \min\{M_n(f), 1\},$$

$$p(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(f)}{2^n}.$$

Observem que $0 \leq p(f) \leq 1$, per a tota funció contínua f . Ara definim una distància a l'espai $C(U)$ per

$$d(f, g) = p(f - g), \quad \text{si } f, g \in C(U).$$

Com que $d(f, g) = 0$ si i només si $f = g$, per tal d'estar segurs que d és una distància a $C(U)$ n'hi ha prou de veure que

$$p(f + g) \leq p(f) + p(g),$$

desigualtat que és una conseqüència immediata de la definició del funcional p i del fet que $M_n(f + g) \leq M_n(f) + M_n(g)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $f, g \in C(U)$.

Observem que la distància d que acabem de definir és invariant per translacions, en el sentit, que

$$d(f, g) = d(f + h, g + h), \quad \text{si } f, g, h \in C(U).$$

Això vol dir que per a conèixer la topologia que defineix d al voltant de cada punt de $C(U)$ és suficient conèixer la topologia al voltant del zero de $C(U)$.

Proposició 9.16. *Una successió de funcions (f_n) , $f_n \in C(U)$, tendeix cap a una funció $f \in C(U)$ en la mètrica d , és a dir, $\lim_n d(f_n, f) = 0$ si i només si (f_n) tendeix cap a f uniformement sobre els compactes de U .*

Demostració. Pel que acabem de dir, només cal considerar el cas $f = 0$.

Suposem que $d(f_n, 0) = p(f_n) \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. Hem de veure que, donats $K \subset U$ compacte i $0 < \varepsilon < 1$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\sup\{|f_n(x)| : x \in K\} < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Agafem K_m tal que $K \subset K_m$ i n_0 tal que $p(f_n) < \frac{\varepsilon}{2^m}$ si $n \geq n_0$. Llavors tenim $p_m(f_n) \leq 2^m p(f_n) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, que dóna $M_m(f_n) < \varepsilon$ i, a fortiori, $|f_n(x)| < \varepsilon$, per a $x \in K$, $n \geq n_0$.

Recíprocament, suposem que $f_n \rightarrow 0$ uniformement sobre els compactes de U . Donat $\varepsilon > 0$, triem m de manera que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon/2$. Aleshores existeix n_0 tal que $M_m(f_n) < \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$. Ara bé, si $f \in C(U)$, hom té $p_n(f) \leq p_m(f)$ si $n \leq m$ i, per tant,

$$p(f) \leq \sum_{n=1}^m \frac{p_m(f)}{2^n} + \sum_{n>m} \frac{1}{2^n} \leq p_m(f) + \frac{1}{2^m}.$$

Si apliquem aquesta desigualtat a f_n per a $n \geq n_0$, resulta

$$d(f_n, 0) = p(f_n) \leq M_m(f_n) + \frac{1}{2^m} < \varepsilon. \quad \square$$

Corol·lari 9.17. *L'espai $C(U)$ amb la distància d és un espai mètric complet.*

Demostració. Si (f_n) és una successió de Cauchy de $C(U)$ segons la mètrica d , la proposició anterior ens diu que (f_n) és una successió de Cauchy uniforme sobre els compactes de U . Llavors és clar que (f_n) ha de tenir un límit $f \in C(U)$ uniforme sobre els compactes de U , és a dir, altre cop per la proposició 9.16, segons la mètrica d . $\square$

Alguns dels resultats dels apartats 9.1.1 i 9.1.2 tenen una formulació més sintètica si hom fa servir la topologia associada a la mètrica d de l'espai $C(U)$. Per exemple, el teorema de Weierstrass (teorema 9.3) es tradueix en l'afirmació següent:

L'espai de les funcions holomorfes en un obert U , $H(U)$, és un subespai tancat de $C(U)$. L'aplicació $f \rightarrow f'$ que assigna a cada funció la seva derivada és una aplicació contínua de $H(U)$ en $H(U)$.

El teorema de Montel (teorema 9.12) també té una reformulació interessant en termes de la topologia de $H(U)$, induïda per la de $C(U)$. En primer lloc, cal donar una definició adequada de conjunt acotat de l'espai $C(U)$. Observem d'entrada que dir que un conjunt $A \subset C(U)$ és acotat quan el seu diàmetre és finit no és adequat perquè la distància d que hem definit compleix $d(f, g) \leq 1$ per a tot parell $f, g \in C(U)$, i per tant tot conjunt seria acotat. La definició que escau és la següent:

Un conjunt de funcions contínues $A \subset C(U)$ es diu que és *acotat* si per a cada $\varepsilon > 0$ existeix una constant $0 < \alpha_\varepsilon < \infty$ de manera que $d(\alpha_\varepsilon f, 0) = p(\alpha_\varepsilon f) \leq \varepsilon$, per a tota funció $f \in A$.

Copiant l'argument fet servir per a demostrar la proposició 9.16, es veu que $A \subset C(U)$ és un conjunt acotat en el sentit anterior si i només si A és uniformement acotat sobre els compactes de U , és a dir, si per a cada compacte $K \subset U$ hi ha una constant $0 < M_K < \infty$ tal que $|f(z)| \leq M_K$, per a $z \in K$, i $f \in A$. Ara el teorema 9.12 diu el següent:

Un conjunt de funcions holomorfes $\mathcal{F} \subset H(U)$ és compacte si i només si $\mathcal{F}$ és tancat i acotat.

Aquest resultat assegura que els compactes de l'espai topològic $H(U)$ tenen la mateixa caracterització que els compactes de $\mathbb{R}^n$. Aquesta afirmació, tal com hem vist en l'apartat 9.1.2, és falsa per als compactes de $C(U)$, i cal el teorema d'Arzelà-Ascoli amb la noció d'equicontinuitat per a caracteritzar-los.

Naturalment, també hi ha formulacions equivalents per a l'espai $h(U)$ de les funcions harmòniques a U : $h(U)$ és un tancat de $C(U)$ i els subconjunts compactes de $h(U)$ són els tancats i acotats.

9.2 El teorema de Riemann

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar el teorema de Riemann sobre la representació conforme (teorema 8.5), el qual recordem a continuació.

Teorema 9.18 (Teorema fonamental de la representació conforme). *Donat un domini simplement connex del pla U , $U \neq \mathbb{C}$, i un punt $z_0 \in U$ existeix una única representació conforme f de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$, normalitzada amb les condicions $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

La demostració que donarem tot seguit és deguda, essencialment, a Koebe i es basa en la teoria de les famílies normals de què hem parlat en la secció anterior. Més endavant donarem una altra demostració, més propera a l'esperit original de Riemann, basada en la solució del problema de Dirichlet.

En primer lloc, provem la unicitat de f . Si $f_1, f_2: U \rightarrow \mathbb{D}$ fossin conformes, exhaustives i normalitzades, la funció

$$T(w) = f_2(f_1^{-1}(w))$$

seria un automorfisme del disc unitat que compliria $T(0) = 0$, $T'(0) > 0$. D'acord amb el teorema 8.27, ha de ser $T(w) = w$, per a $w \in \mathbb{D}$, és a dir, $f_1 = f_2$.

Per a demostrar l'existència d'una representació conforme normalitzada de U sobre $\mathbb{D}$, considerem la família $\mathcal{F}$ de funcions holomorfes a U definida per:

$$g \in \mathcal{F} \iff \begin{cases} \text{a) } g \text{ és holomorfa i injectiva a } U \\ \text{b) } |g(z)| < 1, \text{ per a } z \in U \\ \text{c) } g(z_0) = 0, g'(z_0) > 0, \end{cases}$$

on z_0 és el punt fixat a U . La prova del teorema de Riemann es fa en els tres passos següents:

A) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

B) Existeix una funció $f \in \mathcal{F}$ tal que $g'(z_0) \leq f'(z_0)$, per a tota $g \in \mathcal{F}$.

- C) Si $f \in \mathcal{F}$ compleix B), llavors f és la funció de Riemann, és a dir, $f(U) = \mathbb{D}$, $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$.

Demostració de A). Com que $U \neq \mathbb{C}$, podem prendre un punt $a \notin U$. Sigui $g(z) = \sqrt{z-a}$ una determinació de l'arrel quadrada de $z-a \neq 0$, $z \in U$ que existeix pel teorema 6.22 f). Així, $g \in H(U)$ i és evident que g és injectiva a U . A més, com que $g(z) \neq 0$ si $z \in U$, resulta que si g pren un valor w a U , no pot prendre el valor $-w$. Sabem que $g(U)$ és un obert i, per tant, existeix $r > 0$ amb $D(g(z_0), r) \subset g(U)$. Pel que acabem de dir, és $D(-g(z_0), r) \cap g(U) = \emptyset$, i això significa que $|g(z) + g(z_0)| \geq r$, per a $z \in U$. La funció $g_1(z) = c/(g(z) + g(z_0))$, amb c constant, és holomorfa i injectiva a U i, si $|c|$ és prou petit, compleix $|g_1(z)| < 1$, $z \in U$. Finalment, component g_1 amb un automorfisme τ del disc unitat, podem aconseguir que la funció $g_0 = \tau \circ g_1$ compleixi, a més, $g_0(z_0) = 0$, $g'_0(0) > 0$, és a dir, $g_0 \in \mathcal{F}$.

Demostració de B). Observem d'entrada que la família $\mathcal{F}$ és normal. De fet, les funcions de $\mathcal{F}$ estan uniformement acotades sobre tot U per la condició b) que defineix $\mathcal{F}$.

Sigui $M = \sup \{g'(z_0) : g \in \mathcal{F}\}$ de manera que, en principi, podria ser $M = +\infty$. En tot cas, podem agafar una successió de funcions $g_n \in \mathcal{F}$ amb $\lim_n g'_n(z_0) = M$. Com que $\mathcal{F}$ és normal, pel teorema 9.12, existeix una successió parcial (g_{k_n}) uniformement convergent sobre els compactes de U cap a una funció f . Pel teorema 9.3 sabem que f és holomorfa a U i, a més, $g'_{k_n}(z) \rightarrow f'(z)$, també uniformement sobre compactes. En particular, $M < +\infty$ i $f'(z_0) = M$. Ara, pel corollari 9.6, f ha de ser injectiva o bé constant, perquè cada g_n és injectiva. Però $f'(z_0) = M > 0$ perquè $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Així doncs, f no és constant i f és injectiva. Com que $f(z_0) = \lim_n g_{k_n}(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$, és $f \in \mathcal{F}$ i, finalment, $g'(z_0) \leq f'(z_0)$ si $g \in \mathcal{F}$, per la definició del número M .

Demostració de C). Només cal provar que si f és la funció de B), llavors $f(U) = \mathbb{D}$. Suposem que no fos així, és a dir, que hi hagués un punt $w_0 \in \mathbb{D}$, $w_0 \notin f(U)$. Construïrem una funció $g_1 \in \mathcal{F}$ de manera que $g'_1(z_0) > f'(z_0)$, i això contradiu B). La funció $(f(z) - w_0)/(1 - \overline{w_0}f(z))$ és holomorfa i injectiva de U a $\mathbb{D}$ i, a més, no s'anul·la a U . Per tant, existeix una determinació de la seva arrel quadrada

$$g(z) = \sqrt{\frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z)}}$$

que també és injectiva i holomorfa a U i compleix, també, $|g(z)| < 1$. Ara la funció

$$g_1(z) = \frac{|g'(z_0)|}{g'(z_0)} \frac{g(z) - g(z_0)}{1 - \overline{g(z_0)}g(z)}$$

té les mateixes propietats que g i, a més, està normalitzada, és a dir, $g_1 \in \mathcal{F}$. De fet, si fem explícit el valor de $g'_1(z_0)$, resulta,

$$g'_1(z_0) = \frac{|g'(z_0)|}{1 - |g(z_0)|^2}$$

i, a partir de l'expressió de $g(z)$ en funció de $f(z)$, queda

$$g'_1(z_0) = \frac{1 + |w_0|}{2\sqrt{|w_0|}} \cdot f'(z_0) > f'(z_0),$$

perquè $\frac{1+|w_0|}{2|w_0|} > 1$ equival a $(1 - |w_0|)^2 > 0$. □

9.3 Funció de Green i representació conforme

Sigui U un domini acotat del pla complex i comencem per recordar què és la funció de Green de U . D'acord amb allò que s'ha dit en la secció 7.5, per a obtenir la *funció de Green de U amb pol en el punt $z_0 \in U$* hem de trobar una funció h , harmònica a U i contínua a $\overline{U}$, de manera que $h(z) = \frac{1}{2\pi} \text{Log } |z - z_0|$ si $z \in \partial U$. Llavors la funció

$$G_U(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \text{Log } |z - z_0| - h(z)$$

és la funció de Green buscada.

La funció $G_U(z_0, z)$, com a funció de la variable z , té les propietats següents:

- a) $G_U(z_0, z)$ és contínua a $\overline{U} \setminus \{z_0\}$ i harmònica a $U \setminus \{z_0\}$.
- b) $G_U(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \text{Log } |z - z_0|$ és harmònica a U .
- c) $G_U(z_0, z) = 0$ quan $z \in \partial U$.

És fàcil veure que aquestes propietats determinen la funció $G_U(z_0, z)$. En efecte, si $\tilde{G}_U(z_0, z)$ també complís a), b) i c), llavors la funció $G_U(z_0, z) - \tilde{G}_U(z_0, z)$ seria harmònica a U , contínua a $\overline{U}$ i nul·la a la frontera de U , i pel principi del màxim (corol·lari 7.20) hauria de ser idènticament nul·la a U .

És clar que la funció h que hem fet servir per a construir la funció de Green és la solució del problema de Dirichlet a U amb valors frontera $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |z - z_0|$. Per tant, el que hem dit mostra que si sabem resoldre el problema de Dirichlet a U , també sabem construir la funció de Green de U amb pol a qualsevol punt de U .

La funció de Green té diverses propietats importants. Una d'aquestes, per exemple, és la simetria. Si z, w són dos punts qualssevol de U , llavors es compleix la igualtat $G_U(z, w) = G_U(w, z)$ d'acord amb la proposició 7.23. Una altra propietat és la *invariància conforme* de la funció de Green. Aquesta propietat la descrivim en l'enunciat següent, que diu, essencialment, que una representació conforme entre dos dominis transforma la funció de Green de l'un en la funció de Green de l'altre.

Proposició 9.19. *Siguin U, U' dos dominis acotats del pla, $z_0 \in U, w_0 \in U'$ i $f: U' \rightarrow U$ una representació conforme de U' sobre U tal que $f(w_0) = z_0$. Suposem que el domini U té funció de Green amb pol a $z_0, G_U(z_0, z)$. Llavors la funció $G_U(z_0, f(w))$ és la funció de Green de U' amb pol a w_0 , és a dir,*

$$G_{U'}(w_0, w) = G_U(z_0, f(w)), \quad w \in \overline{U'} \setminus \{w_0\}.$$

Demostració. Només cal veure que la funció de $w, G_U(z_0, f(w))$ compleix les condicions a), b) i c) al domini U' i per al punt $w_0 \in U'$.

En primer lloc, sabem per la proposició 8.9 que si w tendeix cap a un punt de $\partial U'$, llavors $f(w)$ tendeix cap a la frontera de U . Com que $G_U(z_0, z)$ s'anul·la a ∂U i U és acotat, això prova que $G_U(z_0, f(w))$ és contínua fins a $\partial U'$ i val zero en aquesta frontera. És clar que aquesta funció és harmònica a $U' \setminus \{w_0\}$, perquè és la composició d'una funció holomorfa amb una funció harmònica.

Finalment, sabem que existeix una funció h harmònica a U , tal que $G_U(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |z - z_0| = -h(z)$, $z \in U$. Per tant, $G_U(z_0, f(w)) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |f(w) - z_0| = -h(f(w))$ és harmònica a U' . Així doncs,

$$G_U(z_0, f(w)) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |w - w_0| = h(f(w)) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |w - w_0| + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |f(w) - z_0|,$$

que és una funció harmònica a U' , ja que

$$\operatorname{Log} |f(w) - z_0| - \operatorname{Log} |w - w_0| = \operatorname{Log} \left| \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} \right|$$

i $\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}$ és holomorfa i no nul·la al voltant de w_0 . □

Exemple 9.20. Considerem com a domini el disc unitat $\mathbb{D}$. La funció de Green de $\mathbb{D}$ amb pol a l'origen és

$$G_{\mathbb{D}}(0, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |z|,$$

ja que, clarament, compleix les condicions a), b) i c). Si ara volem determinar la funció de Green amb pol en un altre punt $z_0 \in \mathbb{D}$, prenem la representació conforme $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, que compleix $\tau(z_0) = 0$. És la funció

$$\tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

i, per tant, la proposició 9.19 ens dona

$$G_{\mathbb{D}}(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|. \quad \square$$

Exemple 9.21. Sigui ara U un domini acotat i simplement connex del pla, $z_0 \in U$ i busquem la funció de Green de U amb pol z_0 . No sabem, en aquest moment, si el problema de Dirichlet es pot resoldre a U (més endavant veurem que sí), però el que sí que sabem, pel teorema de Riemann, és que existeix una representació conforme f de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$, tal que $f(z_0) = 0$. Fent servir aquesta transformació f , la proposició 9.19 ens dona

$$G_U(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |f(z)|, \quad z \in U \setminus \{z_0\}. \quad \square$$

Així doncs, d'acord amb l'exemple anterior, el coneixement de la representació conforme d'un domini simplement connex sobre el disc ens permet de construir la funció de Green del domini. Ara veurem que, recíprocament, la funció de Green permet construir la representació conforme.

Proposició 9.22. *Sigui U un domini simplement connex i acotat del pla i $z_0 \in U$. Si existeix la funció de Green de U amb pol a z_0 , llavors existeix una representació conforme f de U sobre el disc unitat $\mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) > 0$.*

Demostració. Si $G_U(z_0, z)$ és la funció de Green amb pol a z_0 , sabem que hi ha una funció h , contínua a $\bar{U}$ i harmònica a U , tal que

$$G_U(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |z - z_0| = -h(z).$$

Com que U és simplement connex, la funció h té una funció harmònica conjugada a U , sigui $\tilde{h}$. Considerem la funció $f(z_0, z)$ definida per

$$f(z_0, z) = (z - z_0)e^{-2\pi(h(z) + i\tilde{h}(z))}$$

de manera que $f(z_0, z)$ és una funció holomorfa de z a U , que té un zero simple en el punt z_0 i $|f(z_0, z)| = |z - z_0|e^{-h(z)}$ tendeix cap a 1 quan $z \rightarrow \partial U$, perquè $h(z) = \frac{1}{2\pi} \text{Log } |z - z_0|$, si $z \in \partial U$. Com que $|f(z_0, z)|$ és contínua a $\overline{U}$, resulta, pel principi del màxim, que $|f(z_0, z)| \leq 1$, $z \in U$; és a dir, $f(z_0, z)$ aplica U en el disc unitat i s'anul·la en el punt z_0 . Només cal veure que $f(z_0, z)$ és injectiva a U i que pren tot valor w , $w \in \mathbb{D}$, i llavors la proposició quedarà provada agafant $f(z) = f(z_0, z)$, ja que la condició $f'(z_0) > 0$ s'aconsegueix canviant $f(z)$ per $e^{i\theta} f(z)$, amb $\theta \in \mathbb{R}$ adequat.

a) $f(z_0, z)$ és injectiva a U .

Si $z_1 \in U$ definim la funció de z

$$\varphi(z_0, z_1, z) = \frac{f(z_0, z) - f(z_0, z_1)}{1 - \overline{f(z_0, z_1)}f(z_0, z)}$$

de manera que φ és holomorfa a U , $|\varphi(z_0, z_1, z)| \leq 1$ i $\varphi(z_0, z_1, z_1) = 0$. Com que la funció $f(z_1, z)$, construïda de manera anàloga a la funció $f(z_0, z)$ però canviant z_0 per z_1 , té un zero simple en el punt z_1 , resulta que la funció

$$h(z) = \frac{\varphi(z_0, z_1, z)}{f(z_1, z)}$$

és holomorfa a U i $|h(z)| = 1$ si $z \in \partial U$. Pel principi del màxim, és $|h(z)| \leq 1$, $z \in U$. Ara bé,

$$|h(z_0)| = \left| \frac{f(z_0, z_1)}{f(z_1, z_0)} \right| \leq 1,$$

i com que z_0, z_1 són dos punts qualssevol de U , es poden intercanviar entre si per a obtenir $|f(z_0, z_1)| = |f(z_1, z_0)|$, que dóna lloc a $|h(z_0)| = 1$. Així doncs, la funció $|h|$ agafa el seu màxim en un punt de U i ha de ser $|h(z)| = 1$, per a $z \in U$.

La definició de h dóna ara

$$|\varphi(z_0, z_1, z)| = |f(z_1, z)| \neq 0 \quad \text{si } z \neq z_1,$$

i, per tant, $f(z_0, z) \neq f(z_0, z_1)$ si $z \neq z_1$. Això prova que $f(z_0, z)$ és injectiva.

b) $f(z_0, z)$ és exhaustiva.

Sigui $w \in \mathbb{D}$ i suposem que $f(z_0, z)$ no prengués el valor w a U . Llavors la funció

$$g(z) = \frac{f(z_0, z) - w}{1 - \bar{w}f(z_0, z)}$$

seria holomorfa de U a $\mathbb{D}$ amb $g(z) \neq 0$, $z \in U$. Però $|g(z)| = 1$ si $z \in \partial U$, i, per tant, la funció $\frac{1}{g(z)}$ també seria holomorfa i $\left|\frac{1}{g(z)}\right| = 1$ si $z \in \partial U$. El principi del màxim implica que $|g(z)| = 1$ per a $z \in U$, i això és impossible perquè, prenent $z = z_0$, resulta $|g(z_0)| = |w| < 1$. Aquesta contradicció prova l'afirmació b). $\square$

La prova que hem donat de la proposició anterior es troba a [8, pàg. 137].

La proposició 9.22 obre la via cap a un camí per a demostrar el teorema de Riemann sobre representació conforme, alternatiu a l'ús de les famílies normals en què es basa la demostració que hem donat a la secció 9.2. Aquest camí consisteix a veure, en primer lloc, que n'hi ha prou de demostrar el teorema de Riemann per a dominis simplement connexos acotats i, en segon lloc, a provar que en aquests dominis hi ha funció de Green.

El primer punt és senzill i, de fet, ja s'ha vist en l'apartat A) de la prova que hem donat del teorema de Riemann en la secció 9.2. La segona part és més difícil i consisteix a veure que tot domini simplement connex i acotat U té funció de Green. Tal com sabem, això vol dir poder resoldre el problema de Dirichlet a U amb uns determinats valors a la frontera.

Aquesta nova estratègia per a provar el teorema fonamental de la representació conforme va ser, precisament, la que va seguir Riemann, però la prova que ell va donar del teorema fonamental era incompleta perquè li faltava una demostració rigorosa de l'existència de solució per al problema de Dirichlet.

L'existència de solució per al problema de Dirichlet en general va ser enunciada pel mateix Dirichlet, però ni Riemann quan va establir el seu teorema l'any 1851, ni Dirichlet quan va fer explícita l'existència de solució al seu problema l'any 1857, no en tenien cap demostració correcta. L'existència de solució al problema de Dirichlet era, però, admesa com a certa basant-se en l'anomenat principi de Dirichlet. D'aquest principi ja n'hem parlat en la secció 7.12, i recordem que estableix el següent:

Si tenim un domini acotat U i una funció φ contínua a ∂U , es tracta de buscar una funció u tal que $\Delta u = 0$ a U i $u|_{\partial U} = \varphi$. Per a això es considera el funcional, anomenat integral de Dirichlet,

$$I(u) = \int_U |\vec{\nabla} u|^2 dx dy.$$

Ara, donada la funció φ , es minimitza el funcional I entre totes les funcions $u \in C^1(\overline{U})$ que compleixen $u|_{\partial U} = \varphi$. Llavors resulta que si u_0 és un mínim absolut d'aquest problema, u_0 és una funció harmònica a U i, per tant, u_0 és la solució del problema de Dirichlet a U amb valor frontera φ . L'error que va fer Dirichlet és que no demostrava l'existència d'una funció que minimitzi la integral de Dirichlet.

Per tant, si volem seguir el camí de Riemann de manera correcta, haurem de provar rigorosament que en un domini simplement connex i acotat el problema de Dirichlet té solució. Tal com s'ha dit al final de la secció 7.12, la manera de fer-ho és utilitzant el mètode de Perron, del qual parlem en la secció següent.

9.4 Solució del problema de Dirichlet en un domini qualsevol

El mètode de Perron per a la solució del problema de Dirichlet és completament general i no es limita, per tant, al cas de dominis simplement connexos. Es basa en l'ús de les funcions subharmòniques, i per aquest motiu cal començar amb la definició i les propietats d'aquesta classe de funcions.

9.4.1 Funcions subharmòniques

En una variable l'equació de Laplace s'escriu $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$, i les seves solucions, és a dir, les funcions harmòniques, són de la forma $u = ax + b$, que són les funcions lineals. Si a una funció v li imposen que, per a cada interval de la recta, v estigui per sota de la funció lineal que coincideix amb v en els extrems de l'interval, estem dient que v sigui convexa. El mateix plantejament en dues variables (i també en més variables) ens porta al concepte de funció subharmònica. És a dir, una funció subharmònica v serà una funció que en qualsevol regió del pla estigui per sota de la funció harmònica que coincideix amb v a la frontera de la regió. Com que aquesta formulació pressuposa considerar una funció harmònica amb valors prefixats a la frontera d'una regió, és a dir, resoldre el problema de Dirichlet, donarem una definició alternativa de funció subharmònica.

Definició 9.23. *Direm que una funció real v contínua en un obert U del pla complex és subharmònica a U si compleix*

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad (9.6)$$

per a $z_0 \in U$ i $r > 0$ tals que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$.

La desigualtat (9.6) s'anomena *desigualtat de la mitjana*. És clar que tota funció real harmònica a U és subharmònica a U perquè, en aquest cas, es compleix la igualtat a (9.6). També és evident, a partir de la definició, que si u és harmònica a U , llavors $|u|$ és subharmònica a U . Així, si f és holomorfa, $|f|$ és subharmònica.

Les propietats següents són conseqüència directa de la definició.

Proposició 9.24. *Si v_1 i v_2 són funcions subharmòniques a U , llavors també ho són les funcions:*

a) $v_1 + v_2$

b) αv_1 si $\alpha > 0$

c) $v = \max\{v_1, v_2\}$.

Demostració. Les afirmacions a) i b) són evidents a partir de (9.6). Per a c) suposem que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Llavors hom té

$$v_j(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_j(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad j = 1, 2$$

i, per tant, $v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$. □

Una de les propietats més remarcables de les funcions subharmòniques és que, igual que les funcions harmòniques, compleixen el principi del màxim.

Proposició 9.25 (Principi del màxim per a funcions subharmòniques).

Sigui v una funció subharmònica en un domini U tal que $v(z) \leq M$, $z \in U$, on $M \geq 0$ és una constant. Si existeix un punt $z_0 \in U$ en el qual $v(z_0) = M$, llavors $v(z) = M$, per a tot $z \in U$.

Demostració. Només cal repetir la demostració que vam fer per a provar el principi del màxim per a funcions harmòniques (teorema 7.19). Si $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, de (9.6) es dedueix

$$v(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} v(z) dm(z)$$

i, per tant, ara tenim

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} [v(z) - v(z_0)] dm(z) \geq 0,$$

però l'integrand compleix $v(z) - v(z_0) \leq 0$ si $v(z_0) = M$ i ha de ser idènticament nul en el disc $D(z_0, r)$. $\square$

Corol·lari 9.26. *Sigui u una funció harmònica al domini acotat U i contínua a $\overline{U}$ i sigui v una funció subharmònica a U tal que $\lim_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq u(\xi)$ per a cada $\xi \in \partial U$. Llavors és $v(z) \leq u(z)$ per a tot $z \in U$.*

Demostració. Com que $v - u$ és subharmònica, podem suposar que $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq 0$, $\xi \in \partial U$ i provar que $v(z) \leq 0$, $z \in U$. Ara la funció $w(z) = \max(v(z), 0)$ és subharmònica i compleix $\lim_{z \rightarrow \xi} w(\xi) = 0$, $\xi \in \partial U$. Per tant, si definim $w(\xi) = 0$ quan $\xi \in \partial U$, w és contínua a $\overline{U}$, subharmònica a U i nul·la a ∂U . Així, la funció w agafa el seu màxim en algun punt $z_0 \in \overline{U}$. Si $w(z_0) > 0$, hauria de ser $z_0 \in U$, i, per la proposició 9.25, w seria constant, fet que contradiu que $w(\xi) = 0$, si $\xi \in \partial U$. Per tant, $w(z_0) = 0$, que dóna ara $w(z) = 0$, $z \in U$ i, en conseqüència, $v(z) \leq 0$, $z \in U$. $\square$

Aquest corol·lari expressa la idea que una funció subharmònica està per sota d'una funció harmònica que coincideix amb ella a la frontera d'un domini i que hem formulat al principi d'aquest apartat, en analogia amb el comportament de les funcions convexes d'una variable real. En aquest cas, sabem també que la funció v és convexa si i només si $v'' \geq 0$, almenys en el cas que v sigui dues vegades derivable. El paral·lisme amb les funcions subharmòniques es manté i es pot provar, tot i que no ho farem aquí, que si v té derivades parcials de segon ordre contínues, llavors v és subharmònica a U si i només si $\Delta v(z) \geq 0$, $z \in U$ (vegeu l'exercici 13 del capítol 3 i l'exercici 3 del capítol 7).

En el cas d'un disc D , el problema de Dirichlet ja ha estat resolt en el teorema 7.26 (vegeu també l'exemple 7.51). Sabem que si φ és contínua a ∂D , llavors la solució al problema de Dirichlet a D amb valors frontera φ està donada per la integral de Poisson de φ , que denotem per $P[\varphi]$. Així, $P[\varphi]$ és una funció harmònica a D , que compleix $\lim_{z \rightarrow z_0} P[\varphi](z) = \varphi(z_0)$ per a cada $z_0 \in \partial D$.

Sigui ara v una funció subharmònica a l'obert U i D un disc tal que $\overline{D} \subset U$. Definim la funció $\tilde{v}$ a U per

$$\begin{cases} \tilde{v}(z) = P[v](z) & \text{si } z \in D \\ \tilde{v}(z) = v(z) & \text{si } z \in U \setminus D. \end{cases} \quad (9.7)$$

És a dir, $\tilde{v}$ és la funció v fora del disc D i a D és la funció harmònica que val v a ∂D .

El principi del màxim té com a conseqüència la proposició següent.

Proposició 9.27. *Sigui v una funció subharmònica a U , D un disc tal que $\overline{D} \subset U$ i $\tilde{v}$ la funció definida a U per (9.7). Llavors $\tilde{v}$ és subharmònica a U i $v(z) \leq \tilde{v}(z)$, $z \in U$.*

Demostració. Pel principi del màxim (corol·lari 9.26) sabem que $v(z) \leq \tilde{v}(z)$, si $z \in D$. Per tant, $v(z) \leq \tilde{v}(z)$, per a $z \in U$. També és clar que $\tilde{v}(z)$ és contínua a U .

Ara, si $z_0 \in D$, tenim $\tilde{v}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{v}(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$, si r és prou petit, perquè $\tilde{v}$ és harmònica a D . Si $z_0 \notin D$ i $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, tenim

$$\tilde{v}(z_0) = v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{v}(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

i, per tant, $\tilde{v}$ és subharmònica a U . □

9.4.2 El mètode de Perron

Sigui U un domini acotat del pla i φ una funció real i contínua definida a la frontera de U . El mètode de Perron associa al parell U, φ una funció u harmònica a U que a la frontera de U està per sota de φ . Amb determinades condicions de regularitat de ∂U , u és la solució del problema de Dirichlet a U amb valors frontera φ .

Per tal de construir la funció u , definim la classe $\mathcal{P}(\varphi)$ formada per les funcions v que compleixen les condicions:

- a) v és subharmònica a U .
- b) $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq \varphi(\xi)$, per a cada $\xi \in \partial U$.

Observem que la classe $\mathcal{P}(\varphi)$ no és buida. En efecte, com que φ és contínua sobre el compacte ∂U , hi ha una constant $M > 0$, tal que $-M \leq \varphi(z) \leq M$, $z \in \partial U$ i la funció constant igual a $-M$ és de $\mathcal{P}(\varphi)$. Aplicant el corol·lari 9.26 es veu també que cada funció $v \in \mathcal{P}(\varphi)$ compleix $v(z) \leq M$, per a $z \in U$.

La funció harmònica que busquem serà

$$u(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi)\}, \quad z \in U. \quad (9.8)$$

Pel que acabem de dir, és $u(z) \leq M$ per a $z \in U$, si $|\varphi(z)| \leq M$, $z \in \partial U$.

Proposició 9.28. *La funció definida per $u(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi)\}$ és harmònica a U .*

Demostració. N'hi ha prou d'agafar un disc D amb $\bar{D} \subset U$ i provar que u és harmònica a D .

Fixem, de moment, $z_0 \in U$. Per la definició de u existeixen funcions $v_n \in \mathcal{P}(\varphi)$, $n = 1, 2, \dots$ de manera que $\lim_n v_n(z_0) = u(z_0)$. Posem $V_n = \max\{v_1, \dots, v_n\}$ i per a cada n sigui, com abans, $\tilde{V}_n$ la funció que coincideix amb V_n a $U \setminus D$ i que sobre D és la funció harmònica que val V_n a ∂D . És clar que la successió (V_n) és monòtona creixent i, pel principi del màxim, també ho és la successió $(\tilde{V}_n)$. Per les proposicions 9.25 i 9.27 també sabem que tant V_n com $\tilde{V}_n$ són funcions de $\mathcal{P}(\varphi)$.

Les desigualtats

$$v_n(z_0) \leq V_n(z_0) \leq \tilde{V}_n(z_0) \leq u(z_0)$$

proven que $\lim_n \tilde{V}_n(z_0) = u(z_0) \leq M$. Ara, pel corollari 9.15, la successió $\tilde{V}_n$ convergeix a D cap a una funció harmònica $\tilde{u}$. Aquesta funció compleix $\tilde{u}(z) \leq u(z)$, per a $z \in D$ i $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$. Si ara provem que $u(z_1) = \tilde{u}(z_1)$ per a qualsevol altre punt $z_1 \in D$, la proposició quedarà demostrada perquè, aleshores $u \equiv \tilde{u}$ a D i u serà harmònica.

Fixem ara $z_1 \in D$ i repetim el procés anterior. Agafem funcions $w_n \in \mathcal{P}(\varphi)$, $n = 1, 2, \dots$ amb $\lim_n w_n(z_1) = u(z_1)$, però substituïm w_n per $w'_n = \max\{v_n, w_n\}$ i a continuació posem $W_n = \max\{w'_1, \dots, w'_n\}$, i $\tilde{W}_n$ serà la funció que val W_n , $U \setminus D$ i que a D és la funció harmònica que val W_n sobre ∂D . Com que $(\tilde{W}_n)$ és una successió creixent de funcions de $\mathcal{P}(\varphi)$ que són harmòniques a D , tendirà cap a un límit $\tilde{u}_1(z)$ que serà una funció harmònica a D i que complirà

$$\tilde{u}(z) \leq \tilde{u}_1(z) \leq u(z), \quad z \in D \quad \text{i} \quad \tilde{u}_1(z_1) = u(z_1).$$

Per tant, la funció $\tilde{u} - \tilde{u}_1$ pren el valor màxim igual a zero en el punt z_0 i, pel principi del màxim, és $\tilde{u}(z) = \tilde{u}_1(z)$, $z \in D$. Així doncs, $\tilde{u}(z_1) = \tilde{u}_1(z_1) = u(z_1)$, tal com volíem provar. $\square$

Per tal de resoldre el problema de Dirichlet a U amb valors a la frontera φ , es tracta de saber ara si la funció harmònica u que hem construït compleix la condició $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = \varphi(z_0)$, per a cada punt $z_0 \in \partial U$. Anomenarem regulars els punts de ∂U en els quals aquesta condició es compleix per a qualsevol φ :

Definició 9.29. Direm que un punt ξ_0 de la frontera d'un domini acotat U és un punt regular de U si per a tota funció φ definida i contínua a la frontera de U es compleix

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi_0 \\ z \in U}} u(z) = \varphi(\xi_0),$$

on u és la funció harmònica a U definida per (9.8).

Convé observar, en aquest punt, que si el problema de Dirichlet a U amb valors frontera φ té solució, llavors aquesta solució necessàriament és la solució de Perron donada per (9.8). Per veure-ho només cal observar que si h és solució del problema de Dirichlet, aleshores $h \in \mathcal{P}(\varphi)$ i, per tant, $h(z) \leq u(z)$, $z \in U$. Però també cada funció $v \in \mathcal{P}(\varphi)$ compleix $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq \varphi(\xi) = h(\xi)$ si $\xi \in \partial U$ i, pel principi del màxim, serà $v(z) \leq h(z)$, $z \in U$ i, en conseqüència, $u(z) \leq h(z)$, $z \in U$.

Exemple 9.30. Per posar un exemple d'un punt no regular, considerem el disc puntejat $U = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ i el punt $0 \in \partial U$. Si prenem com a φ la funció que val 0 sobre el cercle unitat i $\varphi(0) = 1$, llavors el problema de Dirichlet corresponent no té solució i, per tant, l'origen no és un punt regular de U . En efecte, si u fos contínua a $\overline{U}$ amb valor φ a ∂U i harmònica a U , l'origen seria una singularitat evitable de u (corol·lari 5.21), és a dir, u seria harmònica a tot el disc $\mathbb{D}$ i nul·la a $\partial \mathbb{D}$. Pel principi del màxim u hauria de ser idènticament nul·la a $\mathbb{D}$, però en canvi $u(0) = \varphi(0) = 1$. $\square$

De cara a trobar condicions per tal que un punt $\xi_0 \in \partial U$ sigui regular, resolldrem el problema de Dirichlet per a uns valors frontera especials. Fixem $\xi_0 \in \partial U$ i suposem que ξ_0 és un punt regular. Prenem $\varphi(\xi) = |\xi - \xi_0|$, $\xi \in \partial U$, i sigui u la solució de Perron corresponent. Com que la funció $|z - \xi_0|$ és subharmònica, és una funció de $\mathcal{P}(\varphi)$ i, per tant, serà $u(z) \geq |z - \xi_0|$, $z \in U$. Si ara posem $h(z) = -u(z)$, h serà una funció harmònica a U que complirà

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} h(z) = -\varphi(\xi_0) = 0, \quad \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in U}} h(z) \leq -|\xi - \xi_0| < 0, \quad \text{per a } \xi \in \partial U, \quad \xi \neq \xi_0.$$

És a dir, la funció h és harmònica, nul·la a ξ_0 i té un “valor” estrictament negatiu en els punts de ∂U que no són ξ_0 .

El que acabem de veure justifica la definició següent:

Definició 9.31. Si ξ_0 és un punt de la frontera del domini acotat U , una barrera en el punt ξ_0 és una funció h harmònica a U tal que

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} h(z) = 0 \quad i \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} h(z) < 0, \quad \text{per a } \xi \in \partial U, \quad \xi \neq \xi_0.$$

Exemple 9.32. a) Si $U = \mathbb{D}$ és el disc unitat i $\xi_0 \in \partial \mathbb{D}$, una barrera a ξ_0 és la funció $h(z) = \operatorname{Re}(z\bar{\xi}_0) - 1$. Només cal observar que $\operatorname{Re}(z\bar{\xi}_0) = 1$ és l'equació de la recta tangent a $\partial \mathbb{D}$ en el punt ξ_0 .

b) Suposem ara que $\xi_0 \in \partial U$ i que existeix un segment L que té un extrem a ξ_0 , tal que $L \setminus \{\xi_0\}$ està contingut a l'exterior de U . Llavors podem construir una barrera en el punt ξ_0 de la manera següent: si ξ_1 és l'altre extrem

de L , la funció $(z - \xi_0)/(z - \xi_1)$ no s'anul·la en el domini simplement conex $\mathbb{C}^* \setminus U$ i, per tant, existeix en aquest domini una determinació holomorfa de $\sqrt{(z - \xi_0)/(z - \xi_1)}$ (si es vol, es pot passar a un domini de $\mathbb{C}$ aplicant la transformació $z^* = \frac{1}{z}$). Aquesta determinació transforma $\mathbb{C}^* \setminus L$ en un semiplà limitat per una recta que passa per l'origen, que la podem convertir en l'eix imaginari amb un gir d'angle α , per a algun $\alpha \in \mathbb{R}$. Això vol dir que la funció harmònica

$$h(z) = \operatorname{Re} \left(e^{i\alpha} \sqrt{\frac{z - \xi_0}{z - \xi_1}} \right)$$

és negativa a $\partial U \setminus (\xi_0)$ i compleix $h(\xi_0) = 0$.

c) Un cas particular de b) és quan la frontera de U és regular en el punt ξ_0 , és a dir, quan la frontera de U està formada, al voltant de ξ_0 , per una corba de classe C^1 amb tangent no nul·la. Llavors $\mathbb{C} \setminus U$ conté, en el seu interior, un segment en la direcció de la normal a ∂U . $\square$

El resultat següent prova que l'existència de barreres no només és necessària, sinó també suficient per a la regularitat d'un punt de la frontera.

Proposició 9.33. *Sigui ξ_0 un punt de la frontera del domini acotat U i suposem que existeix una barrera en el punt ξ_0 . Llavors ξ_0 és un punt regular de U .*

Abans de procedir a la prova d'aquest resultat, fem una observació sobre el mètode de Perron que ens serà útil. Aquest mètode associa a cada funció φ contínua a ∂U una funció u harmònica a U d'acord amb (9.8) i la proposició 9.28. Doncs bé, aquesta assignació és *superlineal* en el sentit següent:

Siguin $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\partial U)$ i siguin u_1, u_2 les funcions harmòniques associades a φ_1, φ_2 per (9.8). Llavors la funció harmònica associada a $\varphi_1 + \varphi_2$ és més gran o igual que $u_1 + u_2$. Expressat d'una altra manera,

$$\sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi_1 + \varphi_2)\} \geq \sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi_1)\} + \sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi_2)\}.$$

La prova d'aquesta desigualtat és immediata a partir de la definició de la classe $\mathcal{P}(\varphi)$.

Demostració de la proposició 9.33. Sigui φ contínua a ∂U i suposem $|\varphi(\xi)| \leq M$, $M > 0$, per a $\xi \in \partial U$. Fixem $\xi_0 \in \partial U$ i sigui h una barrera en el punt ξ_0 . Si u és la funció harmònica associada a φ per (9.8), es tracta de provar la igualtat

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} u(z) = \varphi(\xi_0)$$

i per a això és suficient provar, per a tot $\varepsilon > 0$, les desigualtats

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \leq \varphi(\xi_0) + \varepsilon, \quad \underline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \geq \varphi(\xi_0) - \varepsilon.$$

Donat $\varepsilon > 0$, triem un $\delta > 0$ de manera que

$$\varphi(\xi_0) - \varepsilon \leq \varphi(\xi) \leq \varphi(\xi_0) + \varepsilon \quad \text{si } \xi \in \partial U \cap D_\delta(\xi_0).$$

Segui $m = \sup\{h(z) : z \in U \setminus D_\delta(\xi_0)\}$. Pel principi del màxim i pel fet que $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} h(z) < 0$ si $\xi \neq \xi_0$, ha de ser $m < 0$. Posem ara

$$v(z) = \varphi(\xi_0) - \varepsilon - \frac{h(z)}{m}(M + \varphi(\xi_0))$$

de manera que v és harmònica a U i compleix

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq \varphi(\xi_0) - \varepsilon \leq \varphi(\xi) \quad \text{si } \xi \in \partial U \cap D_\delta(\xi_0) \quad \text{i}$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq -M - \varepsilon \leq \varphi(\xi) \quad \text{si } \xi \in \partial U \setminus D_\delta(\xi_0).$$

Per tant, $v \in \mathcal{P}(\varphi)$ i tenim $v(z) \leq u(z)$, $z \in U$, i d'aquí

$$\underline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \geq \underline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} v(z) = \varphi(\xi_0) - \varepsilon.$$

Si ara repetim el raonament anterior canviant φ per $-\varphi$ i u per la funció de Perron associada a $-\varphi$, sigui u_1 , obtindrem

$$\underline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u_1(z) \geq -\varphi(\xi_0) - \varepsilon.$$

Ara bé, per l'observació que hem fet després de l'enunciat de la proposició 9.33 sabem que $u(z) + u_1(z) \leq 0$. Així doncs,

$$u(z) \leq -u_1(z) \text{ i } \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u(z) \leq \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} (-u_1(z)) = -\underline{\lim}_{z \rightarrow \xi_0} u_1(z) \leq \varphi(\xi_0) + \varepsilon,$$

que és l'altra desigualtat que necessitàvem. □

Corollari 9.34. *El problema de Dirichlet es pot resoldre a qualsevol domini acotat U que tingui la propietat que cada punt de ∂U és l'extrem d'un segment que té tots els altres punts exteriors a U . Això passa, en particular, si ∂U està formada per un nombre finit de corbes regulars.*

Demostració. D'acord amb les parts b) i c) de l'exemple 9.32, a cada punt de ∂U hi ha una barrera i ara s'aplica la proposició 9.33. $\square$

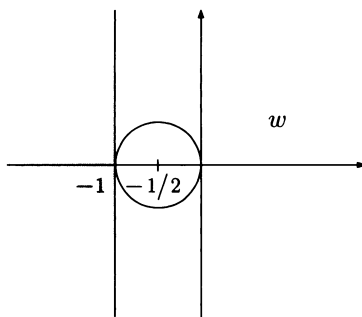


Figura 9.1

9.4.3 Construcció de barreres per a dominis simplement connexos i el teorema de Riemann

Tal com hem exposat en la secció 9.3, per a demostrar el teorema fonamental de la representació conforme seguint el camí proposat per Riemann ens cal provar que el problema de Dirichlet té solució a tot domini acotat simplement connex del pla. Per a això és suficient, d'acord amb la proposició 9.33, establir el resultat següent.

Proposició 9.35. *Si U és un domini acotat i simplement connex de $\mathbb{C}$, a tot punt de la frontera de U hi ha una barrera.*

Demostració. Fixem $\xi_0 \in \partial U$ i construïm una barrera a ξ_0 . Si $\xi_1 \notin U$ està prou allunyat de U , el conjunt $A = \{z: |z - \xi_0| < \frac{1}{e}|z - \xi_1|\}$ és un obert que conté U . Com que U és simplement connex, la funció $\text{Log} \frac{z - \xi_0}{z - \xi_1}$ té una determinació holomorfa a U , diguem-ne f . Ara, si $z \in U \subset A$, és $\text{Re } f(z) = \text{Log} \left| \frac{z - \xi_0}{z - \xi_1} \right| < -1$, és a dir, f pren els seus valors en el semiplà $\{w: \text{Re } w < -1\}$ (fig. 9.1).

L'aplicació $w \rightarrow \frac{1}{w}$ transforma aquest semiplà en el disc $D(-1/2, 1/2)$ i, per tant, la funció $\frac{1}{f(z)}$, holomorfa a U , pren els seus valors en el disc $D(-1/2, 1/2)$. La funció $h(z) = \text{Re} \frac{1}{f(z)}$ és harmònica a U i compleix $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} h(z) \leq 0$, si $\xi \in \partial U$. Però $\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} h(z) = 0$ només passa quan $\lim_{z \rightarrow \xi} \text{Re } f(z) = -\infty$, i això només pot ser si $\xi = \xi_0$. Per tant, h és una barrera en el punt ξ_0 . $\square$

Corol·lari 9.36. *El problema de Dirichlet té solució a tot domini acotat simplement connex del pla.*

Observació 9.2. La proposició 9.35 no es dedueix del corol·lari 9.34 perquè si U és simplement connex i $\xi_0 \in \partial U$, pot ser que no hi hagi cap segment amb un extrem a ξ_0 i contingut a $\mathbb{C} \setminus U$. Per exemple, podem pensar en una banda que va disminuint d'amplada, la qual enrotllem en forma d'una espiral, U , que fa infinites voltes al voltant de l'origen. Llavors $0 \in \partial U$ i en qualsevol direcció que prenguem per sortir de l'origen trobarem punts de U (fig. 9.2).

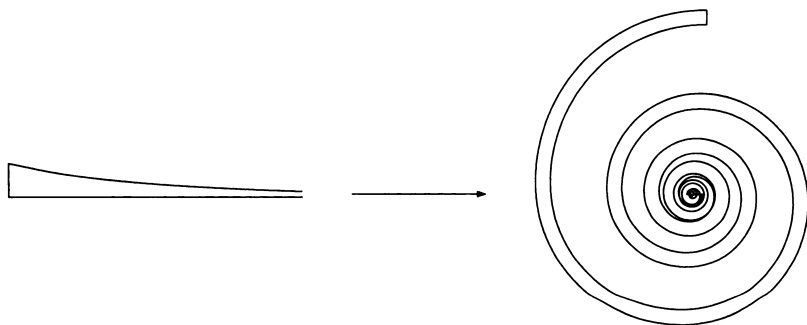


Figura 9.2

Per acabar, es tracta de fer veure només que els ingredients que tenim ara donen la segona prova del teorema de Riemann (teorema 9.18) que hem anunciat.

Si $U \neq \mathbb{C}$ és un domini simplement connex, és fàcil veure que U es pot representar conformement en un domini simplement connex i acotat. N'hi ha prou, seguint la demostració de A) de la secció 9.2, d'agafar $g(z)$ com una determinació de $\sqrt{z-a}$, $a \notin U$, la qual és holomorfa i injectiva a U i compleix $|g(z) + g(z_0)| \geq r$ per a un punt $z_0 \in U$ i un $r > 0$. Llavors la funció $g_1(z) = \frac{1}{g(z) + g(z_0)}$ aplica U conformement en un domini acotat.

Suposant, doncs, U acotat i simplement connex, podem resoldre el problema de Dirichlet a U amb valors frontera $z \rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{Log}|z - z_0|$, d'acord amb el corol·lari 9.36. Ara bé, si h és la funció harmònica solució d'aquest problema de Dirichlet, la funció $G_U(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} \text{Log}|z - z_0| - h(z)$, $z \in U \setminus \{z_0\}$, és la funció de Green de U amb pol z_0 (secció 9.3), i ja només cal aplicar la proposició 9.22 per acabar la prova del teorema de Riemann.

9.5 Exercicis

1. Proveu que si $\mathbb{D}$ és el disc unitat, l'espai $H(\mathbb{D}) \cap L^1(\mathbb{D})$ és un subespai tancat de $L^1(\mathbb{D})$.
2. Sigui U un domini de $\mathbb{C}$ i $\mathcal{F}$ una família de funcions holomorfes a U . Proveu que si per a cada punt $z \in U$ hi ha un entorn $V(z) \subset U$ de manera que $\mathcal{F}$ és normal a $V(z)$, llavors $\mathcal{F}$ és normal a U . (S'ha d'entendre família normal en el sentit de Montel.)
3. Sigui U un domini de $\mathbb{C}$, $f_n \in H(U)$ amb $\lim_n f_n(z) = f(z)$ uniformement sobre els compactes de U . Suposem $f \not\equiv 0$ i que f té m zeros diferents a U . Proveu que, per a n prou avançat, les funcions f_n tenen almenys m zeros diferents a U .

4. Sigui $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió acotada de números complexos. Proveu que la sèrie de funcions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z^n}{1 - z^n}$ convergeix uniformement sobre els compactes de $\mathbb{D}$. Proveu també que si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ és convergent llavors la mateixa sèrie de funcions convergeix uniformement sobre els compactes de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ cap a una funció holomorfa g .

Proveu, en aquest darrer cas, que si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ a $\mathbb{D}$, es compleix

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) \text{ si } |z| < 1 \text{ i } g(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} f(z^{-n}) \text{ si } |z| > 1.$$

5. Sigui U un domini simplement connex del pla, $U \neq \mathbb{C}$ i $f: U \rightarrow U$ una funció holomorfa. Suposem que hi ha un punt $z_0 \in U$ amb $f(z_0) = z_0$ i $|f'(z_0)| < 1$. Proveu que la successió d'iterades de f , (f_n) , on $f_n(z) = (f \circ \dots \circ f)(z)$ per a $n = 1, 2, \dots$ és uniformement convergent sobre els compactes de U i determineu la funció $\lim_n (f_n)$.

Proveu també que la mateixa afirmació és falsa si U és qualsevol domini de $\mathbb{C}$

6. Proveu que una família de funcions holomorfes en un domini U que no pren cap dels valors d'un disc fixat, de radi positiu, és una família normal a U (en el sentit de Montel).
7. Sigui U un domini de $\mathbb{C}$ i $f_n \in H(U)$, $n = 1, 2, \dots$ de manera que $\sup_n |f_n(z)| < +\infty$, per a cada $z \in U$. Proveu que hi ha un subconjunt

$\tilde{U} \subset U$, obert i dens a U , i una funció $f \in H(\tilde{U})$ amb $f(z) = \lim_n f_n(z)$, uniformement sobre els compactes de $\tilde{U}$.

Indicació: Feu servir el teorema de Baire.

8. En un domini U siguin $f_n \in H(U)$, $n = 1, 2, \dots$, $z_0 \in U$ amb $f_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes de U i $f'(z_0) \neq 0$. Proveu que existeixen un entorn V de z_0 , un entorn W de $f(z_0)$ i un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a $n \geq n_0$, f_n i f són injectives a V , $W \subset f_n(V)$ i $f_n^{-1} \rightarrow f^{-1}$ uniformement a W . Digueu què passa en el cas que hom suposi $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, per a algun $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.
9. Sigui (U_n) una successió de dominis simplement connexos de $\mathbb{C}$ amb $U_n \subset U_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ i $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \neq \mathbb{C}$. Sigui $f_n: U_n \rightarrow \mathbb{D}$ la representació conforme que dona el teorema de Riemann ($f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$, per a un punt fixat $z_0 \in U_1$). Proveu que U és un domini simplement connex i que les funcions f_n convergeixen uniformement sobre els compactes de U cap a la representació conforme $f: U \rightarrow \mathbb{D}$ amb $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.
10. Sigui f una funció contínua en un domini $U \subset \mathbb{C}$ i per a cada $r > 0$ posem $U_r = \{z \in U : d(z, U^c) > r\}$ i definim a U_r la funció $f_r(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r f(z + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta$. Proveu que f és holomorfa a U si i només si existeix una successió de números positius $(r_n) \rightarrow 0$ de manera que f_{r_n} és holomorfa a U_{r_n} per a cada $n = 1, 2, \dots$.
11. Proveu que una funció f contínua en un domini U és holomorfa a U si i només si compleix $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$, per a tot disc D tal que $\overline{D} \subset U$.
Indicació: Utilitzeu l'exercici anterior i l'exercici 2 del capítol 3.
12. Sigui U un domini del pla, i K un compacte, $K \subset U$. Proveu que existeixen constants $m, M > 0$ de manera que $m \leq u(z)/u(w) \leq M$ per a tota funció u harmònica i positiva a U i tot parell de punts $z, w \in K$.
13. Sigui U un domini acotat. Definim $d(z, w)$, si $z, w \in U$, com l'ínfim dels números $\text{Log } C$ on C varia en el conjunt de constants $C > 1$ que compleixen: $1/C \leq u(z)/u(w) \leq C$ per a tota funció harmònica positiva a U . Proveu
 - i) $d(z, w) \leq d(z, \tau) + d(\tau, w)$ si $z, w, \tau \in U$.
 - ii) $\lim_n d(z_n, z_0) = 0$ si i només si $|z_n - z_0| \rightarrow 0$, $z_n, z_0 \in U$.
 - iii) Calculeu $d(z, w)$ en el cas que U sigui el disc unitat.

14. Sigui U un domini simplement connex tal que $0 \in U \subset \mathbb{D}$ i sigui $\mathcal{F}$ la família de les funcions $f: U \rightarrow \mathbb{D}$ que són holomorfes i injectives a U amb $f(0) = 0$. Si $z_0 \in U$, $z_0 \neq 0$, posem $S = \sup\{|f(z_0)|: f \in \mathcal{F}\}$. Proveu que existeix una funció $g \in \mathcal{F}$ tal que $|g(z_0)| = S$ i que aquesta funció g aplica U conformement sobre $\mathbb{D}$.

15. Sigui $v: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció subharmònica. Proveu que són equivalents:

$$\text{i) } \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta < \infty.$$

ii) Existeix una funció u harmònica a $\mathbb{D}$ amb $v(z) \leq u(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

16. Sigui U un domini acotat i φ una funció amb derivades de segon ordre contínues a $\overline{U}$. Proveu que φ es pot expressar a U com la diferència de dues funcions subharmòniques.

Indicació: Podeu suposar que φ té suport compacte contingut en un entorn de $\overline{U}$. Expressau $\Delta\varphi$ com a diferència de dues funcions positives i apliqueu l'exercici 13 del capítol 3.

17. Proveu que tot domini simplement connex de $\mathbb{C}^*$ (és a dir que té complementari connex a $\mathbb{C}^*$) és conformement equivalent a un (i només un) dels tres dominis següents:

a) El pla compactificat $\mathbb{C}^*$.

b) El pla finit $\mathbb{C}$.

c) El disc unitat $\mathbb{D}$.

18. Proveu que la funció de Green $G_U(z_0, z)$ d'un domini U és contínua respecte de les dues variables conjuntament per a $z \neq z_0$.

19. Sigui U un domini acotat del pla que té per frontera una corba de Jordan analítica γ (vegeu la secció 8.2). Proveu les propietats següents de la funció de Green de U amb pol $z_0 \in U$, $G(z_0, z)$:

i) $G(z_0, z) > 0$, si $z \in U$, $z \neq z_0$.

ii) Si $\tilde{G}(z_0, z)$ és la reflexió harmònica de G a través de γ , llavors $\tilde{G}(z_0, z) < 0$ si $z \notin \overline{U}$.

iii) $\frac{\partial G}{\partial \vec{N}}(z_0, z) < 0$, per a $z \in \partial U$, on $\vec{N}$ és el vector unitari normal exterior a γ .

- 20.** Sigui U un domini acotat de $\mathbb{C}$ de manera que $\mathbb{C}^* \setminus U$ està format per un nombre finit de conjunts compactes i connexos cada un dels quals té més d'un punt. Proveu que el problema de Dirichlet té solució a U . Proveu també que, en canvi, aquest problema pot no tenir solució a U si algun dels compactes connexos que formen $\mathbb{C}^* \setminus U$ està reduït a un punt.

El teorema de Runge i les equacions de Cauchy-Riemann

En la primera part d'aquest capítol es tracta el problema de l'aproximació de funcions holomorfes per funcions més senzilles, concretament per funcions racionals o per polinomis. El resultat bàsic és el teorema de Runge, que assegura que és possible aproximar tota funció holomorfa en un obert per funcions racionals amb els pols situats en punts prefixats de fora de l'obert. Aquest teorema s'aplica a dos problemes clàssics de l'anàlisi complexa. En el primer es tracta de construir una funció meromorfa a tot el pla o en un obert del pla de manera que tingui predeterminats els pols, així com la seva part principal en aquests pols. La formulació concreta la donen els teoremes del tipus Mittag-Leffler.

En el segon problema es considera la solució de les equacions de Cauchy-Riemann no homogènies, és a dir, es busquen funcions f tals que $\bar{\partial}f = \phi$, on ϕ és una funció donada. El tractament d'aquest problema és paral·lel al que s'ha fet per a l'equació de Poisson, $\Delta u = \phi$, en la secció 7.7. En el cas que la dada ϕ tingui suport compacte a $\mathbb{C}$, la solució de $\bar{\partial}f = \phi$ està donada per la integral de Cauchy de ϕ , la qual fa un paper semblant al del potencial de Riesz en l'equació del laplaciana. Per al cas d'una dada ϕ general en un obert del pla, la solució de les equacions de Cauchy-Riemann es basa en el teorema de Runge. Finalment, s'estudia el problema de Dirichlet corresponent a l'operador $\bar{\partial}$, és a dir, la solució de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ en un domini amb condicions sobre f a la frontera d'aquest domini.

10.1, Els teoremes d'aproximació de Runge

Les funcions racionals i els polinomis constitueixen un dels exemples principals de funcions holomorfes i, en certa forma, són les funcions holomorfes més senzilles. En aquesta secció veurem que, en termes generals, els polinomis i les funcions racionals aproximen totes les funcions holomorfes.

Comencem precisant què entenem per aproximació de funcions. Veurem dos tipus de resultats: els primers fan referència a l'aproximació de funcions sobre compactes, i els segons, a l'aproximació de funcions en conjunts oberts del pla.

Quan es tracta d'aproximar funcions contínues en un compacte $K \subset \mathbb{C}$, ja és ben sabut que la noció d'aproximació adequada és la d'aproximació *uniforme* sobre K . El fet que tota funció d'una classe $\mathcal{A}$ de funcions contínues a K s'aproximi uniformement per funcions d'una altra classe $\mathcal{B}$ sobre K significa que per a tota funció $f \in \mathcal{A}$ i tot $\varepsilon > 0$ hi ha una funció $g \in \mathcal{B}$ tal que

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon, \quad z \in K.$$

Donant a ε els valors $1/n$, $n = 1, 2, \dots$, i triant les corresponents funcions $g_n \in \mathcal{B}$, resulta que l'aproximació uniforme de les funcions de $\mathcal{A}$ per funcions de $\mathcal{B}$ és equivalent a dir que per a tota funció $f \in \mathcal{A}$ hi ha una successió (g_n) de funcions de $\mathcal{B}$ que convergeixen a f uniformement sobre K . I encara un altre punt de vista més abstracte és considerar l'espai mètric $C(K)$ de funcions contínues a K amb la distància

$$d(f_1, f_2) = \max_{z \in K} |f_1(z) - f_2(z)|.$$

Llavors l'aproximació que acabem de descriure s'expressa senzillament per $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}$ a $C(K)$.

Quan es tracta d'aproximar funcions contínues en un obert U , com que genèricament aquestes funcions no són acotades a U , la noció de convergència adequada no és la convergència uniforme a U , sinó la convergència *uniforme sobre compactes* de U (vegeu l'apartat 9.1.1). Dir que tota funció f d'una classe $\mathcal{A}$ de funcions contínues en un obert U s'aproxima uniformement sobre els compactes de U per funcions de la classe $\mathcal{B}$ significa que per a tota $f \in \mathcal{A}$, tot compacte $K \subset U$ i tot $\varepsilon > 0$ hi ha una funció $g \in \mathcal{B}$ tal que $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ per a $z \in K$. És fàcil veure que el fet que tota funció de $\mathcal{A}$ s'aproximi uniformement sobre els compactes de U per funcions de $\mathcal{B}$ és equivalent a l'afirmació següent:

Per a tota funció $f \in \mathcal{A}$ existeix una successió (g_n) de funcions de $\mathcal{B}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$, uniformement sobre cada compacte de U .

En efecte, només cal fer servir el lema 1.15 i prendre, per a cada compacte K_n , $\varepsilon_n = 1/n$ i $g_n \in \mathcal{B}$ la funció que aproxima f sobre K_n amb error més petit que ε_n .

Tant pel que fa a l'aproximació sobre compactes com pel que fa a l'aproximació sobre oberts utilitzarem sovint la propietat de *transitivitat* següent: si una classe $\mathcal{B}$ aproxima totes les funcions de la classe $\mathcal{A}$ i una classe $\mathcal{C}$ aproxima totes les de $\mathcal{B}$, llavors la classe $\mathcal{C}$ aproxima la classe $\mathcal{A}$. La comprovació de la seva validesa és immediata.

Si pretenem aproximar funcions holomorfes per funcions racionals, una observació interessant és el fet que la fórmula integral de Cauchy dóna una indicació de com cal procedir, perquè una integral és un límit de sumes de Riemann i en el cas de la integral de Cauchy, cada una d'aquestes sumes és una funció racional. Aquesta idea es precisa en la proposició següent, preparatòria per al teorema d'aproximació de Runge.

Proposició 10.1. *Sigui γ un camí del pla complex i F la funció holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definida per la integral de Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \notin \gamma^*,$$

on f és una funció contínua sobre γ^* . Sigui K un compacte de $\mathbb{C}$ disjunt amb γ^* i $\varepsilon > 0$ arbitrari. Aleshores hi ha una funció racional R amb pols simples a γ^* tal que

$$|F(z) - R(z)| < \varepsilon, \quad z \in K.$$

Demostració. Posem que el camí γ estigui definit per $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$. La continuïtat uniforme de la funció $f(\gamma(t))/(\gamma(t) - z)$ per a $t \in [a, b]$ i $z \in K$ implica l'existència d'una partició $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_i))}{\gamma(t_i) - z} \right| < \frac{2\pi\varepsilon}{M(b-a)}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad z \in K,$$

on M és una cota superior de $|\gamma'(t)|$, $a \leq t \leq b$. Considerem ara la funció racional

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)).$$

Aleshores hom té

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - R(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right) \gamma'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi\varepsilon}{M(b-a)} (b-a) = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

La proposició següent es coneix com el “mètode de translació de pols” perquè permet canviar la ubicació dels pols de les funcions racionals que aproximem una funció donada.

Proposició 10.2. *Sigui K un compacte de $\mathbb{C}$. Llavors hom té:*

- Si V és una component connexa de $\mathbb{C} \setminus K$ i $a, b \in V$, la funció $1/(z - a)$ es pot aproximar uniformement sobre K per polinomis en $1/(z - b)$ (és a dir, funcions racionals holomorfes en el punt ∞ amb un únic pol en el punt b).*
- Si V_∞ és la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ i $a \in V_\infty$, la funció $1/(z - a)$ es pot aproximar uniformement sobre K per polinomis.*
- Recíprocament, si $a \notin K$ i $1/(z - a)$ es pot aproximar uniformement per polinomis sobre K , aleshores $a \in V_\infty$.*

Demostració. Per tal de provar a) considerem, fixat $b \in V$, el conjunt

$$A = \{a \in V : 1/(z - a) \text{ és límit uniforme sobre } K \text{ de polinomis en } 1/(z - b)\}.$$

El conjunt A és tancat a V perquè si els punts $a_n \in V$ tendeixen a $a \in V$, hom té $d(a_n, K) \geq m > 0$, per a algun m , i llavors

$$\left| \frac{1}{z - a} - \frac{1}{(z - a_n)} \right| = \frac{|a - a_n|}{|z - a||z - a_n|} \leq m^{-2}|a - a_n|, \quad \text{per a tot } z \in K,$$

amb la qual cosa $1/(z - a_n)$ tendeix uniformement a $1/(z - a)$ sobre K . Per transitivitat, resulta $a \in A$. El conjunt A és també obert a V ; en efecte, si $a \in A$ i $\overline{D}(a, r) \subset V$, vegem que tot punt $w \in D(a, r)$ és de A . Considerem el desenvolupament

$$\frac{1}{z - a} = \frac{1}{z - a - (w - a)} = \frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{w - a}{z - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - a)^n}{(z - a)^{n+1}}, \quad z \in K,$$

que és uniformement convergent a K perquè $\left| \frac{w - a}{z - a} \right| < \frac{r}{|z - a|} < 1$, $\overline{D}(a, r) \subset V$ i $z \notin V$. Això ens diu que $1/(z - w)$ s'aproxima uniformement a K per polinomis en $1/(z - a)$; ara bé, $1/(z - a)$ s'aproxima uniformement a K per polinomis en $1/(z - b)$ i, per tant, també les seves potències. Per transitivitat, veiem que $w \in A$. Així, A és obert i tancat a V , trivialment $b \in A$ i, per tant, $A = V$.

Demostrem ara b). Sigui $M = \max\{|z| : z \in K\}$ i $b \in \mathbb{C}$ amb $|b| > M + 1$; clarament $b \in V_\infty$, i el desenvolupament

$$\frac{1}{z - b} = \frac{1}{b \left(\frac{z}{b} - 1\right)} = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n$$

és uniformement convergent sobre K perquè $|\frac{z}{b}| \leq \frac{M}{M+1} < 1$ si $z \in K$. Això significa que $1/(z-b)$ i, per tant, els polinomis en $1/(z-b)$ s'aproximen uniformement per polinomis sobre K . Si $a \in V_\infty$, per la part a), $1/(z-a)$ s'aproxima per polinomis en $1/(z-b)$ i, per transitivitat, es dedueix que $1/(z-a)$ s'aproxima per polinomis a z .

Per a provar c) veurem que si $a \notin K$ i a està en una component acotada V de $\mathbb{C} \setminus K$, llavors $1/(z-a)$ no es pot aproximar uniformement per polinomis sobre K . És clar que $\partial V \subset K$; així, si $P_n(z) \xrightarrow{n} 1/(z-a)$ uniformement a K on els P_n són polinomis, tindriem, en particular, que la successió (P_n) és uniformement convergent a ∂V . Llavors per a $\varepsilon > 0$ seria $|P_n(z) - \frac{1}{z-a}| < \varepsilon$ si n es prou gran i $z \in \partial V$. D'aquí resulta

$$|(z-a)P_n(z) - 1| < \varepsilon|z-a| < 1/2, \quad z \in \partial V,$$

si $\varepsilon < \frac{1}{2 \operatorname{diam}(\bar{V})}$. Ara, pel principi del màxim, deduiríem $|(z-a)P_n(z) - 1| \leq 1/2$, per a $z \in \bar{V}$ i aquesta desigualtat és impossible si $z = a \in V$. $\square$

Teorema 10.3 (Teorema de Runge per a compactes). a) Si K és un compacte de $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus K$ és connex, llavors tota funció holomorfa en un entorn de K es pot aproximar uniformement sobre K per polinomis. Recíprocament, si aquesta aproximació és possible per a tota funció, holomorfa en un entorn de K , llavors $\mathbb{C} \setminus K$ és connex.

b) Si $\mathbb{C} \setminus K$ no és connex i $A \subset \mathbb{C}$ és un conjunt que talla cadascuna de les components acotades de $\mathbb{C} \setminus K$, llavors tota funció holomorfa en un entorn de K es pot aproximar uniformement sobre K per funcions racionals que tenen els seus pols en punts de A .

Demostració. Sigui f una funció holomorfa en un entorn U de K i $\varepsilon > 0$. Pel lema 6.6 hi ha una cadena γ a $U \setminus K$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in K.$$

Llavors per la proposició 10.1 hi ha una funció racional R amb pols a $\gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus K$ tal que

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon/2, \quad z \in K.$$

La funció $R(z)$ és una combinació lineal de funcions $1/(z-a_j)$, amb $a_j \notin K$. Si $\mathbb{C} \setminus K$ és connex, per la proposició 10.2 b), cadascuna d'aquestes funcions s'aproxima uniformement sobre K per polinomis; per tant, hi ha un polinomi P tal que $|R(z) - P(z)| < \varepsilon/2$ si $z \in K$, amb la qual cosa $|f(z) - P(z)| < \varepsilon$,

$z \in K$. Dit d'una altra forma, els pols que estan en la component no acotada de K es poden traslladar a ∞ , i així s'obtenen polinomis.

Suposem ara que $\mathbb{C} \setminus K$ no és connex i que A talla tots les components acotades de $\mathbb{C} \setminus K$; posem $R = R_1 + R_2$, on R_1 té pols en la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ i R_2 té els seus pols en les components acotades. Tal com acabem de veure, hi ha un polinomi P tal que $|R_1(z) - P(z)| < \varepsilon/4$, $z \in K$. Per acabar, és suficient veure que tots els pols en components acotades es poden traslladar a A , per a obtenir R_3 amb pols a A tal que $|R_2(z) - R_3(z)| < \varepsilon/4$, $z \in K$. La funció $R_2(z)$ és una combinació lineal de funcions $1/(z - a_j)$ amb $a_j \notin K$, $a_j \notin V_\infty$, i és, per tant, suficient demostrar que $1/(z - a)$, $a \notin K$, $a \notin V_\infty$ s'aproxima uniformement sobre K per funcions racionals amb pols dins de A . Si V és la component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ que conté a , per hipòtesi hi ha un punt $b \in V \cap A$, i la proposició 10.2 a) acaba la demostració.

El recíproc de la part a) és conseqüència de la proposició 10.2 c): si $\mathbb{C} \setminus K$ no és connex, té una component acotada V , i si $a \in V$, la funció $1/(z - a)$, que és holomorfa en un entorn de K , no és aproximable per polinomis. $\square$

Evidentment, les funcions racionals amb pols dins del conjunt A de la part b) del teorema 10.3 que aproximen una funció holomorfa donada, són de la forma

$$R = P + R_1,$$

on P és un polinomi i $R_1(z)$ és una combinació lineal de polinomis en $1/(z - a)$, $a \in A$. Per exemple, si K és la corona tancada $K = \{z: 0 < R_2 \leq |z| \leq R_1 < +\infty\}$, prenem $A = \{0\}$ i trobem que tota funció holomorfa en un entorn de K s'aproxima uniformement a K per funcions del tipus

$$P_1(z) + P_2(1/z)$$

amb P_1, P_2 polinomis. En aquest cas ja coneixíem aquest fet, i a més sabem explícitament quins són els polinomis P_1 i P_2 , ja que, d'acord amb el teorema 5.10, es tracta de les sumes parcials del desenvolupament de Laurent de f en una corona $C(0, R_2 - \varepsilon, R_1 + \varepsilon)$.

Si K té dos forats, per exemple,

$$K = \{z: 1 \leq |z|, 1 \leq |z - 2|, |z| \leq 5\},$$

prenent $A = \{0, 2\}$ veiem que tota funció holomorfa en un entorn de K és límit uniforme de funcions del tipus $P_1(z) + P_2(1/z) + P_3(1/(z - 2))$ amb P_1, P_2, P_3 polinomis.

Teorema 10.4 (Teorema de Runge per a oberts). *a) Un obert $U \subset \mathbb{C}$ té la propietat que tota funció holomorfa a U és límit uniforme sobre els compactes de U d'una successió de polinomis, si i només si $\mathbb{C} \setminus U$ no té components connexes acotades.*

b) Si $\mathbb{C} \setminus U$ no és connex i $A \subset \mathbb{C}$ és un conjunt tal que $\bar{A}$ talla totes les components connexes acotades de $\mathbb{C} \setminus U$, llavors tota funció holomorfa a U és límit uniforme sobre els compactes de U d'una successió de funcions racionals que tenen els seus pols en punts de A .

Demostració. Sigui f una funció holomorfa a U . Per tal de provar que les aproximacions anunciades a a) i b) són possibles, cal veure que, donat un compacte $K \subset U$ i un número $\varepsilon > 0$, existeix una funció g del tipus desitjat i.e. un polinomi en el cas a) i una funció racional amb pols en A , en el cas b) tal que $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$, $z \in K$. Amb aquesta finalitat podem suposar que K és un dels compactes K_n , de la successió exhaustiva de compactes de U , descrita en el lema 1.15. Si $\mathbb{C} \setminus U$ no té components connexes acotades, llavors $\mathbb{C} \setminus K_n$ tampoc no en té, és a dir, és connex i el resultat es dedueix del teorema 10.3 a). Si $\mathbb{C} \setminus K_n$ té alguna component acotada V , V és un obert acotat de $\mathbb{C}$ que conté una component acotada W de $\mathbb{C} \setminus U$. Per hipòtesi, $\bar{A} \cap W \neq \emptyset$; per tant, $\bar{A} \cap V \neq \emptyset$ i essent V obert tindrem $A \cap V \neq \emptyset$. Hem vist, doncs, que A talla totes les components acotades de $\mathbb{C} \setminus K_n$, i l'enunciat és aleshores conseqüència del teorema 10.3 b).

Només falta provar ara el recíproc en a); és a dir, volem veure que si $\mathbb{C} \setminus U$ té alguna component acotada C , aleshores hi ha alguna funció $f \in H(U)$ no aproximable uniformement sobre compactes per polinomis. Tal com en la proposició 10.2 c), la idea és considerar, per a $a \in C$, la funció $f(z) = 1/(z-a)$. Si hi ha un obert V de $\mathbb{C}$, acotat, amb $a \in V$ i $\partial V \subset U$, aleshores podrem repetir la prova de la proposició 10.2 c) i arribar a una contradicció en el cas que aquesta funció f es pugués aproximar per polinomis sobre ∂V . L'existència de V és un fet purament topològic, no trivial, conseqüència del resultat general següent conegut com a teorema de Šura-Bura (vegeu [3], pag. 32):

Si F és un tancat de $\mathbb{C}$ i C una component connexa de F , llavors C és la intersecció de tots els subconjunts de F , compactes i relativament oberts, que contenen C .

En el nostre cas, prenent $F = \mathbb{C} \setminus U$ resulta que si $\mathbb{C} \setminus U$ té components acotades, a $\mathbb{C} \setminus U$ hi ha conjunts $A \neq \emptyset$ oberts (a $\mathbb{C} \setminus U$) i compactes. Considerem aleshores $B = (\mathbb{C} \setminus U) \setminus A$, que és tancat a $\mathbb{C} \setminus U$ i, per tant, tancat a $\mathbb{C}$. El conjunt $\mathbb{C} \setminus B$ és un obert de $\mathbb{C}$ que conté el compacte A ; per tant, hi ha un

obert acotat V amb $A \subset V \subset \bar{V} \subset \mathbb{C} \setminus B$. Com que ∂V no talla ni A ni B és $\partial V \subset \mathbb{C} \setminus (A \cup B) = U$. Resumint, hem vist que si U té forats, hi ha oberts de $\mathbb{C}$ acotats amb $\partial V \subset U$ i $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) \neq \emptyset$; prenent $a \in V \cap (\mathbb{C} \setminus U)$ i $f(z) = 1/(z - a)$ hom té $f \in H(U)$ i f no és aproximable per polinomis uniformement sobre compactes a U . $\square$

En el cas particular que U sigui un disc, l'aproximació per polinomis d'una funció $f \in H(U)$ a què fa referència la part a) del teorema 10.4 ja està donada per les sumes parcials de la sèrie de Taylor de f .

En general, la manera més senzilla de prendre el conjunt A , quan $\mathbb{C} \setminus U$ no és connex, es triar un punt de cada component acotada de $\mathbb{C} \setminus U$. Llavors tota funció $f \in H(U)$ s'aproxima uniformement sobre els compactes de U per funcions del tipus

$$P(z) + \sum'_{a \in A} Q_a \left(\frac{1}{z - a} \right)$$

amb P, Q_a polinomis. Quan U és un disc puntejat $U = D'(0, R)$ i prenem $A = \{0\}$, les funcions anteriors són del tipus $P(z) + Q(1/z)$ amb P, Q polinomis; en aquest cas, el desenvolupament de Laurent de f a $D'(0, R)$ ja ens dona el resultat. En general, però, no és fàcil trobar d'una forma explícita les funcions racionals que aproximem una funció donada. Per exemple, si $U = D(0, 2) \setminus [-1, 1]$, també podem prendre $A = \{0\}$ i tota funció $f \in H(U)$ és límit uniforme sobre compactes de U d'una successió de funcions del tipus $P_n(z) + Q_n(1/z)$, però no és senzill explicitar els polinomis P_n, Q_n .

Convé destacar que ni en el teorema 10.3 ni en el 10.4 se suposa que K o U siguin connexos. Precisament aquesta és la situació que es dona en els exemples següents.

Farem servir la notació $\mathbf{1}_A$ per a indicar la funció característica d'un conjunt A qualsevol.

Exemple 10.5. Utilitzant els teoremes de Runge demostrarem l'existència d'una successió de polinomis P_n tals que

$$\lim_n P_n(z) = 0 \text{ si } z \notin \mathbb{R}, \quad \lim_n P_n(z) = 1 \text{ si } z \in \mathbb{R}.$$

Amb aquesta finalitat, considerem els compactes

$$K_n = \{z = x + iy : |z| \leq n, y = 0 \text{ ó } \frac{1}{n} \leq |y| \leq n\}$$

i els oberts $V_n = \{z = x + iy : |x| < n + 1, |y| < 1/3n\}$. La funció $\mathbf{1}_{V_n}$ és holomorfa en un entorn de K_n i $\mathbb{C} \setminus K_n$ és connex. Per tant, hi ha polinomis

P_n tals que $|1_{V_n}(z) - P_n(z)| \leq 1/n$ si $z \in K_n$, és a dir, $|P_n(z)| < 1/n$ si $|x| \leq n$, $1/n \leq |y| \leq n$ i $|1 - P_n(z)| \leq 1/n$ si $z \in [-n, n]$. Llavors, clarament $P_n(z) \rightarrow 1$ si $z \in \mathbb{R}$ i $P_n(z) \rightarrow 0$ si $z \notin \mathbb{R}$. $\square$

Exemple 10.6. Construïm ara una successió de polinomis P_n tals que $P_n(0) \rightarrow 0$ i $P_n(z) \rightarrow 1$ si $z \neq 0$. Posant $P_n(z) = \alpha_n z Q_n(z)$, amb $\alpha_n \rightarrow 1$, l'existència dels polinomis P_n equival a l'existència de polinomis Q_n tals que $Q_n(z) \rightarrow 1/z$ si $z \neq 0$, és a dir, Q_n tendeix a $1/z$ puntualment a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Fixem-nos que per l'argument utilitzat en la proposició 10.2 c) no pot existir cap successió de polinomis Q_n tal que $Q_n(z) \rightarrow 1/z$ uniformement sobre els compactes de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Per a provar l'existència dels Q_n , considerem els compactes (fig. 10.1)

$$K_n = \left[\frac{1}{n}, n \right] \cup \left\{ z : |z| \leq n, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

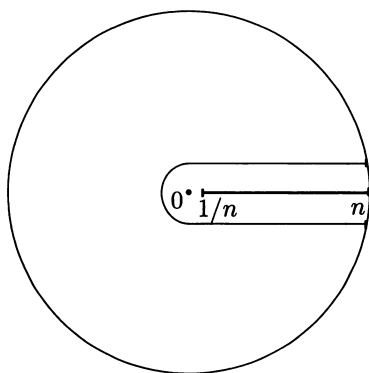


Figura 10.1

La funció $1/z$ és holomorfa en un entorn de K_n i $\mathbb{C} \setminus K_n$ és connex. Per tant, hi ha un polinomi P_n tal que $|1/z - P_n(z)| < 1/n$ si $z \in K_n$. Com que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $K_n \subset K_{n+1}$, resulta que $Q_n(z) \rightarrow 1/z$ si $z \neq 0$. $\square$

Una conseqüència del teorema de Runge és el resultat següent:

Teorema 10.7. Si $K \subset U$ amb K compacte i U obert, llavors les afirmacions següents són equivalents:

a) Cap component de $U \setminus K$ no és relativament compacta a U .

- b) Tota component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ talla $\mathbb{C} \setminus U$.
- c) Tota funció holomorfa en un entorn de K es pot aproximar, uniformement sobre K , per funcions holomorfes a U (de fet, per funcions racionals amb pols fora de U).
- d) Per a tot punt $z \in U \setminus K$ hi ha una funció holomorfa $h \in H(U)$ tal que $|h(z)| > \max_{w \in K} |h(w)|$.

Demostració. Per a la implicació $a) \Rightarrow b)$, sigui V una component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$. Si fos $V \subset U$, V seria una component de $U \setminus K$ amb $\partial V \subset K \subset U$, per tant, relativament compacte a U . Així doncs, V talla $\mathbb{C} \setminus U$. El teorema 10.3 dóna $b) \Rightarrow c)$. La implicació $c) \Rightarrow a)$ és com en la proposició 10.2 c). Que d) implica a) es basa en la mateixa idea: si C és una component de $U \setminus K$ relativament compacta a U , llavors $\partial C \subset K$, i, pel principi del mòdul màxim, hom té

$$|h(z)| \leq \max_{w \in K} |h(w)|, \quad z \in C,$$

que contradiu a). Finalment, suposem a) certa i sigui $z \in U \setminus K$. El compacte $K \cup \{z\}$ també compleix a) i, per tant, c). Considerem la funció f que val 0 a K i 1 a z ; per c), hi ha una funció $h \in H(U)$ tal que $|f(z) - h(z)| < 1/2$ a $K \cup \{z\}$. Llavors $|h(z)| > 1/2$ i $|h(w)| < 1/2$, $w \in K$. Això prova d). $\square$

Observem que els compactes K_n construïts en el lema 1.15 tenen les propietats anteriors en relació amb U .

10.2 Aproximació de funcions harmòniques

En aquesta secció establim un teorema d'aproximació, anàleg als de la secció anterior, però per a funcions harmòniques. És convenient tenir presents els resultats de la secció 6.7. En particular, recordem que en un domini n -connex U tota funció harmònica real u s'expressa en la forma

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \operatorname{Log} |z - \alpha_j| + \operatorname{Re} f$$

amb $\alpha_j \notin U$, $f \in H(U)$ i $a_j \in \mathbb{R}$. Per a un domini U qualsevol veurem que tota funció harmònica s'aproxima, uniformement sobre els compactes de U , per funcions d'aquest tipus.

- Teorema 10.8.** *a) Tota funció u harmònica real en un entorn d'un compacte K s'expressa en la forma $u(z) = \sum_{j=1}^m a_j \operatorname{Log} |z - \alpha_j| + \operatorname{Re} f$ per a algun $n \in \mathbb{N}$, amb $a_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j \notin K$ i f holomorfa en un entorn de K .*
- b) Si U és un entorn obert del compacte K tal que tota component de $\mathbb{C} \setminus K$ talla $\mathbb{C} \setminus U$, llavors tota funció u harmònica real en un entorn de K s'aproxima, uniformement sobre K , per funcions harmòniques a U del tipus*

$$\sum' a_j \operatorname{Log} |z - \alpha_j| + \operatorname{Re} R$$

amb $\alpha_j \notin U$, $a_j \in \mathbb{R}$ i R una funció racional amb pols simples fora de U .

- c) Tota funció u harmònica real en un domini U és límit uniforme sobre els compactes de U d'una successió de funcions u_n , harmòniques, del tipus*

$$u_n(z) = \sum' a_j^{(n)} \operatorname{Log} |z - \alpha_j^{(n)}| + \operatorname{Re} R_n,$$

amb $\alpha_j^{(n)} \notin U$, $a_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ i R_n racional sense pols a U .

La notació $\sum'$ vol dir que la suma només té un nombre finit de termes.

Demostració. Per a la part a) és suficient notar que si U és un obert, $U \supset K$, llavors per l'observació 6.1 hi ha un domini poligonal U_0 amb vora regular a trossos, per tant, n -connex per a algun n , (vegeu la secció 6.6) tal que $K \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U$ i, després, tenir en compte el teorema 6.26.

Si K i U compleixen les hipòtesis de b) i u és harmònica en un entorn de K i té l'expressió que figura a la part a) amb f holomorfa en un entorn de K , llavors pel teorema de Runge f s'aproxima uniformement sobre K per funcions racionals R_n amb pols simples fora de U i, per tant, $\operatorname{Re} f$ s'aproxima per $\operatorname{Re} R_n$. En conseqüència, és suficient veure que $\operatorname{Log} |z - \beta|$, amb $\beta \notin K$ fixat, compleix l'enunciat de b). Suposem primer que $\beta \in V$, essent V una component acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, i sigui $\alpha \notin U$ un punt d'aquesta mateixa component V . Definim

$$W = \{\tau \in V: \operatorname{Log} |z - \tau| \text{ s'aproxima uniformement sobre } K \\ \text{per funcions del tipus } \operatorname{Log} |z - \alpha| + \operatorname{Re} f, f \text{ holomorfa}\},$$

de manera que $\alpha \in W$.

Amb un raonament semblant al de la prova de la proposició 10.2 es veu que W és tancat a V . Ara veurem que W és obert a V . Si $\tau \in W$ i $D(\tau, r) \subset V$, provem que $D(\tau, r) \subset W$. Si $w \in W$, qualsevol determinació holomorfa de

$\operatorname{Log} \left(\frac{z-\tau}{z-w} \right)$ en un entorn de K (que existeix per la proposició 3.21) té part real $\operatorname{Log} |z-\tau| - \operatorname{Log} |z-w|$. Si $|w-\tau| < r$, el desenvolupament

$$\operatorname{Log} \left(\frac{z-\tau}{z-w} \right) = \operatorname{Log} \left(1 + \frac{w-\tau}{z-w} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(w-\tau)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(z-w)^{n+1}}$$

és uniformement convergent a K perquè $|w-\tau| < r < |z-w|$ si $z \in K$. Prenent parts reals resulta que $\operatorname{Log} |z-\tau| - \operatorname{Log} |z-w|$ s'aproxima uniformement per $\operatorname{Re} g$ amb g holomorfa. En conclusió, $W = V$ i $\beta \in W$.

Si β pertany a V_{∞} , la component no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, llavors $\operatorname{Log} |z-\beta|$ s'aproxima uniformement sobre K per funcions del tipus $\operatorname{Re} f$, amb f holomorfa. En efecte, repetint l'argument anterior podem substituir β per qualsevol punt $\alpha \in V_{\infty}$ amb $|\alpha|$ prou gran. Ara bé, en aquest cas, qualsevol determinació de $\operatorname{Log}(\alpha - z)$ (que existeix per la proposició 3.21) té part real $\operatorname{Log} |z-\alpha|$, i desenvolupant en sèrie queda

$$\operatorname{Log}(\alpha - z) = \operatorname{Log} \alpha + \operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{\alpha} \right) = \operatorname{Log} \alpha - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)\alpha^{n+1}},$$

amb convergència uniforme sobre K , i tan sols cal prendre $|\alpha| > \max\{|z| : z \in K\}$.

L'apartat c) es dedueix de b) i del lema 1.15. $\square$

10.3 Descomposició de funcions meromorfes en elements simples

10.3.1 Teoremes de Mittag-Leffler

Si f és una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ i té un nombre finit de pols $z_1, \dots, z_n$ amb parts principals $P_1 \left(\frac{1}{z-z_1} \right), \dots, P_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right)$, on $P_1, \dots, P_n$ són polinomis sense terme independent, llavors

$$g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n P_i \left(\frac{1}{z-z_i} \right)$$

és una funció entera. Si a més f té un pol a l'infinit, és a dir, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, aleshores g és un polinomi, P , i f és una funció racional, essent

$$f(z) = P(z) + \sum_{i=1}^n P_i \left(\frac{1}{z-z_i} \right)$$

la descomposició de f en fraccions simples.

En aquesta secció ens proposem d'estudiar el cas general en què la funció f , meromorfa a $\mathbb{C}$, tingui infinits pols $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Per conveniència en l'exposició suposarem que f té un pol a l'origen $z_0 = 0$ i que els punts z_n són tots diferents amb $\lim_n |z_n| = +\infty$. Les parts principals s'escriuen $P_0\left(\frac{1}{z}\right)$, $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, on P_0, P_n són polinomis sense terme constant.

En primer lloc veurem que no hi ha cap restricció per als punts z_n ni per a les parts principals de f en aquests punts.

Teorema 10.9 (Mittag-Leffler). *Sigui $z_0 = 0$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de punts del pla amb $|z_n| \rightarrow +\infty$ quan $n \rightarrow \infty$ i $(P_n)_{n=0}^\infty$ qualsevol successió de polinomis sense terme constant. Llavors hi ha una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ que té els pols exactament en els punts z_n amb part principal $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, per a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

La tria més òbvia seria, senzillament, prendre la funció

$$f(z) = \sum_n P_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right)$$

sempre que la sèrie sigui convergent en el sentit que ara precisem. Per a cada compacte $K \subset \mathbb{C}$, tan sols un nombre finit de punts z_n són a K , de manera que

$$\sum_{z_n \notin K} P_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right)$$

és una sèrie de funcions holomorfes en un entorn de K . Si aquesta sèrie convergeix uniformement a K , llavors diem que la sèrie completa, $\sum_n P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, convergeix uniformement sobre compactes. Evidentment, podem considerar aquesta noció per a qualsevol sèrie de funcions meromorfes $\sum_n g_n(z)$, on cada funció g_n té un únic pol al punt z_n .

Si es dóna aquesta circumstància, llavors és clar que la funció f definida abans té les propietats enunciades en el teorema 10.9, però en general la sèrie $\sum_n P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ no convergirà uniformement sobre compactes i cal introduir uns termes de correcció.

Demostració del teorema 10.9. La idea és definir uns polinomis Q_n de manera

que la sèrie

$$\sum_n g_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} P_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)\right) \quad (10.1)$$

convergeixi uniformement sobre compactes. En ser els Q_n polinomis, les parts principals de cada terme de la sèrie continuen essent $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ i la funció $f(z) = \sum_n g_n(z)$ tindrà el comportament desitjat.

L'elecció dels polinomis Q_n no és única i és fàcil. La funció $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ és holomorfa al disc $D(0, |z_n|)$, amb un determinat desenvolupament de Taylor, posem

$$P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} z^m.$$

Al compacte $\overline{D}(0, |z_n|/2)$ aquest desenvolupament convergeix uniformement i, per tant, podem considerar una suma parcial $Q_n(z) = \sum_{m=0}^{N_n} c_{n,m} z^m$ prou avançada per tal que

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)\right| \leq 2^{-n} \quad \text{si } |z| \leq |z_n|/2.$$

Aquests polinomis Q_n serveixen per al nostre propòsit perquè, fixat un disc $\overline{D}(0, R)$, hom tindrà $R < |z_n|/2$ a partir d'un valor n i (10.1) convergirà uniformement a $\overline{D}(0, R)$. $\square$

En el teorema 10.9 s'ha construït una funció meromorfa amb parts principals prefixades en punts donats. El resultat pot reinterpretar-se com un teorema d'estructura de totes les funcions meromorfes.

Corol·lari 10.10. *L'expressió general d'una funció F meromorfa a $\mathbb{C}$ amb parts principals $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ en els punts $z_0 = 0$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és*

$$F(z) = h(z) + P_0\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)\right),$$

on h és una funció entera i les funcions Q_n són polinomis que fan que la sèrie convergeixi uniformement sobre compactes.

Demostració. Només cal prendre la funció meromorfa f construïda en la prova del teorema 10.9 i observar que una altra funció meromorfa F té els mateixos pols i les mateixes parts principals que f si i només si $F - f$ és entera. $\square$

En el cas que tots els pols siguin simples hom té, $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{\alpha_n}{z-z_n}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, i el desenvolupament d'aquesta fracció a $D(0, |z_n|)$ és

$$\frac{\alpha_n}{z-z_n} = -\frac{\alpha_n}{z_n-z} = -\frac{\alpha_n}{z_n\left(1-\frac{z}{z_n}\right)} = -\alpha_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{z_n^{m+1}}.$$

Si Q_n és la suma λ_n -sima, $Q_n(z) = -\alpha_n \sum_{m=0}^{\lambda_n} \frac{z^m}{z_n^{m+1}}$, la diferència $\frac{\alpha_n}{z-z_n} - Q_n(z)$ és

$$-\alpha_n \sum_{m=\lambda_n+1}^{\infty} \frac{z^m}{z_n^{m+1}} = -\frac{\alpha_n}{z_n} \frac{\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n+1}}{1-\frac{z}{z_n}} = \frac{\alpha_n}{z-z_n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n+1}$$

Corol·lari 10.11. *L'expressió general d'una funció F meromorfa a $\mathbb{C}$ amb pols simples en els punts $z_0 = 0$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i residu α_n en el pol z_n és*

$$F(z) = h(z) + \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z-z_n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{\lambda_n+1},$$

on els números λ_n són enters positius que fan que la sèrie convergeixi uniformement sobre compactes i h és una funció entera.

Si els residus α_n estan uniformement acotats, les condicions del corol·lari anterior es compleixen si els números λ_n fan que la sèrie

$$\sum_n \frac{|z|^{\lambda_n+1}}{|z_n|^{\lambda_n+2}}$$

convergeixi uniformement sobre compactes. Si, per exemple, $\sum_n \frac{1}{|z_n|^{\lambda+2}} < +\infty$ per a algun enter positiu λ , llavors es pot prendre $\lambda_n = \lambda$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 10.12. Considerem la funció meromorfa $f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ que té un pol doble a cada punt enter $z_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Per a trobar la part principal al voltant de cada pol considerem primer el desenvolupament de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$, al voltant del punt n ,

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{(-1)^n}{z-n} + c_1(z-n) + \dots$$

Ara, elevant al quadrat, resulta

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{(z-n)^2} + \dots$$

En aquest cas la sèrie de parts principals ja convergeix i, per tant, hom té

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + h(z)$$

amb h una funció entera. Per tal de determinar la funció h , considerem el quadrat Q_N centrat a l'origen i de costat $2N+1$; hom té $|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y$, quantitat acotada inferiorment per 1 tant si $|x| = N+1/2$ com si $|y| = N+1/2$, és a dir, acotada inferiorment si $z \in \partial Q_N$, independentment de N . També si $z \in \partial Q_N$, és

$$\left| \sum_n \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_n \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_n \frac{1}{(n-1/2)^2} < +\infty.$$

En conseqüència, pel principi del mòdul màxim, la funció h està acotada a cada quadrat Q_N per una cota que no depèn de N i, pel teorema de Liouville, ha de ser igual a una constant C . Si fem $z = iy$ i $y \rightarrow +\infty$, veiem que $C = 0$. Així doncs, resulta

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

En particular,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'una forma anàloga s'estableix la descomposició

$$\pi^3 \frac{\cot \pi z}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^3}.$$

□

Exemple 10.13. Considerem ara la funció $f(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$. Té pols simples en els enters, $z_n = n \in \mathbb{Z}$, amb residu 1. Com que

$$\sum_{z_n \neq 0} \frac{1}{|z_n|^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

podem considerar $\lambda_n = 0$ per a tot n , és a dir, $Q_n(z) = -\frac{1}{n}$ i resulta

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = h(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = h(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Ara la funció $\pi \cot \pi z$ també està acotada sobre la frontera dels quadrats Q_N de centre 0 i costat $2N+1$ que hem considerat en l'exemple 10.12. En efecte, hom té

$$\pi^2 |\cot \pi z|^2 = \pi^2 \frac{\cos^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}$$

de manera que si $|x| = N + 1/2$, llavors

$$\pi^2 |\cot \pi z|^2 = \pi^2 \frac{\sinh^2 \pi y}{1 + \sinh^2 \pi y} \leq \pi^2,$$

i si $|y| = N + 1/2$, llavors

$$\pi^2 |\cot \pi z|^2 \leq \pi^2 \frac{1 + \sinh^2 \pi(N + 1/2)}{\sinh^2 \pi(N + 1/2)} \leq \pi^2 \left(1 + \frac{1}{\sinh^2 3\pi/2} \right), \quad \text{per a tot } N.$$

Ara, amb un raonament similar al de l'exemple 10.12 es veu que $h \equiv 0$ i resulta, finalment,

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Si en lloc de la funció $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ considerem $\frac{\pi}{\sin \pi z}$, els pols són els mateixos punts $z_n = n$ i els residus $(-1)^n$. Hom té llavors

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}. \quad \square$$

El teorema 10.9 és vàlid a qualsevol domini U . La prova és similar al cas $U = \mathbb{C}$ i tan sols cal triar els termes de correcció Q_n –en aquest cas, funcions racionals amb pols fora de U – utilitzant convenientment el teorema de Runge.

Teorema 10.14. *Sigui U un domini del pla i $A \subset U$ un conjunt discret i tancat a U . Suposem donat, per a cada punt $a \in A$, un polinomi P_a sense terme constant. Llavors hi ha una funció meromorfa a U que té els pols exactament en els punts $a \in A$ amb part principal $P_a \left(\frac{1}{z-a} \right)$.*

Demostració. Sigui $(K_n)_{n=1}^\infty$ una successió de compactes com en el lema 1.15. Posem

$$Q_n(z) = \sum_{a \in A \cap (K_n \setminus K_{n-1})} P_a \left(\frac{1}{z-a} \right),$$

on la suma és finita perquè A té un nombre finit de punts en cada compacte. Cada funció Q_n és holomorfa en un entorn de K_{n-1} ; com a la prova del teorema 10.4, hi ha una funció racional R_n amb pols a $\mathbb{C} \setminus U$ tal que $|Q_n(z) - R_n(z)| < 2^{-n}$, $z \in K_{n-1}$. Aleshores serveix la funció

$$Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n(z) - R_n(z)). \quad \square$$

10.3.2 El mètode de Cauchy

Una de les dificultats que hi ha a l'hora d'aplicar el corollari 10.10 és la determinació de la funció entera h . Per aquest motiu és convenient considerar al costat del teorema de Mittag-Leffler un altre mètode, degut a Cauchy, que permet desenvolupar una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ en elements simples. L'exposem a continuació seguint [11].

Partim d'una funció meromorfa a $\mathbb{C}$, f , que tingui pols en els punts $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ amb parts principals $P_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right)$. Podem suposar que f és holomorfa al voltant de l'origen perquè si $z_0 = 0$ fos un pol amb part principal $P_0 \left(\frac{1}{z} \right)$, considerariem la funció $f(z) - P_0(1/z)$.

Sigui $C = \partial D(0, R)$ un cercle centrat a l'origen que no passi per cap pol de f (C també podria ser la vora d'un quadrat centrat a l'origen) i considerem la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{amb } |z| < R, \ z \neq z_n, \text{ per a tot } n \in \mathbb{N}.$$

Pel teorema dels residus aquesta integral és igual a $f(z)$ més la suma dels residus de la funció $\frac{f(w)}{w-z}$ a cada punt z_n amb $|z_n| < R$. Veiem ara que el residu d'aquesta funció a z_n és, precisament, $-P_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right)$. Posem $P_n \left(\frac{1}{w-z_n} \right) = \sum_{l=1}^r \frac{c_l}{(w-z_n)^l}$ i $f(w) = P_n \left(\frac{1}{w-z_n} \right) + f_n(w-z_n)$ amb f_n holomorfa al voltant de

z_n . Llavors hom té

$$\begin{aligned}\frac{f(w)}{w-z} &= -\frac{1}{z-z_n} \frac{f(w)}{1-\frac{w-z_n}{z-z_n}} = -f(w) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(w-z_n)^{k-1}}{(z-z_n)^k} = \\ &= -\left[f_n(w-z_n) + \sum_{l=1}^r \frac{c_l}{(w-z_n)^l} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(w-z_n)^{k-1}}{(z-z_n)^k},\end{aligned}$$

i en aquesta expressió el coeficient de $\frac{1}{w-z_n}$ és $-\sum_{l=1}^r \frac{c_l}{(z-z_n)^l} = -P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$. Si ara fem servir la igualtat

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w(1-z/w)} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{w^k} + \frac{z^k}{w^k(w-z)},$$

que val per a qualsevol k natural, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w) \left(\frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{w^k} \right) dw + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^k f(w)}{w^k(w-z)} dw.\end{aligned}$$

El valor de la primera integral del membre de la dreta és la suma dels residus del seu integrand en els punts del conjunt $\{0\} \cup \{z_n : |z_n| < R\}$. Aquests residus valen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(w) \left(\frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{w^k} \right) dw$$

si C_n és una petita circumferència al voltant de z_n si $n \geq 1$ i C_0 envolta l'origen (fig. 10.2). Si denotem aquests residus per $Q_0(z)$ a l'origen i per $-Q_n(z)$ al punt z_n , veiem que $Q_0(z)$ és la suma dels k primers termes de la sèrie de Taylor de f al voltant de l'origen (recordem que f és holomorfa a l'origen) i $Q_n(z)$ és un polinomi en z de grau més petit que k .

En resum, doncs, del tot el que hem dit resulta

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{|z_n| < R} P_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{f^{(l)}(0)}{l!} z^l + \sum_{|z_n| < R} \left[P_n \left(\frac{1}{z-z_n} \right) - Q_n(z) \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^k f(w)}{w^k(w-z)} dw\end{aligned}\tag{10.2}$$

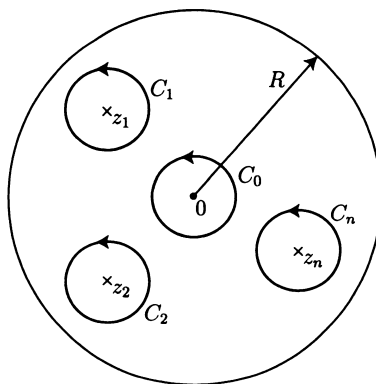


Figura 10.2

Afirmem ara que $Q_n(z)$ és la suma dels primers k termes del desenvolupament de Taylor de $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ al voltant de l'origen. En efecte, $-Q_n(z)$ és el residu de la funció $P_n\left(\frac{1}{w-z_n}\right)\left(\frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{w^k}\right)$ en el punt z_n . Aquesta funció és una funció racional que té un pol a l'origen i un pol en el punt z_n i és holomorfa a l'infinit. Llavors, per la proposició 5.24, la suma dels seus residus ha de ser zero i queda provada l'afirmació perquè el residu a l'origen és justament el polinomi de Taylor de grau $n-1$ de $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$.

Finalment, suposem que f compleix la condició de creixement següent:

Existeixen cercles $C(0, R_n)$, $R_n \rightarrow +\infty$ i números $\varepsilon_n > 0$ amb $\varepsilon_n \rightarrow 0$ de manera que

$$|f(z)| \leq \varepsilon_n |z|^k, \quad \text{si } z \in C(0, R_n) \quad (k \text{ natural fixat}).$$

En aquest cas escrivim la fórmula (10.2) per a cada $C(0, R_n)$ i fem $R_n \rightarrow +\infty$. L'última integral de (10.2) tendeix a zero perquè està acotada en mòdul per

$$\frac{|z|^k}{2\pi} \frac{\varepsilon_n R_n^k}{R_n^k (R_n - |z|)} 2\pi R_n = |z|^k \varepsilon_n \frac{R_n}{R_n |z|} \rightarrow 0, \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

Arribem així a la descomposició següent de f :

$$f(z) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{f^{(l)}(0)}{l!} z^l + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z) \right],$$

on, recordem-ho, $Q_n(z)$ és el polinomi de Taylor de grau $k-1$ de $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ al voltant de l'origen.

Un cas particular és quan tots els pols z_n són simples. Llavors $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{\alpha_n}{z-z_n}$ amb $\alpha_n = \text{Res}(f, z_n)$ i es veu fàcilment que, en aquest cas, és $Q_n(z) = -\frac{\alpha_n}{z_n} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{z}{z_n}\right)^l$.

Si suposem, a més, que la funció f està acotada uniformement sobre una successió de cercles $C(0, R_n)$, $R_n \rightarrow \infty$, posem $|f(z)| \leq M$, $z \in C(0, R_n)$, $n = 1, 2, \dots$, llavors hom té

$$\frac{f(z)}{|z|} \leq \frac{M}{R_k} \rightarrow 0 \quad \text{si } z \in C(0, R_k)$$

i es pot prendre $k = 1$, és a dir, $Q_n(z) = -\frac{\alpha_n}{z_n}$.

Exemple 10.15. El desenvolupament de la funció $\pi \cot \pi z$ de l'exemple 10.13 s'obté immediatament amb el mètode de Cauchy. En efecte, com que la funció $f(z) = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z}$ està acotada sobre la frontera dels quadrats Q_N de l'exemple 10.13, podem prendre $k = 1$. Llavors només cal calcular

$$f(0) = 0, \quad P_n\left(\frac{1}{z-n}\right) = \frac{1}{z-n} \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,$$

i com que els pols són simples amb residu 1, és $Q_n(z) = -\frac{1}{n}$. Així doncs, $\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$. $\square$

Exemple 10.16. Siguin w i w' dos números complexos no nuls de manera que $w/w' \notin \mathbb{R}$ i considerem la xarxa de punts del pla

$$\Omega = \{mw + nw' : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si per a cada punt de Ω considerem les rectes dirigides per w i per w' , tenim una divisió del pla per un reticle de parallelograms.

Busquem ara una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ que tingui un pol simple amb residu 1 a cada punt de Ω . Amb aquesta finalitat enumerem els punts de Ω per $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$. És fàcil veure que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^3} < +\infty$. En efecte, sigui G_k , per a $k \geq 1$, el conjunt de punts de Ω obtinguts amb $m = \pm k$ i $-k \leq n \leq k$, o bé $n = \pm k$ i $-k \leq m \leq k$. D'aquests punts n'hi ha $8k$. Si $S_k = \sum_{z_n \in G_k} \frac{1}{|z_n|^3}$ i δ és

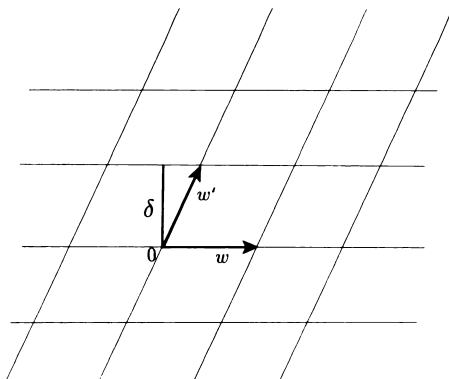


Figura 10.3

la distància de l'origen al reticle de paral·lelograms (vegeu la figura 10.3), hom té $|z_n| \geq k\delta$ si $z_n \in G_k$ i

$$S_n \leq 8k \frac{1}{(\delta k)^3} = \frac{8}{\delta^3} \frac{1}{k^2}$$

de manera que $\sum_n \frac{1}{|z_n|^3} = \sum_k S_k < +\infty$.

En aquest cas, és $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{1}{z-z_n}$ i podem prendre com a $Q_n(z)$ els dos primers termes del desenvolupament de Taylor de $\frac{1}{z-z_n}$ al voltant de l'origen. És a dir,

$$Q_n(z) = -\frac{1}{z_n} - \frac{z}{z_n^2}.$$

La funció buscada pot ser, doncs,

$$\xi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-z_n} + \frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_n^2} \right),$$

on els z_n són, tal com hem dit, els punts no nuls de la xarxa Ω . La funció $\xi(z)$ s'anomena *funció ξ de Weierstrass*. $\square$

10.3.3 El mètode dels residus

Una altra manera de desenvolupar algunes funcions meromorfe en elements simples i, alhora, de sumar sèries es basa en el teorema dels residus.

Per tal d'il·lustrar aquest mètode fixem una funció meromorfa al pla, φ , que tingui només pols simples en una successió de punts de la forma $z_n = z_0 + n$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ amb residus α_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si f és una funció holomorfa en un obert U , tret de punts singulars aïllats, i γ és un camí tancat de U tal que $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ ó 1 , per a tot $z \in \mathbb{C}$, que no passa per cap singularitat de φ ni de f , hom té

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \varphi(z) dz = \sum_n' \alpha_n f(z_0 + n) + \sum \text{Res}(f\varphi, w),$$

on la primera suma està estesa als pols de φ en els quals f és regular i la segona suma està estesa als punts singulars de f . Suposem ara que f és una funció racional tal que $|zf(z)| \rightarrow 0$ si $|z| \rightarrow \infty$ i prenem com a γ la vora, γ_N , d'un rectangle de costats $x = \pm(b + N)$, $y = \pm N$ amb $b \neq a$, $b > 0$ i N natural. Si, a més, la funció φ està uniformement acotada sobre γ_N , per a tot N , llavors hom té $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} f(z) \varphi(z) dz = 0$. En efecte, el valor mínim de $|z|$ sobre γ_N és, N i la longitud de γ_N és $2(4N + 2b)$ de manera que si $|\varphi(z)| \leq M$ sobre γ_N , es compleix

$$\left| \int_{\gamma_N} f(z) \varphi(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma_N} zf(z) \varphi(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{2M(4N + 2b)}{N} \cdot \sup_{|z|=N} |zf(z)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

En resum, obtenim la fórmula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f(z_0 + n) = - \sum_w \text{Res}(f\varphi, w), \quad (10.3)$$

on la suma de l'esquerra està estesa als punts $z_0 + n$ en els quals f és regular, i la suma de la dreta, als pols de f .

Exemple 10.17. Si agafem $\varphi(z) = \pi \cot \pi z$, els pols són els punts $z_n = n \in \mathbb{Z}$ i els residus $\alpha_n = 1$ i podem agafar $\gamma_N = \partial Q_N$, on Q_N són els quadrats de l'exemple 10.12. Llavors si f és racional amb $|zf(z)| \rightarrow 0$, $|z| \rightarrow \infty$, hom té

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_w \text{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, w)$$

amb la suma de l'esquerra estesa als enters n que no són pols de f i la suma de la dreta estesa als pols de f .

Si $f(z) = \frac{1}{z^2}$, resulta, en particular,

$$2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = - \text{Res} \left(\pi \frac{1}{z^2} \cot \pi z, 0 \right).$$

El zero és un pol d'ordre 3 de la funció $\pi z^{-2} \cot \pi z$ i hem de calcular el coeficient de z en el desenvolupament de $\cot \pi z$. Si posem $\cot z = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ i identifiquem coeficients en la igualtat $\cos z = \sin z \cot z$, s'obté $a_{-1} = -\frac{1}{3}$. Per tant, $\text{Res}(\pi z^{-2} \cot \pi z, 0) = -\pi^2/3$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

Fent servir les funcions $\pi \tan \pi z$, $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ i $\pi \sec \pi z$ es poden sumar sèries de la forma $\sum (-1)^n f(n)$, $\sum f(n+1/2)$ i $\sum (-1)^n f(n+1/2)$, on f és del tipus que acabem de considerar.

Exemple 10.18. Una altra aplicació remarcable de la fórmula (10.3) és la descomposició de la funció meromorfa φ en fraccions simples. Suposem, per exemple, que els pols simples de φ són els enters amb residu α_n i que φ està uniformement acotada sobre ∂Q_N (els quadrats de l'exemple 10.12). Agafem $f(z) = \frac{1}{w^2 - z^2}$ on $w \in \mathbb{C}$, w no enter; llavors resulta, per (10.3),

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{w^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{w^2 - n^2} &= - \sum \operatorname{Res} \left(\frac{1}{w^2 - z^2} \varphi(z), z = \pm w \right) = \\ &= \frac{1}{2w} (\varphi(w) - \varphi(-w)). \end{aligned}$$

És a dir, canviant ara w per z ,

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(-z)}{2} = \frac{\alpha_1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n z}{z^2 - n^2}.$$

Si φ és una funció senar, el desenvolupament anterior serà el de φ i si, a més, els residus valen tots 1, obtindrem $\varphi(z) = \pi \cot \pi z$. Si els residus són $\alpha_n = (-1)^n$, llavors resulta $\varphi(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. $\square$

10.4 Les equacions de Cauchy-Riemann no homogènies al pla. Integrals de Cauchy

Les funcions harmòniques són les funcions anul·lades per l'operador de Laplace, Δ , és a dir, són les solucions de l'equació homogènia $\Delta u = 0$. En el capítol 7 hem vist la importància que té també resoldre l'equació de Laplace no homogènia $\Delta u = \phi$, amb ϕ una funció donada. D'una manera semblant, les funcions holomorfes són les funcions anul·lades per l'operador diferencial $\bar{\partial}$, és a

dir, són les solucions de les equacions de Cauchy-Riemann homogènies $\bar{\partial}f = 0$. En aquesta secció i en les següents ens proposem de fer l'estudi corresponent de les equacions de Cauchy-Riemann no homogènies $\bar{\partial}f = \phi$. Ho farem primer a tot el pla i després en un domini qualsevol.

L'equació $\bar{\partial}f = \phi$ té un caràcter ben diferent de l'equació $\Delta u = \phi$; en primer lloc, $\bar{\partial}$ és un operador de primer ordre i Δ un operador de segon ordre. En segon lloc el laplacà és un operador real, en el sentit que transforma funcions reals en funcions reals, i per aquest motiu l'estudi de l'equació $\Delta u = \phi$ es pot fer, sense pèrdua de generalitat, amb funcions reals. En canvi, l'operador $\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ transforma funcions reals en funcions complexes. Si posem $f = u + iv$, $\phi = \alpha + i\beta$ i separem parts reals i imaginàries, l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ equival a

$$\frac{1}{2}(u_x - v_y) = \alpha, \quad \frac{1}{2}(v_x + u_y) = \beta$$

i veiem que es tracta de dues equacions reals de primer ordre acoblades, és a dir, que no es poden tractar separatament. Si ens interessen només solucions reals ($v = 0$), les equacions anteriors queden

$$\frac{1}{2}u_x = \alpha, \quad \frac{1}{2}u_y = \beta,$$

és a dir, $du = 2(\alpha dx + \beta dy)$. Com sabem, aquesta equació, que diu que $\alpha dx + \beta dy$ és una forma exacta, no sempre té solució. És necessari que α i β compleixin una condició de compatibilitat que per al cas d'oberts simplement connexos i α, β diferenciables és $\alpha_y = \beta_x$. D'una forma anàloga, si la dada ϕ és real ($\beta = 0$), aleshores senzillament prenem $f = u$ real ($v = 0$) amb u depenent només de x i $u'(x) = 2\alpha$.

Observem també que l'equació $\bar{\partial}f = \phi$, si té una solució f_0 , en té infinites perquè sumant a f_0 qualsevol funció holomorfa obtenim una altra solució. Per a poder considerar la unicitat de solucions caldrà, doncs, com sempre, afegir algun tipus de condició al problema.

A continuació farem un desenvolupament paral·lel al de la secció 7.7 substituint l'operador Δ per l'operador $\bar{\partial}$.

Proposició 10.19. *a) Si f és una funció diferenciable a $\mathbb{C}$ tal que $\bar{\partial}f$ és una funció contínua amb suport compacte i $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, llavors hom té*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial}f(w)}{w - z} dm(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

En particular, la igualtat anterior es compleix si $f \in C_c^1(\mathbb{C})$.

b) Donada una funció $\phi \in C_c(\mathbb{C})$, si hi ha una solució f diferenciable a $\mathbb{C}$ de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$, amb $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, llavors aquesta solució és única i està donada per

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(w)}{w-z} dm(w), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (10.4)$$

Demostració. Pel teorema 4.2 aplicat a un disc $D(0, R)$ prou gran per tal que contingui el suport de $\bar{\partial}f$, hom té

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0, R)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial}f(w)}{w-z} dm(w).$$

Com que $\bar{\partial}f(w) = 0$ si $|w| > R$, f té una singularitat a l'infinit, però en ser $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ aquesta singularitat és evitable i f té un desenvolupament de la forma $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n w^n$ per a $|w|$ gran. Fixat z , la funció $\frac{f(w)}{w-z}$ també és holomorfa a l'infinit, amb desenvolupament de la forma $d_{-2}w^{-2} + O(w^{-3})$; és a dir, té residu 0 en el punt ∞ . Aleshores (apartat 5.5.2) hom té

$$\int_{C(0, R)} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

per a R prou gran i a) queda demostrat. Evidentment, b) es una reformulació de a). $\square$

La part b) de la proposició anterior no prova que si $\phi \in C_c(\mathbb{C})$, la funció f definida per (10.4) sigui una solució de $\bar{\partial}f = \phi$. Observem que, com que la integral està, de fet, estesa només a $K = \text{spt}(\phi)$, f és holomorfa fora de K i, per tant, la igualtat $\bar{\partial}f = \phi = 0$ sí que es compleix fora del suport. Igual que en el cas del laplacà, resulta convenient estendre la integral de (10.4) al cas d'una mesura qualsevol.

Definició 10.20. Donada una mesura μ (real o complexa) amb suport compacte $K \subset \mathbb{C}$ i $|\mu|(K) < +\infty$, la integral

$$C(\mu)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(w)}{z-w}$$

s'anomena integral de Cauchy de μ . Si $\mu = \phi dm$, posarem $C(\mu) = C(\phi)$.

Proposició 10.21. La integral de Cauchy $C(\mu)(z)$ està definida a tots els punts $z \notin K = \text{spt}(\mu)$ i defineix una funció holomorfa a $\mathbb{C} \setminus K$.

Demostració. És completament anàloga a la prova de la proposició 7.34. $\square$

Proposició 10.22. Si $\phi \in C_c^1(\mathbb{C})$, la integral de Cauchy $C(\phi)$ és de classe C^1 a $\mathbb{C}$ i compleix $\bar{\partial}C(\phi) = \phi$. Si $\phi \in C_c^k(\mathbb{C})$, llavors $C(\phi) \in C^k(\mathbb{C})$

Demostració. Fent un canvi de variable tenim

$$C(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(z-w)}{w} dm(w)$$

i aplicant la proposició 7.36, sobre derivació de convolucions, resulta

$$\bar{\partial}C(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial}\phi(z-w)}{w} dm(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial}\phi(w)}{z-w} dm(w) = \phi(z),$$

on l'última igualtat és conseqüència de la proposició 10.19. $\square$

Exemple 10.23. Calculem $C(\phi)$ per a una funció radial $\phi(z) = h(|z|)$ amb h localment integrable a $[0, +\infty)$. Tenim, integrant en polars,

$$C\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty h(r)r \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z - re^{i\theta}} \right\} dr.$$

Utilitzant, per exemple, residus hom pot veure fàcilment que la integral respecte de θ val 0 si $|z| < r$ i $2\pi/z$ si $|z| > r$, de manera que

$$C\phi(z) = \frac{2}{z} \int_0^{|z|} h(r)r dr.$$

Si $g(r) = \int_0^r h(s)ds$, hom té, per tant, $C\phi(z) = \frac{2}{z}g(|z|)$. Ara, atès que $\bar{\partial}(|z|) = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}$, resulta

$$\bar{\partial}C\phi(z) = \frac{2}{z}g'(|z|)\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2} = \frac{1}{|z|}h(|z|)|z| = h(|z|) = \phi(z). \quad \square$$

Hi ha una relació molt estreta entre la integral de Cauchy $C(\phi)$ i el potencial de Riesz $G(\phi)$, que a $\mathbb{C}$ és el potencial logarítmic,

$$G(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int \phi(w) \operatorname{Log} |z-w| dm(w).$$

Derivant aquesta expressió de $G(\phi)$ resulta

$$\partial G(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int \phi(w) \partial_z \operatorname{Log} |z-w| dm(w).$$

Ara bé,

$$\partial_z \operatorname{Log} |z - w| = \frac{1}{2} \partial_z \operatorname{Log} |z - w|^2 = \frac{1}{2} \partial_z (\operatorname{Log}(z - w) + \operatorname{Log}(\bar{z} - \bar{w})) = \frac{1}{2} \frac{1}{z - w}.$$

És a dir, si $\phi \in C_c(\mathbb{C})$, hom té

$$C(\phi) = 4\partial G(\phi).$$

En general, $C(\mu)$ no està definida a tot arreu, però sí que està definida gairebé a tot punt respecte de la mesura de Lebesgue.

Proposició 10.24. *La integral de Cauchy, $C(\mu)(z)$, d'una mesura μ amb suport compacte K i $|\mu|(K) < +\infty$ està definida gairebé per a tot $z \in \mathbb{C}$ i $C(\mu) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$.*

Demostració. Com que $1/z$ és localment integrable (lema 4.1), hom té, si $R > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{D(0,R)} |C(\mu)|(z) dw(z) &\leq \frac{1}{\pi} \int_{D(0,R)} \int_K \frac{d|\mu|(w)}{|z - w|} dw(z) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_K d|\mu|(w) \int_{D(0,R)} \frac{1}{|z - w|} dw(z) \leq M |\mu|(K) < +\infty, \end{aligned}$$

on M és una constant que depèn de R . □

Definició 10.25. *Donada una mesura μ de massa localment finita en un domini U de $\mathbb{C}$, direm que una funció $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ és una solució de l'equació $\bar{\partial}u = \mu$ a U en el sentit feble si per a tota funció $\varphi \in C^1_c(U)$ hom té*

$$\int_U u(z) \bar{\partial} \varphi(z) dw(z) = - \int_U \varphi(z) d\mu(z).$$

A aquesta definició s'hi apliquen els mateixos comentaris que s'han fet en l'apartat 7.7.2 per a les solucions febles de l'equació $\Delta u = \mu$. Si $u \in C^1(U)$ i $\bar{\partial}u = \phi$ en el sentit feble, llavors $\bar{\partial}u = \phi$ en el sentit puntual habitual.

Teorema 10.26. *Si μ és una mesura amb suport compacte a $\mathbb{C}$ i massa finita, llavors es compleix $\bar{\partial}C(\mu) = \mu$ en el sentit feble a $\mathbb{C}$.*

Demostració. Com en el teorema 7.42, hom té, si $\varphi \in C^1_c(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} C(\mu)(z) \bar{\partial} \varphi(z) dw(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(w)}{z - w} \bar{\partial} \varphi(z) dw(z) = \\ &= \int_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial} \varphi(z)}{z - w} dw(z) \right\} d\mu(w) = - \int \varphi(w) d\mu(w), \end{aligned}$$

utilitzant la proposició 10.19. $\square$

De la mateixa manera es pot parlar de solucions febles de l'equació $\partial v = \mu$, al domini U . Es tracta d'una funció $v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ tal que

$$\int_U v(z) \partial \varphi(z) dw(z) = - \int_U \varphi(z) d\mu(z)$$

per a tota funció $\varphi \in C^1_c(U)$.

La definició de solució feble per als operadors ∂ , $\bar{\partial}$, Δ té l'avantatge que no depèn d'hipòtesis de regularitat i es pot aplicar a qualsevol funció localment integrable. És immediat comprovar, a partir de les definicions, que si $u_1, u_2, u_3 \in L^1_{\text{loc}}(U)$ i

$$\bar{\partial} u_1 = u_2 \quad \text{i} \quad \partial u_2 = u_3,$$

a U en el sentit feble, llavors $\Delta u_1 = \frac{1}{4} \partial \bar{\partial} u_1 = \frac{1}{4} \partial u_2 = \frac{1}{4} u_3$ en el sentit feble a U .

Proposició 10.27. *Si U és un domini del pla i la funció $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ compleix a U l'equació $\bar{\partial} u = 0$ en el sentit feble, llavors u és holomorfa a U . Per a qualsevol mesura μ amb suport compacte i massa finita a $\mathbb{C}$ hom té $\partial G(\mu) = \frac{1}{4} C(\mu)$ en el sentit feble.*

Demostració. Si $\bar{\partial} u = 0$ en el sentit feble, llavors $\Delta u = \frac{1}{4} \partial \bar{\partial} u = 0$ en el sentit feble. Pel lema de Weyl (teorema 7.45) resulta $u \in C^\infty(\Omega)$ i, per tant, $\bar{\partial} u = 0$ en el sentit puntual i u és holomorfa a U . Així mateix, $\bar{\partial} \partial G(\mu) = \frac{1}{4} \Delta G(\mu) = \frac{1}{4} \mu$ en el sentit feble. Per tant, $\bar{\partial}(4\partial G(\mu) - C(\mu)) = 0$ en el sentit feble i $4\partial G(\mu) - C(\mu)$ és una funció entera. Com que aquesta funció és nul·la a l'infinit, ha de ser idènticament zero i resulta $4\partial G(\mu) = C(\mu)$. $\square$

Combinant la proposició anterior amb la proposició 7.38 i el teorema 7.46 s'arriba al resultat següent.

Teorema 10.28. *a) Si $\phi \in L^\infty_c(\mathbb{C})$, llavors $C(\phi)$ compleix una condició de Lipschitz del tipus $|C(\phi)(z) - C(\phi)(w)| = O\left(|z - w| \log \frac{1}{|z - w|}\right)$, sobre compactes.*

b) Si $\phi \in C_c(\mathbb{C})$ és localment lipschitziana, és a dir, compleix una condició local de Lipschitz amb exponent positiu:

$$|\phi(z) - \phi(w)| \leq c(z)|z - w|, \quad \alpha > 0, \quad c(z) \geq 0, \quad \text{si } |z - w| \leq \delta(z),$$

aleshores $C(\phi)$ és de classe C^1 a $\mathbb{C}$ i compleix $\bar{\partial} C(\phi) = \phi$.

Exemple 10.29. Si ϕ és radial i acotada, $\phi(z) = h(|z|)$, la funció $g(r) = \int_0^r h(s) s ds$ de l'exemple 10.23 compleix

$$|g(r_1) - g(r_2)| \leq \int_{r_1}^{r_2} |h(s)| s ds \leq \frac{1}{2} \|h\|_{\infty} (r_2^2 - r_1^2), \quad 0 < r_1 < r_2.$$

Així, com que $C(\phi)(z) = \frac{2}{z} g(|z|)$ i suposant $|z_1| \leq |z_2|$, resulta

$$\begin{aligned} |C(\phi)(z_1) - C(\phi)(z_2)| &= 2 \left| \frac{g(|z_1|)}{z_1} - \frac{g(|z_2|)}{z_2} \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{|z_2|} |g(|z_1|) - g(|z_2|)| + 2|g(|z_1|)| \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| \leq \\ &\leq \|h\|_{\infty} \left(\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_2|} + \frac{|z_1|^2 |z_1 - z_2|}{|z_1| |z_2|} \right) \leq \\ &= \|h\|_{\infty} |z_1 - z_2| \left(\frac{|z_2| + |z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_1|}{|z_2|} \right) \leq 3 \|h\|_{\infty} |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Veiem, doncs, que quan ϕ a més d'acotada és radial, la transformada de Cauchy, $C(\phi)$, satisfà una condició més forta que la condició a) del teorema 10.28. $\square$

10.5 Les equacions de Cauchy-Riemann no homogènies en un obert. Nuclis amb pesos

Fins aquí hem estudiat les propietats de la integral de Cauchy $C(\mu)$, on μ és una mesura a $\mathbb{C}$ amb suport compacte K i $|\mu|(K) < \infty$ i les solucions en el sentit feble de l'equació $\bar{\partial}u = \mu$. Donat un domini $U \subset \mathbb{C}$ acotat, si volem resoldre l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ amb $\phi \in C(U)$ podem considerar, senzillament, la mesura $\mu = \phi dm|_U$, sempre que $\phi \in L^1(U)$.

Proposició 10.30. *Siqui U un domini acotat de $\mathbb{C}$ i $\phi \in L^1(U) \cap C(U)$. Llavors la integral de Cauchy*

$$C(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w), \quad z \in U$$

definix una funció contínua a U que compleix $\bar{\partial}C(\phi) = \phi$ en el sentit feble a U . Si ϕ és localment lipschitziana a U , llavors $C(\phi) \in C^1(U)$ i $\bar{\partial}C(\phi) = \phi$ en el sentit clàssic a U .

Demostració. Ja sabem que $C(\phi) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ i que $\bar{\partial}C(\phi) = \phi dm|_U$ en el sentit feble a $\mathbb{C}$ i, per tant, també a U . Per veure que ϕ és contínua a U fixem un

disc $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, considerem una funció $\chi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\chi = 1$ a $\overline{D}(z_0, r)$ i posem $\phi_1 = \phi\chi$, $\phi_2 = \phi(1 - \chi)$. Aleshores $C(\phi) = C(\phi_1) + C(\phi_2)$; $C(\phi_1)$ és contínua a $\mathbb{C}$ (perquè ϕ_1 és acotada i apliquem el teorema 10.28 a)) i $C(\phi_2)$ és holomorfa a $D(z_0, r)$; per tant, $C(\phi)$ és contínua a $D(z_0, r)$. Essent aquest disc arbitrari arribem a $C(\phi) \in C(U)$. Si a més a més ϕ compleix una condició de Lipschitz local, aleshores ϕ_1 també la compleix i, pel teorema 10.28 b), $C(\phi_1)$ és de $C^1(\mathbb{C})$, amb la qual cosa $C(\phi) \in C^1(U)$. $\square$

Si $\phi \notin L^1(U)$, no tenim, en principi, cap manera de resoldre l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ a U . Anàlogament, a $\mathbb{C}$ no tenim, de moment, cap manera de resoldre l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ si ϕ no té suport compacte. Estudiarem altres mètodes de solució d'aquesta equació basades en el resultat següent.

Teorema 10.31. *Sigui U un domini qualsevol de $\mathbb{C}$ i $H(z, w)$ una funció contínua a $U \times U$ tal que $H(z, z) = 1$ si $z \in U$ i $H(z, w)$ és holomorfa en z per a tot $w \in U$. Supposem que ϕ és una funció contínua a U i que*

$$A(z) = \int_U |H(z, w)| |\phi(w)| dm(w) \quad (10.5)$$

és una funció localment acotada per a $z \in U$. Aleshores,

$$C_H(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_U H(z, w) \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w), \quad z \in U$$

defineix una funció contínua a U tal que $\bar{\partial}C_H(\phi) = \phi$ en el sentit feble. Si ϕ és localment lipschitziana a U , llavors $C_H(\phi) \in C^1(U)$ i es compleix $\bar{\partial}C_H(\phi) = \phi$ en el sentit clàssic.

Demostració. Les hipòtesis sobre H impliquen que aquesta funció es pugui escriure en la forma

$$H(z, w) = 1 + (z - w)G(z, w)$$

amb $G(z, w)$ holomorfa en z . Així, formalment,

$$C_H(\phi)(z) = C(\phi)(z) + \frac{1}{\pi} \int_U G(z, w) \phi(w) dm(w)$$

és la suma de $C(\phi)$ amb una funció holomorfa i, en conseqüència, $\bar{\partial}C_H(\phi) = \phi$. Ara bé, les hipòtesis no garanteixen la convergència dels dos termes de la dreta de la igualtat anterior i ens cal un altre argument. Fixem un disc $\overline{D}(z_0, r) \subset U$; sigui χ una funció de $C_c^\infty(U)$ tal que $\chi = 1$ a $\overline{D}(z_0, r)$ i posem $\phi_1 = \chi\phi$,

$\phi_2 = (1 - \chi)\phi$. Com que $\phi_1 \in C_c(U)$, $C(\phi_1)$ és una funció contínua a $\mathbb{C}$ pel teorema 10.28 a) i $G(z, w)$ també és contínua, conjuntament en z, w , a $U \times U$. Per tant, si $K = \text{spt}(\chi)$ hom té

$$|G(z, w)| \leq C, \text{ si } z \in \overline{D}(z_0, r) \text{ i } w \in K,$$

que dona la continuïtat de la funció

$$z \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_U G(z, w) \phi_1(w) dm(w),$$

la qual serà holomorfa a $D(z_0, r)$, pel teorema de Morera. D'altra banda, provem ara que la funció

$$C_H(\phi_2)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|w-z_0| \geq r} H(z, w) \frac{\phi_2(w)}{z-w} dm(w)$$

també és holomorfa a $D(z_0, r)$. Altra vegada, pel teorema de Morera, és suficient veure que és una funció contínua i, aplicant el teorema de convergència dominada, n'hi ha prou de provar la desigualtat

$$\int_U \sup_{|z-z_0| \leq \frac{r}{2}} |H(z, w)| |\phi(w)| dm(w) < +\infty. \quad (10.6)$$

Per la fórmula integral de Cauchy, és

$$\sup_{|z-z_0| \leq \frac{r}{2}} |H(z, w)| \leq C \int_0^{2\pi} |H(z_0 + re^{i\theta}, w)| d\theta,$$

i llavors (10.6) està dominat per

$$\int_U \int_0^{2\pi} |H(z_0 + re^{i\theta}, w)| |\phi(w)| d\theta dm(w) = \int_0^{2\pi} A(z_0 + re^{i\theta}) d\theta < +\infty,$$

on A és la funció definida a (10.5)

Amb tot això hem vist que en el disc $D(z_0, r)$, $C_H(\phi)$ és la suma de $C(\phi_1)$ i d'una funció holomorfa, fet que implica la continuïtat de $C_H(\phi)$ i la igualtat $\bar{\partial}C_H(\phi) = \phi$. A més, $C_H(\phi)$ tindrà la mateixa regularitat local que $C(\phi)$ i això demostra la segona part del teorema. $\square$

Exemple 10.32. És clar que amb hipòtesis escaients sobre una mesura μ , el teorema 10.31 es pot generalitzar en el sentit que si posem,

$$C_H(\mu)(z) = \frac{1}{\pi} \int_U H(z, w) \frac{d\mu(w)}{z-w}, \quad z \in U,$$

es pugui concloure que $C_H(\mu) \in L^1_{\text{loc}}(U)$ i $\bar{\partial}C_H(\mu) = \mu$ en el sentit feble. Per exemple, quan $\mu = \delta_a$ (delta de Dirac) amb $a \in U$, és

$$C_H(\delta_a)(z) = \frac{1}{\pi} \frac{H(z, a)}{z - a}.$$

El fet que $\bar{\partial}C_H(\delta_a) = \delta_a$ en el sentit feble es veu, formalment, de la manera següent: com que H és holomorfa en z , és

$$\bar{\partial}C_H(\delta_a) = H(z, a)\bar{\partial}\left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{z - a}\right),$$

però $\bar{\partial}\left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{z - a}\right) = \delta_a$, pel teorema 10.26, i llavors

$$\bar{\partial}C_H(\delta_a) = H(z, a)\delta_a = H(a, a)\delta_a = \delta_a. \quad \square$$

Una hipòtesi més restrictiva, però prou general perquè sigui aplicable a molts casos interessants, és suposar que la funció $H(z, w)$ del teorema 10.31 satisfà la condició

$$|H(z, w)| \leq \Psi_1(z)\Psi_2(w) \quad (10.7)$$

amb Ψ_1, Ψ_2 contínues a U . Aleshores la funció $A(z)$ definida a (10.5) és localment acotada a U sempre que es compleixi

$$\int_U \Psi_2(w)|\phi(w)|dm(w) < +\infty.$$

Aquesta condició ens permet resoldre l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ per a funcions $\phi \in C(U)$, no necessàriament integrables a U , i més gran serà la classe de funcions ϕ que podrem prendre com més ràpid sigui el decreixement cap a zero de $\Psi_2(w)$ quan $w \rightarrow \partial U$.

Per exemple, si U és el disc unitat, podem agafar

$$H(z, w) = \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\bar{w}}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

que satisfà

$$|H(z, w)| \leq \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - |z|}\right)^k, \quad |z|, |w| < 1,$$

que és (10.7) amb $\Psi_1(z) = (1 - |z|)^{-k}$ i $\Psi_2(w) = (1 - |w|^2)^k$. Tenim llavors el resultat següent:

Proposició 10.33. Si $\phi \in C(\mathbb{D})$ i $\int_{\mathbb{D}} |\phi(w)|(1 - |w|^2)^k dm(w) < +\infty$ per a algun $k \in \mathbb{N}$, aleshores la funció

$$f_k(z) = C_k(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\bar{w}} \right)^k \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w)$$

és contínua a $\mathbb{D}$ i satisfà l'equació $\bar{\partial} f_k = \phi$ en el sentit feble; si ϕ és localment lipschitziana, llavors $f_k \in C^1(\mathbb{D})$ i $\bar{\partial} f_k = \phi$ en el sentit clàssic a $\mathbb{D}$.

La solució f_k de la proposició anterior està relacionada amb una fórmula de descomposició similar a la fórmula de Cauchy-Green.

Proposició 10.34. Si $f \in C^1(\mathbb{D})$ i per a $k \in \mathbb{N}$ es compleix

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{k-1} |f(w)| dm(w) &< +\infty, \\ \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^k |\bar{\partial} f(w)| dm(w) &< +\infty, \end{aligned}$$

llavors hom té

$$f(z) = \frac{k}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{k-1}}{(1 - z\bar{w})^{k+1}} f(w) dm(w) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^k}{(1 - z\bar{w})^k} \frac{\bar{\partial} f(w)}{z - w} dm(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostració. Considerem la forma $\eta = \frac{(r - |w|^2)^k}{(1 - z\bar{w})^k} \frac{f(w)}{w - z} dw$ al domini $D(0, r) \setminus \overline{D}(z, \varepsilon)$ per a $r < 1$, $|z| < r$ i ε prou petit. Calculant, resulta

$$d\eta = \frac{(r - |w|^2)^k}{(1 - z\bar{w})^k} \frac{\bar{\partial} f(w)}{w - z} d\bar{w} \wedge dw + k \frac{f(w)}{w - z} \frac{(r - |w|^2)^{k-1} (rz - w)}{(1 - z\bar{w})^{k+1}} d\bar{w} \wedge dw$$

i, aplicant el teorema de Stokes,

$$\int_{D(0, r) \setminus \overline{D}(z, \varepsilon)} d\eta = \left(\int_{\partial D(0, r)} - \int_{\partial D(z, \varepsilon)} \right) \eta = - \int_{C(z, \varepsilon)} \frac{(r - |w|^2)^k}{(1 - \bar{w}z)^k} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Fent $r \nearrow 1$, $\varepsilon \searrow 0$ i utilitzant el teorema de la convergència dominada arribem al resultat anunciat. $\square$

Fent servir la proposició 10.34 també podem veure que la funció f_k donada per la proposició 10.33 compleix $\bar{\partial} f_k = \phi$. En efecte, si $f \in C^1(\mathbb{D})$ és qualsevol solució de $\bar{\partial} f = \phi$, aleshores la proposició 10.34 i la definició de f_k donen

$$f(z) - f_k(z) = \frac{k}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{k-1}}{(1 - z\bar{w})^{k+1}} f(w) dm(w),$$

que és una funció holomorfa de z i, per tant, $\bar{\partial} f_k = \bar{\partial} f = \phi$.

Corol·lari 10.35. *Si f és holomorfa i integrable a $\mathbb{D}$, hom té*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\bar{w})^2} dm(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Igual que la fórmula integral de Cauchy, aquesta és una fórmula reproductora per a les funcions holomorfes, però hi ha una diferència essencial respecte de la integral de Cauchy: aquí hi intervenen *tots* els valors de f a $\mathbb{D}$ i no només els valors de f sobre $\partial\mathbb{D}$. El nucli $1/\pi(1 - z\bar{w})^2$ s'anomena *nucli de Bergman* del disc unitat (vegeu l'exercici 21 del capítol 4).

Així, per al cas del disc unitat $\mathbb{D}$, hem obtingut dos tipus de solucions de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$. La primera és la donada per la integral de Cauchy,

$$C(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w),$$

definida quan $\phi \in C(\mathbb{D}) \cap L^1(\mathbb{D})$, i la segona és la que dona la proposició 10.33 amb $k = 1$, és a dir,

$$f_1(z) = C_1(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |w|^2}{1 - z\bar{w}} \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w)$$

sempre que es compleixi la condició $\phi \in C(\mathbb{D})$ i

$$\int_{\mathbb{D}} |\phi(w)|(1 - |w|^2) dm(w) < +\infty.$$

Estudiem-les amb més detall, separadament.

Pel que fa a la solució $C(\phi)$ sabem que $C(\phi) \in C(\mathbb{D})$, i si $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D})$, llavors $C(\phi)$ és contínua a $\overline{\mathbb{D}}$, per l'afirmació a) del teorema 10.28. Això passa, en particular, si $\phi \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

En l'enunciat següent les notacions són les de la proposició 7.28.

Teorema 10.36. *Si $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D})$, d'entre totes les solucions de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$, $f = C(\phi)$ és l'única solució contínua a $\overline{\mathbb{D}}$ que compleix $f \in A_0(\mathbb{T})$, és a dir, que és perpendicular a l'espai $A(\mathbb{T})$ respecte del producte escalar de $L^2(\mathbb{T})$.*

Demostració. Segons la proposició 7.28 cal veure que $C(\phi)|_{\mathbb{T}}$ té coeficients de Fourier zero a tots els enters no negatius:

$$\int_0^{2\pi} C(\phi)(e^{it}) e^{-int} dt = 0, \quad n \geq 0.$$

Utilitzant el teorema de Fubini, és suficient provar això mateix per a la funció $(z - w)^{-1}$, $w \in \mathbb{D}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{e^{it} - w} = \int_0^{2\pi} e^{-int} \sum_{m=0}^{\infty} w^m e^{-i(m+1)t} dt = 0, \quad n > 0,$$

igualtats que són, òbviament, certes.

Recíprocament, suposem que $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ compleix les condicions $\bar{\partial}f = \phi$ i $f|_{\mathbb{T}} \in \overline{A_0(\mathbb{T})}$. Aleshores $\bar{\partial}(f - C(\phi)) = 0$, és a dir, $f - C(\phi)$ és holomorfa. Així, $\varphi = f - C(\phi)$ és una funció de $A(\mathbb{T})$ i també pertany a $\overline{A_0(\mathbb{T})}$ perquè f i $C(\phi)$ són d'aquest espai. Per tant, $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ a $L^2(\mathbb{T})$, que vol dir

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 dt = 0.$$

En conseqüència, $\varphi = 0$, o sigui, $f - C(\phi) = 0$ a $\mathbb{T}$ i, sent holomorfa, resulta $f - C(\phi) = 0$. $\square$

Exemple 10.37. Prenem $\phi(z) = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Clarament, $f = \frac{1}{n+1} \bar{z}^{n+1}$ compleix $\bar{\partial}f = \phi$ i restringida a $\mathbb{T}$ pertany a $\overline{A_0(\mathbb{T})}$. Per tant, $C(\phi) = f$ i

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\bar{w}^n}{z - w} dm(w) = \frac{1}{n+1} \bar{z}^{n+1}, \quad |z| < 1.$$

Més generalment, si g és holomorfa a $\mathbb{D}$, contínua a $\overline{\mathbb{D}}$, $\phi = \bar{g}$ i h és una primitiva holomorfa de g , $h' = g$, amb $h(0) = 0$, el mateix argument prova que $C(\phi) = \bar{h}$ perquè $\bar{\partial}\bar{h} = \bar{h}' = \bar{g}$ i $\overline{C(\phi)} = h$ és holomorfa i nul·la a l'origen. $\square$

Una altra manera d'expressar la propietat d'ortogonalitat de $C(\phi)$ respecte de $A(\mathbb{T})$, que acabem de descriure, és dir que entre totes les solucions $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$, la solució $C(\phi)$ és la que minimitza la quantitat

$$\int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 |dz|$$

Pel que fa a la solució $f_1(z)$, el resultat corresponent és el següent.

Teorema 10.38. Si $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D})$, d'entre totes les solucions de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$, la funció $f = f_1 = C_1(\phi)$ és l'única solució que és perpendicular a les funcions de $A(\mathbb{D})$ respecte del producte escalar de $L^2(\mathbb{D})$: $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dm$.

Demostració. Cal veure que si g és de l'espai $A(\mathbb{D})$, llavors $\int_{\mathbb{D}} f_1(z) \overline{g(z)} dm(z) = 0$. Pel teorema de Fubini és suficient provar

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1 - z\bar{w})(z - w)} \overline{g(z)} dm(z) = 0, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Considerem la forma $\eta = \text{Log} \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| \overline{g(z)} d\bar{z}$, que és contínua a $\mathbb{D} \setminus D(w, \varepsilon)$ amb $\varepsilon > 0$ prou petit i compleix

$$d\eta = \partial \left(\overline{g(z)} \text{Log} \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| \right) dz \wedge d\bar{z} = \overline{g(z)} \partial \text{Log} \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| dz \wedge d\bar{z}.$$

Ara bé, $\partial_z \text{Log} \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| = \frac{1}{2} \partial_z \log \left(\frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{\bar{w}}{1-z\bar{w}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-|w|^2}{(z-w)(1-z\bar{w})}$. Com que $\eta = 0$ quan $|z| = 1$ (perquè $|z-w| = |1-z\bar{w}|$ si $|z| = 1$), pel teorema de Stokes resulta

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D} \setminus D(w, \varepsilon)} \frac{(1-|w|^2)}{(z-w)(1-z\bar{w})} \overline{g(z)} dz \wedge d\bar{z} = - \int_{C(w, \varepsilon)} \text{Log} \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| \overline{g(z)} d\bar{z}$$

i fent $\varepsilon \searrow 0$ s'obté el resultat desitjat, perquè la integral de la dreta està acotada per $\varepsilon \text{Log} \frac{1}{\varepsilon}$.

Recíprocament, si f és una altra solució de $\bar{\partial}f = \phi$ amb les mateixes propietats, raonant com en el teorema 10.36 provaríem la igualtat

$$\int_{\mathbb{D}} |f - f_1|^2 dm(z) = 0,$$

que dona $f = f_1$. □

Exemple 10.39. Si $g \in A(\mathbb{D})$, $\phi = \bar{g}$ i $h' = g$ amb $h(0) = 0$, novament $f = \bar{h}$ compleix $\bar{\partial}f = \phi$ i si $F \in A(\mathbb{D})$

$$\int_{\mathbb{D}} F(z) \overline{f(z)} dm = \int_{\mathbb{D}} F(z) h(z) dm(z) = \pi F(0) h(0) = 0$$

perquè $h(0) = 0$. Així, també $C_1(\bar{g}) = \bar{h}$. □

Una altra forma d'expressar la propietat d'ortogonalitat és dir que, d'entre totes les solucions f de $\bar{\partial}f = \phi$, la solució $f_1 = C_1(\phi)$ és la que minimitza la quantitat

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dm(z).$$

Apliquem ara el teorema 10.31 amb $U = \mathbb{C}$ i

$$H(z, w) = \exp(z\bar{w} - |w|^2).$$

En primer lloc, ens cal trobar una condició prou general sobre $\phi \in C(\mathbb{C})$ per tal que

$$A(z) = \int_{\mathbb{C}} |\exp(z\bar{w} - |w|^2)| |\phi(w)| dm(w)$$

sigui una funció localment acotada. Una condició que ho garanteix és aquesta:

$$\|\phi\|_*^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{C}} |\phi(w)|^2 \exp(-|w|^2) dm(w) < +\infty.$$

En efecte, per la desigualtat de Schwarz, hom té

$$\begin{aligned} |A(z)| &\leq \int_{\mathbb{C}} \exp(\operatorname{Re} z\bar{w} - |w|^2) |\phi(w)| dm(w) \leq \\ &\leq \|\phi\|_* \left\{ \int_{\mathbb{C}} \exp(2 \operatorname{Re} z\bar{w} - |w|^2) dm(w) \right\}^{1/2} = \\ &= \|\phi\|_* \exp \frac{|z|^2}{2} \left\{ \int_{\mathbb{C}} \exp(-|z - w|^2) dm(w) \right\}^{1/2} = \\ &= C \|\phi\|_* \exp \frac{|z|^2}{2} \leq M, \end{aligned}$$

on M és una constant si z és mou en un compacte.

Així, obtenim el resultat següent.

Proposició 10.40. *Si $\phi \in C(\mathbb{C})$ i $\|\phi\|_* < +\infty$, la funció*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp(z\bar{w} - |w|^2) \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w)$$

és una funció contínua a $\mathbb{C}$ que compleix $\bar{\partial}f = \phi$ en el sentit feble; si ϕ és localment lipschitziana, llavors $f \in C^1(\mathbb{C})$ i $\bar{\partial}f = \phi$ en el sentit clàssic.

Els mètodes desenvolupats fins ara ens han permès provar que l'equació $\bar{\partial}f = \phi$ es pot resoldre, en un domini U , per a funcions $\phi \in C(U)$ que són integrables a U respecte de certes pesos, però no permeten tractar el cas general d'una funció $\phi \in C(U)$ qualsevol, sense cap condició d'integrabilitat. A continuació estudiarem aquesta qüestió en la seva formulació més general, utilitzant el teorema de Runge.

Teorema 10.41. *Sigui U un domini de $\mathbb{C}$, acotat o no, i sigui μ una mesura de massa localment finita a U , és a dir, que per a tot compacte $K \subset U$, és $|\mu|(K) < +\infty$. Llavors existeix una funció $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ que compleix $\bar{\partial}f = \mu$ en el sentit feble a U . A més, a tot obert $V \subset U$ en el qual sigui $d\mu = \phi dw$ amb ϕ localment lipschitziana a V , la funció f pertany a $C^1(V)$, i si $\phi \in C^k(V)$, llavors també $f \in C^k(V)$, $1 \leq k \leq \infty$.*

Demostració. Considerem els compactes $K_n \subset U$ del lema 1.15 i siguin $\psi_n \in C_c^\infty(U)$ funcions que compleixen $\psi_n = 1$ en un entorn de K_n : posem $\varphi_1 = \psi_1$ i $\varphi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ si $n > 1$, de manera que $\varphi_n = 0$ en un entorn de K_{n-1} i $\sum_1^\infty \varphi_n = 1$ a U . Considerem ara la mesura $\varphi_n d\mu$ que té suport compacte i massa finita, i la seva integral de Cauchy,

$$C(\varphi_n d\mu)(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\varphi_n(w)}{w - z} d\mu(w),$$

que, com sabem, compleix $\bar{\partial}(C(\varphi_n d\mu)) = \varphi_n d\mu$ en el sentit feble, a tot $\mathbb{C}$.

Evidentment, $C(\varphi_n d\mu)$ és una funció holomorfa en un entorn de K_{n-1} i, pel teorema 10.7, hi ha funcions $f_n \in H(U)$ de manera que

$$|C(\varphi_n d\mu)(z) - f_n(z)| \leq 2^{-n} \quad \text{si } z \in K_{n-1}.$$

Provarem ara que la sèrie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (C(\varphi_n d\mu)(z) - f_n(z))$$

defineix la funció f que volem. Fixat un compacte $K \subset U$, tots els termes de la sèrie a partir d'un en endavant són funcions holomorfes en un entorn W de K i la sèrie és uniformement convergent sobre els compactes de W . És a dir, fixat K hi ha un número natural N i un entorn W de K de manera que

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^N C(\varphi_n d\mu) - f_n(z) + \text{funció holomorfa a } W = \\ &= \sum_{n=1}^N C(\varphi_n d\mu) + \text{funció holomorfa a } W. \end{aligned}$$

Per tant, $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ i la mateixa descomposició anterior demostra que $\bar{\partial}f = d\mu$ en el sentit feble. Si $d\mu = \phi dm$ en un obert $V \subset U$, llavors $f - C(\phi)$ és holomorfa a V ; per tant, qualsevol solució de $\bar{\partial}f = \phi$ té les mateixes propietats locals de regularitat que $C(\phi)$. $\square$

Una diferència important en relació amb les solucions que hem trobat en els teoremes 10.36 i 10.38 és que ara no tenim un operador lineal que doni la solució, és a dir, en principi no es pot assegurar que f depengui linealment de μ .

Corol·lari 10.42. *L'equació de Poisson $\Delta u = \mu$ té solució $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ en el sentit feble, per a qualsevol mesura μ de massa localment finita a U .*

Demostració. Fem servir la igualtat $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$. Primer, amb l'ajuda del teorema 10.41 triem una funció $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ tal que $\bar{\partial}f = \mu$. Ara hem de resoldre l'equació $4\partial u = f$, que equival a $4\partial\bar{u} = \bar{f}$, i ho tornem a fer amb el mateix teorema. $\square$

10.6 El problema de Dirichlet per a l'operador $\bar{\partial}$

Acabem de veure que les equacions de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}f = \phi$ en un domini U sempre tenen una solució $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$, per a qualsevol dada $\phi \in C(U)$. La solució general és aleshores, òbviament, $f + h$ amb $h \in H(U)$. Si es vol determinar unívocament una solució, és a dir, plantejar un problema que tingui solució única, és necessari imposar quelcom més a la solució f . Per exemple, hem vist en la proposició 10.19 que, en el cas $U = \mathbb{C}$, el potencial de Cauchy $C(\phi)$ és l'única solució que s'anulla a l'infinit, i en el cas que U sigui el disc unitat hem vist també dos resultats en aquest sentit (teoremes 10.36 i 10.38).

Hom podria pensar que una possibilitat és prefixar els valors de f a la frontera del domini i plantejar un problema de tipus Dirichlet: donades les funcions $\varphi \in C(\partial U)$ i $\phi \in C(U)$, busquem una funció $f \in C(\bar{U})$ tal que $f = \varphi$ a ∂U i $\bar{\partial}f = \phi$ a U . Aquest problema, si té solució, és única, perquè si f_1, f_2 en són dues solucions, aleshores $f_1 - f_2$ és holomorfa a U i nul·la a ∂U i, per tant, $f_1 = f_2$. Ara bé, és molt fàcil adonar-se que aquest és un problema mal posat que, en general, no té solució. La raó és que les dades φ, ϕ han de complir una condició de compatibilitat.

En les línies següents suposarem que U és un domini acotat amb vora regular a trossos orientada positivament i suposarem també que existeixen solucions a U , en el sentit clàssic, de l'equació $\bar{\partial}f = \phi$. Donades les funcions $\varphi \in C(\partial U)$ i $\phi \in C(\bar{U})$, si $f \in C^1(\bar{U})$ compleix $f = \varphi$ a ∂U i $\bar{\partial}f = \phi$ a U , llavors per a tota funció h holomorfa en un entorn de $\bar{U}$ tindrem

$$\int_{\partial U} \varphi h dz = \int_{\partial U} f h dz = \int_U d(fh dz) = \int_U h \phi d\bar{z} \wedge dz.$$

En conseqüència, per tal que hi hagi solució del problema de tipus Dirichlet és necessari que les dades φ , ϕ compleixin l'equació de compatibilitat següent:

$$\int_{\partial U} \varphi(z)h(z)dz = \int_U h(z)\phi(z)d\bar{z} \wedge dz, \quad (10.8)$$

per a tota funció h holomorfa en un entorn de $\bar{U}$.

En el cas homogeni, $\phi = 0$, estem discutint quines funcions $\varphi \in C(\partial U)$ són els valors a la frontera de funcions contínues a $\bar{U}$ i holomorfes a U . La condició necessària anterior és

$$\int_{\partial U} \varphi(z)h(z)dz = 0, \quad \text{per a tota funció } h \text{ holomorfa en un entorn de } \bar{U}. \quad (10.9)$$

Ara bé, pel teorema de Runge, aquestes funcions h són límits uniformes sobre $\bar{U}$ de funcions racionals amb pols (simples) a $\mathbb{C} \setminus \bar{U}$; per tant, la condició (10.9) és equivalent a

$$\int_{\partial U} \frac{\varphi(z)}{z-w} dz = 0, \quad w \notin \bar{U}. \quad (10.10)$$

Ara veurem que aquesta condició també és suficient per a l'existència de solució d'aquest problema de Dirichlet holomorf.

Teorema 10.43. *Una funció $\varphi \in C(\partial U)$ té una extensió contínua a $\bar{U}$ i holomorfa a U si i només si es compleixen les condicions equivalents (10.9) o (10.10).*

Demostració. Tan sols ens falta provar que les condicions són suficients. La funció que busquem, $F \in C(\bar{U}) \cap H(U)$ amb $F|_{\partial U} = \varphi$, no pot ser altra, per la fórmula de Cauchy, que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw.$$

Utilitzant (10.10) cal veure que si $a \in \partial U$, aleshores $\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in U}} F(z) = \varphi(a)$.

Tot punt $z \in U$, prou proper a ∂U , té una projecció $\pi(z) \in \partial U$ ben definida, en el sentit que $\pi(z)$ és el punt de ∂U més proper a z . És a dir,

$$\min\{|z-w|: w \in \partial U\} = |z-\pi(z)| \stackrel{\text{def}}{=} d(z)$$

i aquest punt és únic per la regularitat de ∂U . Designem per z^* un punt situat sobre la normal exterior a ∂U en el punt $\pi(z)$, a distància $d(z)$ de $\pi(z)$ (fig. 10.4). Aleshores $z^* \notin \bar{U}$ i hom té

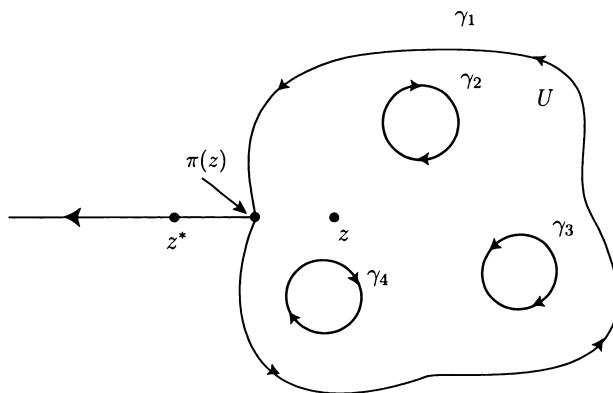


Figura 10.4

$$\int_{\partial U} \frac{\varphi(w)}{w - z^*} dw = 0.$$

En conseqüència, podem escriure

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \varphi(w) \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z^*} \right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \varphi(w) \frac{z - z^*}{(w - z)(w - z^*)} dw. \end{aligned}$$

Considerem ara el nucli

$$P(z, w) = \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z^*} \right) = \frac{z - z^*}{(w - z)(w - z^*)}$$

i observem que té les propietats següents:

- a) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} P(z, w) dw = 1$
- b) $|P(z, w)| \leq c \frac{d(z, \partial U)}{|z - w|^2}$, si $w \in \partial U$
- c) $\int_{\partial U} |P(z, w)| |dw| \leq c$ si $z \in U$,

on c és una constant.

La primera és conseqüència de les igualtats

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{dw}{w - z} = 1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{dw}{w - z^*} = 0.$$

Per a la segona, observem que

$$|z - w| \leq d(z, \partial U) + |\pi(z) - w| \leq 3|z - w| \quad (10.11)$$

(perquè $|\pi(z) - w| \leq d(z) + |z - w| \leq 2|z - w|$), i el mateix val per a z^* . Per tant,

$$|z^* - w| \geq \frac{1}{3} (d(z, \partial U) + |\pi(z) - w|) \geq \frac{1}{3} |z - w|,$$

que demostra b). La propietat c) és conseqüència de b).

Aquestes propietats són anàlogues a les del nucli de Poisson del disc (apartat 7.6.1). La resta de la demostració es fa com en la solució del problema de Dirichlet al disc (de fet, F també és la solució del problema de Dirichlet!). Posem

$$F(z) - \varphi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} (\varphi(w) - \varphi(a)) P(z, w) dw$$

i notem que, donat $\varepsilon > 0$, per la continuïtat de φ , hi ha un $\delta > 0$ tal que $|\varphi(w) - \varphi(a)| < \varepsilon$, si $|w - a| < \delta$, $w \in \partial U$. La contribució de $\{w: |w - a| < \delta\}$ a la integral anterior és, aleshores, menor que

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} \int |P(z, w)| dw \leq \frac{C\varepsilon}{2\pi},$$

i la contribució de $\{w: |w - a| \geq \delta\}$ està dominada per

$$\frac{2\|\varphi\|_\infty}{2\pi} \int_{|w-a|\geq\delta} |P(z, w)| |dw| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty d(z, \partial U)}{\pi} \int_{|w-a|\geq\delta} \frac{|dw|}{|z - w|^2}. \quad (10.12)$$

Si $|z - a| < \delta/2$ i $|w - a| \geq \delta$, llavors $|w - z| \geq \delta/2$ i el terme de la dreta de (10.12) és inferior o igual a $C\delta \operatorname{dist}(z, \partial U)$ i, per tant, és menor que ε si z és prou proper al punt a . $\square$

Si $\overline{U}$ és simplement connex, (és a dir, $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ és connex), llavors tota funció holomorfa en un entorn de $\overline{U}$ és límit uniforme sobre $\overline{U}$ (per tant, sobre ∂U) d'una successió de polinomis. En aquest cas la condició (10.9) esdevé

$$\int_{\partial U} \varphi(z) z^n dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

talment com en el cas del disc (apartat 7.6.1)

Per a finalitzar tractarem el problema de tipus Dirichlet no homogeni per a l'operador $\bar{\partial}$. Si les dades $\varphi \in C(\partial U)$ i $\phi \in C(\overline{U})$ compleixen la condició de compatibilitat (10.8), triem primer $f = C(\phi)$, que és una funció contínua a $\overline{U}$

que compleix $\bar{\partial}f = \phi$ en el sentit feble. Si h és holomorfa en un entorn de $\bar{U}$, llavors hom té

$$\int_{\partial U} (\varphi(z) - f(z))h(z)dz = \int_U h\phi d\bar{z} \wedge dz - \int_{\partial U} f(z)h(z)dz.$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} f(z)h(z)dz &= \int_{\partial U} \left(\frac{1}{\pi} \int_U \frac{\phi(w)}{z-w} dm(w) \right) h(z)dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_U \phi(w) \int_{\partial U} \frac{h(z)}{z-w} dz = 2i \int_U \phi(w)h(w)dm(w) = \\ &= \int_U h\phi d\bar{w} \wedge dw. \end{aligned}$$

En conseqüència, la funció $\varphi - f$ compleix la condició (10.9), i pel teorema 10.43 és el valor a ∂U d'una funció $F \in C(\bar{U})$, F holomorfa a U . Amb tot això, $f + F$ és la solució del problema no homogeni, perquè $f + F = \varphi$ a ∂U i $\bar{\partial}(f + F) = \bar{\partial}f = \phi$ a U .

Hem provat, doncs, el resultat següent:

Teorema 10.44. *Donades les funcions $\phi \in C(\bar{U})$ i $\varphi \in C(\partial U)$, el problema $\bar{\partial}f = \phi$ a U i $f = \varphi$ a ∂U té solució $f \in C(\bar{U})$ si i només si les funcions ϕ , φ compleixen la condició de compatibilitat (10.8).*

Novament, si $\bar{U}$ és simplement connex, és suficient imposar (10.8) per als polinomis $h(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, de manera que (10.8) equival a

$$\int_{\partial U} \varphi(z)z^n dz = \int_U \phi(z)z^n d\bar{z} \wedge dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemple 10.45. Si $\phi(z) = \bar{z}$ i U és el disc unitat $\mathbb{D}$, la condició sobre φ és

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \varphi(z)z^n dz = \int_{\mathbb{D}} \bar{z}z^n d\bar{z} \wedge dz = 2i \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+2} e^{i(n-1)\theta} dr d\theta.$$

Aquesta darrera integral val 0 si $n \neq 1$, i πi si $n = 1$. Si $\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k)e^{ik\theta}$ és el desenvolupament en sèrie de Fourier de φ , la integral de l'esquerra és $2\pi i \hat{\varphi}(-n-1)$. Així, ha de ser $\hat{\varphi}(-1) = 0$, $\hat{\varphi}(k) = 0$ per a $k \leq -3$ i $\hat{\varphi}(-2) = \frac{1}{2}$, és a dir,

$$\varphi(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}e^{-2i\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)e^{ik\theta}.$$

L'extensió f de φ amb $\bar{\partial}f = \phi$ és

$$f(z) = \frac{1}{2} \bar{z}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k) z^k. \quad \square$$

A diferència del problema de Dirichlet per al laplacà, no té sentit, per tant, plantejar en general el problema

$$\bar{\partial}f = \phi \text{ a } U, \quad f = 0 \text{ a } \partial U.$$

Aquest problema només té solució (única) si ϕ compleix la condició

$$\int_U \phi h dm = 0, \quad \text{per a } h \text{ holomorfa en un entorn de } \bar{U}.$$

En lloc de demanar a la solució f de ser nul·la a ∂U , el més natural és demanar que sigui “la més petita possible” en el sentit, per exemple, que minimitzi el valor de la integral

$$\int_{\partial U} |f(z)|^2 |dz|$$

entre totes les solucions de $\bar{\partial}f = \phi$. Un exemple de solució d'aquest problema, en el cas del disc unitat, és el teorema 10.36.

10.7 Exercicis

1. Digueu si hi pot haver o no una successió de polinomis (P_n) de manera que

$$P_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ si } \operatorname{Im} z > 0, \quad P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}, \quad P_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \text{ si } \operatorname{Im} z < 0.$$

2. Siguin $0 < a < b$ fixats. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ construïu un polinomi P_n de manera que, per a $|z| < n$, es compleixi

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\leq \frac{1}{n} && \text{si } \operatorname{Im} z \leq 0 \text{ o } \operatorname{Im} z \geq b, \\ |P_n(z)| &\geq n && \text{si } \operatorname{Im} z = a. \end{aligned}$$

Utilitzeu (P_n) per a trobar una successió de polinomis que convergeixi puntualment cap a zero a $\mathbb{C}$ i uniformement sobre tot compacte de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, però que no convergeixi uniformement a cap entorn de cap punt de l'eix real.

3. Proveu que si $f(z)$ és una funció contínua al disc $\overline{D}(a, r)$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ i holomorfa a $D(a, r)$, llavors f és el límit uniforme a $\overline{D}(a, r)$ d'una successió de polinomis en $z - a$. Proveu també que si f és contínua a $\mathbb{C} \setminus D(a, r)$ i holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r)$, llavors $f(z)$ és límit uniforme a $\mathbb{C} \setminus D(a, r)$ d'una successió de polinomis en $1/(z - a)$.

4. Sigui U un domini acotat del pla de manera que ∂U està formada per un nombre finit de circumferències. Proveu que tota funció contínua a $\overline{U}$ i holomorfa a U es pot aproximar uniformement a $\overline{U}$ per funcions racionals amb pols fora de $\overline{U}$. Quines són les funcions contínues a $\overline{U}$ que es poden aproximar uniformement a $\overline{U}$ per polinomis?

Indicació: Si $C(z_0, r_0)$ és la frontera exterior de U i $C(z_i, r_i)$, $i = 1, \dots, m$ les altres components de ∂U , proveu que una funció f en les hipòtesis del problema es pot descompondre com $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$ on cada f_i està en alguna de les hipòtesis de l'exercici 3 respecte de $D(z_i, r_i)$.

5. Sigui $U = \{z: |z| < 1 \text{ i } |2z - 1| \geq 1\}$ i $f \in H(U)$. Contesteu les preguntes següents:

- Existeixen polinomis $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $P_n \rightarrow f$ uniformement sobre els compactes de U ?
- Existeixen polinomis $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $P_n \rightarrow f$ uniformement sobre U ?
- Què es pot dir si f és holomorfa en un entorn de $\overline{U}$?

6. Sigui $K \subset U$, K compacte, U obert de $\mathbb{C}$. Definim

$$\widehat{K} = \widehat{K}_U = \{z \in U : |f(z)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)|, \text{ per a tota funció } f \in H(U)\}.$$

Proveu les afirmacions següents:

- i) $\widehat{K}$ és un compacte, $\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$ i $\widehat{K}$ està contingut a l'embolcall convex de K .
 - ii) $\widehat{K}$ és la unió de K i de les components connexes de $U \setminus K$ que són relativament compactes a U .
7. Siguin $U_1 \subset U_2$ dos oberts de $\mathbb{C}$. Proveu que les afirmacions següents són equivalents:
- i) Tota funció $f \in H(U_1)$ es pot aproximar per funcions de $H(U_2)$, uniformement sobre els compactes de U_1 .
 - ii) Si $U_2 \setminus U_1 = L \cup F$ amb L compacte, F tancat a U_2 i $L \cap F = \emptyset$, llavors ha de ser $L = \emptyset$.
 - iii) Per a tot $K \subset U_1$, K compacte és $\widehat{K}_{U_2} = \widehat{K}_{U_1}$.
 - iv) Per a tot $K \subset U_1$, K compacte és $\widehat{K}_{U_2} \cap U_1 = \widehat{K}_{U_1}$.
 - v) Per a tot $K \subset U_1$, K compacte és $\widehat{K}_{U_2} \cap U_1$ compacte.

8. Construïu una funció meromorfa al disc unitat amb pols simples i residu 1 en els punts $z_{nk} = (1 - 2^{-n})e^{\frac{2\pi i}{n}k}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $n = 0, 1, \dots$

9. Proveu que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}$ defineix una funció meromorfa a tot el pla.

Trobeu els pols de f i les parts principals respectives a cada pol. Expressen f en termes de les funcions trigonomètriques.

10. Proveu la fórmula

$$\pi \operatorname{tg}(\pi z) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2 - z^2} \quad \text{per a } z \neq k + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

11. Per a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, calculeu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + b^2}.$$

12. Proveu la igualtat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

13. Proveu les fórmules

$$a) \frac{\sin \alpha z}{\sin \pi z} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n\alpha}{z^2 - n^2}, \quad b) \frac{\cos \alpha z}{\cos \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\alpha}{z^2 - n^2}$$

amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\alpha \neq k\pi$, k enter, en l'apartat a).

14. Sigui $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ amb U, U_j oberts i f_j una funció meromorfa a U_j per a cada $j = 1, 2, \dots$ de manera que $f_j - f_k \in H(U_j \cap U_k)$ per a tot parell j, k . Proveu que existeix una funció f , meromorfa a U , tal que $f - f_j \in H(U_j)$ per a $j = 1, 2, \dots$

15. Sigui $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ amb U, U_j oberts i $g_{jk} \in H(U_j \cap U_k)$ per a $j, k = 1, 2, \dots$ de manera que es compleixen les condicions

$$g_{jk} = -g_{kj}, \quad g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0 \quad \text{a } U_j \cap U_k \cap U_l \quad \text{per a tot } j, k, l \in \mathbb{N}.$$

Proveu que existeixen funcions $g_j \in H(U_j)$ de manera que

$$g_{jk} = g_k - g_j \quad \text{a } U_j \cap U_k, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

16. Si $\phi \in C^1(\mathbb{D})$ és acotada a $\mathbb{D}$ proveu, directament, que la integral de Cauchy de ϕ , $C(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w)}{w - z} dw$, és una funció contínua a $\mathbb{C}$, de classe C^2 a $\mathbb{D}$ que compleix $\bar{\partial}C(\phi) = 0$ a $\mathbb{D}$.

17. Generalitzeu les proposicions 10.33 i 10.34 prenent

$$H(z, w) = \varphi \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\bar{w}} \right),$$

on φ és una funció holomorfa al semiplà $\Pi = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ i contínua a $\bar{\Pi}$ que compleix $\varphi(1) = 1$. Proveu que amb condicions adequades sobre $\phi \in C(\mathbb{D})$, la funció

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \varphi \left(\frac{1 - |w|^2}{1 - z\bar{w}} \right) \frac{\phi(w)}{z - w} dm(w)$$

és una solució de l'equació $\bar{\partial}u = \phi$ a $\mathbb{D}$.

18. Generalitzeu la proposició 10.40 prenent $H(z, w) = \varphi(z\bar{w} - |w|^2)$ amb φ una funció entera tal que $\varphi(0) = 1$.

19. Demostreu la fórmula de descomposició següent, que acompanya la fórmula de la proposició 10.40: si $f \in C^1(\mathbb{C})$ i f i $\bar{\partial}f$ compleixen condicions adequades (establiu quines), aleshores hom té

$$f(z) = c \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{w}-|w|^2} f(w) dm(w) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{z\bar{w}-|w|^2} \frac{\bar{\partial}f(w)}{z-w} dm(w), \quad c \text{ constant.}$$

Quant val la constant c ?

20. Si $f \in L^1(\mathbb{D})$ i $k \in \mathbb{N}$ posem $T_k f(z) = \frac{k}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{k-1}}{(1-z\bar{w})^{k+1}} f(w) dm(w)$, per a $z \in \mathbb{D}$.

a) Proveu que si $f \in L^1(\mathbb{D}) \cap H(\mathbb{D})$ llavors hom té

$$T_k f(z) = f(z), \quad T_k \bar{f}(z) = \overline{f(0)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

b) Proveu que hi ha una constant $c > 0$ tal que

$$\|T_k f\|_2 \leq c \|f\|_2$$

per a tota funció $f \in L^2(\mathbb{D})$.

Indicació: Calculeu $T_k f(z)$ amb $f(w) = w^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Zeros de funcions holomorfes

En la primera part d'aquest capítol es tracta el problema de la construcció de funcions holomorfes amb zeros prefixats, ja sigui a tot el pla o bé en un domini qualsevol. La solució d'aquest problema la dona el teorema de factorització de Weierstrass, que expressa les funcions buscades com a producte infinit de factors elementals. Per aquesta raó s'estudien, detalladament, les propietats dels productes infinits, tant de números com de funcions. El teorema de Weierstrass es fa servir per a resoldre el problema clàssic d'interpolació per funcions enteres al qual també s'hi pot aplicar un mètode basat en l'existència de solucions d'una equació de Cauchy-Riemann no homogènia, provada en el capítol anterior.

A continuació s'analitza la relació que hi ha entre els zeros de funcions holomorfes i l'equació de Poisson, anàlisi que fa veure que si es disposa d'un mètode de solució de l'equació de Poisson, aleshores es té un procediment per a construir funcions holomorfes amb zeros prefixats. En el cas del disc unitat, el fet de tenir una fórmula explícita per a resoldre l'equació de Poisson permet obtenir l'anomenada fórmula de Jensen, que dona una relació entre la distribució dels zeros d'una funció holomorfa al disc i el comportament de la funció a la circumferència unitat. La fórmula de Jensen es fa servir per a estudiar la distribució dels zeros d'una funció entera, distribució que depèn de l'ordre d'aquesta funció.

El capítol s'acaba amb l'estudi dels ideals tancats de l'àlgebra de les funcions holomorfes en un domini del pla. Els ideals d'aquesta àlgebra estan íntimament lligats als conjunts de zeros de funcions holomorfes, i el seu estudi depèn, per tant, dels resultats que s'han obtingut prèviament.

11.1 Productes infinits de números i de funcions

La definició de producte infinit convergent que donem a continuació, inspirada en la de sèrie convergent, sembla prou natural.

Definició 11.1. *Donada una successió $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complexos direm que el producte infinit $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és convergent amb producte P si la successió de productes parcials $P_n = \prod_{k=1}^n p_k$ és convergent cap a P , quan $n \rightarrow \infty$.*

Exemple 11.2. $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$ perquè és immediat comprovar que $P_n = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}$. $\square$

Observem que amb la definició anterior, si hi ha un terme $p_n = 0$, llavors el producte infinit és convergent i val zero. També és evident que si el producte $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és convergent i val P , llavors $\prod_{n=1}^{\infty} |p_n|$ també ho és i val $|P|$. La convergència de $\prod_{n=1}^{\infty} r_n$ amb $r_n > 0$ és clarament equivalent a la condició

$$-\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } r_n < \infty$$

i, en aquest cas, hom té

$$\prod_{n=1}^{\infty} r_n = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } r_n,$$

interpretant que $\exp(-\infty)$ val 0. Fem notar que podem tenir un producte infinit $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ amb $p_n \neq 0$ per a tot n , però de manera que sigui convergent i el producte valgui zero; només cal que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } |p_n| = -\infty$. Per exemple, el producte

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

té aquesta propietat perquè $\text{Log} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$ i, per tant, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\infty$. En aquest cas, també es poden considerar, directament, els productes

parcials i resulta

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Com que $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, és clar que si un producte infinit $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és convergent cap a $P \neq 0$, llavors $p_n \rightarrow 1$, quan $n \rightarrow \infty$. Però podem tenir un producte convergent cap a zero sense que es compleixi $p_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$; per exemple, això passa si $p_n = p$, amb $0 < p < 1$, per a tot $n \geq 1$.

Un producte finit $\prod_{n=1}^N p_n$ és zero si i només si algun dels seus factors és zero. Si tenim un producte finit de polinomis, $P(z) = \prod_{n=1}^N p_n(z)$, llavors un número és un zero de P si i només si és un zero d'algun dels factors p_n i la multiplicitat que té com a zero de P és la suma de les seves multiplicitats com a zero de cada p_n . En estudiar els zeros i les multiplicitats d'un producte infinit de funcions, voldríem que aquesta propietat es mantingués; per a un producte infinit de números voldríem que es complís la condició

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0 \iff \text{un nombre finit de factors són zero.} \quad (11.1)$$

En particular, ens interessa considerar productes infinits $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$ de manera que si $p_n \neq 0$ per a tot $n \geq 1$, llavors sigui $P \neq 0$.

En les línies següents, com sempre, Log designa la determinació principal del logaritme, i Arg , la determinació principal de l'argument, $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$.

Proposició 11.3. *Si $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ és una successió de números complexos amb $p_n \neq 0$ per a tot n , llavors el producte infinit $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ convergeix cap a $P \neq 0$ si i només si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } p_n = S$ és convergent i, en aquest cas, hom té $P = e^S$.*

Demostració. És evident que si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } p_n$ convergeix a S , llavors $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ convergeix a $P = e^S$. El recíproc és evident si $p_n > 0$, tal com hem dit abans, però en el cas general que els p_n siguin complexos es necessita una prova. Si $S_n = \sum_{k=1}^n \text{Log } p_k$, del fet que $e^{S_n} = P_n = \prod_{k=1}^n p_k$ convergeixi cap a $P \neq 0$ n'hem de deduir que S_n és convergent; clarament això no és pas cert per a una successió S_n qualsevol (per exemple, $S_n = 2\pi ni$) i cal utilitzar la informació addicional que $S_{n+1} - S_n = \text{Log } p_{n+1} \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$ (perquè $p_n \rightarrow 1$).

Amb la notació anterior tindrem $\text{Log } P_n = S_n + 2\pi i k_n$ per a $k_n \in \mathbb{Z}$ i

$$\begin{aligned} 2\pi i(k_{n+1} - k_n) &= \text{Log } P_{n+1} - \text{Log } P_n + S_n - S_{n+1} = \\ &= \text{Log } P_{n+1} - \text{Log } P_n - \text{Log } p_{n+1} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Si P no és un número real negatiu, tenim $\text{Log } P_n \rightarrow \text{Log } P$ i, essent $p_n \rightarrow 1$, el terme de la dreta de (11.2) tendeix cap a zero quan $n \rightarrow \infty$. Per tant, k_{n+1} és constant a partir d'un cert valor de n i, llavors, $S_n = \text{Log } P_n - 2\pi i k_n$ és convergent. Si P és real negatiu, podem raonar de la mateixa manera amb la determinació del logaritme donada per $0 < \arg z < 2\pi$ i tindrem $\log P_n = S_n + 2\pi i l_n$ amb $l_n \in \mathbb{Z}$. Aleshores, resulta

$$\begin{aligned} 2\pi i(l_{n+1} - l_n) &= \log P_{n+1} - \log P_n + S_n - S_{n+1} = \\ &= \log P_{n+1} - \log P_n - \text{Log } p_{n+1} \end{aligned}$$

i concloem com abans que S_n és convergent. $\square$

Si $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és un producte infinit amb $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$, llavors es complirà $p_n \neq 0$ per a $n \geq n_0$, i si $\sum_{n \geq n_0} \text{Log } p_n$ convergeix cap a S , tindrem evidentment

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^S \prod_{n=1}^{n_0-1} p_n$$

i es complirà la propietat (11.1). A més d'aquesta propietat, voldríem també que els productes infinits fossin *incondicionalment convergents*, en el sentit que el seu caràcter i el seu producte siguin independents de l'ordre dels factors. La proposició següent dóna una classe de productes infinits que gaudeix de les dues propietats desitjades, prou àmplia per a les aplicacions.

Proposició 11.4. a) *Si $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ una successió de números complexos de manera que $\lim_n(p_n) = 1$ i $\sum_{n \geq n_0} |\text{Log } p_n| < +\infty$ per a algun $n_0 \in \mathbb{N}$. Aleshores $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és un producte infinit incondicionalment convergent que compleix la propietat (11.1).*

b) *Si $p_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funcions acotades d'una variable $\lambda \in A$, on A és qualsevol conjunt, de manera que $p_n(\lambda) \rightarrow 1$ uniformement a A quan $n \rightarrow \infty$ i suposem que la sèrie $\sum_{n \geq n_0} |\text{Log } p_n(\lambda)|$ és uniformement convergent a A per a algun $n_0 \in \mathbb{N}$. Aleshores el producte infinit*

$$P(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} p_n(\lambda)$$

és uniformement convergent a A , en el sentit que si posem $P_n(\lambda) = \prod_{n=1}^n p_n(\lambda)$, el límit

$$P(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\lambda)$$

existeix uniformement a A . A més, es compleix la propietat (11.1), és a dir, $P(\lambda) = 0$ si i només si $p_n(\lambda) = 0$ per a un nombre finit de valors de n . Finalment, també val la igualtat $P(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} p_{n_k}(\lambda)$, uniformement a A , per a qualsevol permutació $k \rightarrow n_k$ de $\mathbb{N}$.

Demostració. La convergència absoluta de $\sum_{n \geq n_0} \text{Log } p_n$ implica la convergència

d'aquesta sèrie; per tant, $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és convergent cap a $\exp\left(\sum_{n \geq n_0} \text{Log } p_n\right) \prod_{n=1}^{n_0-1} p_n$.

El mateix passa si canviem l'ordre: $\prod_{k=1}^{\infty} p_{n_k}$ és convergent per a qualsevol permutació $k \rightarrow n_k$. Si algun factor p_n és zero, els dos productes infinits anteriors són zero, i, si no, també són iguals perquè $\sum_n \text{Log } p_n = \sum_k \text{Log } p_{n_k}$, ja que les sèries absolutament convergents són incondicionalment convergents. Ara falta veure només que amb la hipòtesi *b*), de convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n \geq n_0} |\text{Log } p_n(\lambda)|$ sobre A , la igualtat

$$P(\lambda) = \exp \sum_{n \geq n_0} \text{Log } p_n(\lambda) \prod_{n=1}^{n_0-1} p_n(\lambda),$$

es compleix amb convergència uniforme al conjunt A . Si ara posem $S_n(\lambda) = \sum_{k=n_0}^n \text{Log } p_k(\lambda)$, la hipòtesi implica

$$|S_n(\lambda)| \leq \sum_{k=n_0}^n |\text{Log } p_k(\lambda)| \leq M,$$

per a una constant $M < +\infty$, i ara la convergència uniforme de S_n , posem cap a S , implica la convergència uniforme de $\exp(S_n)$ cap a $\exp(S)$ perquè

$$|\exp(S_n(\lambda)) - \exp(S(\lambda))| = c |S_n(\lambda) - S(\lambda)|,$$

on c és una constant tal que $|\exp(z_1) - \exp(z_2)| \leq c |z_1 - z_2|$ si $|z_1|, |z_2| \leq M$. $\square$

La manera com utilitzarem la proposició 11.4 es resumeix en el teorema següent.

Teorema 11.5. *Sigui U un domini de $\mathbb{C}$ i $f_n \in H(U)$, $n = 1, 2, \dots$ de manera que $f_n(z) \rightarrow 1$ quan $n \rightarrow \infty$ uniformement sobre els compactes de U i que la sèrie $\sum_{n \geq n_0(K)} |\log f_n(z)|$ sigui uniformement convergent sobre cada compacte $K \subset U$, per a un $n_0(K)$ que pot dependre de K . Aleshores el producte infinit*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

convergeix uniformement sobre els compactes de U , $F \in H(U)$, $Z(F) = \bigcup_n Z(f_n)$ i

$$m(F, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z), \text{ per a tot } z \in U.$$

Demostració. Sobre cada compacte $K \subset U$ es pot aplicar la proposició 11.4 i resulta que el producte infinit convergeix uniformement sobre els compactes de U . Cada producte parcial $F_n = \prod_{k=1}^n f_k$ és una funció holomorfa, i, pel teorema 9.3, és $F \in H(U)$. Com que el producte infinit té la propietat (11.1), $Z(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(f_n)$, és a dir, un punt $a \in U$ és zero de F si i només si a és un zero d'alguna funció f_n (per a un nombre finit de valors de n , perquè $f_n(z) \rightarrow 1$). Fixem ara un disc $\overline{D}(a, r) \subset U$; serà $f_n(z) \neq 0$, si $n \geq n_0$ i $z \in D(a, r)$ i, per tant, la funció $\prod_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z) = G(z)$ és holomorfa i sense zeros a $D(a, r)$. Llavors, hom té $F(z) = \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z)G(z)$ i, evidentment,

$$m(F, a) = \sum_{n=1}^{n_0-1} m(f_n, a) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, a). \quad \square$$

La funció $\log(1+w)$ té el desenvolupament en sèrie de potències $w - \frac{1}{2}w^2 + \dots$ al voltant de l'origen; per tant, $|\log(1-w)| \sim |w|$ per a $|w| \leq \frac{1}{2}$. Si apliquem aquesta estimació a $1-w = f_n(z)$ o a $1-w = p_n$, per a cada n , en resulta una formulació equivalent de la proposició 11.4 i del teorema 11.5.

Teorema 11.6. *a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |1-p_n| < +\infty$, llavors $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ és un producte infinit incondicionalment convergent amb la propietat (11.1).*

b) Si U és un domini de $\mathbb{C}$ i $f_n \in H(U)$, $n = 1, 2, \dots$, de manera que la sèrie $\sum_n |1-f_n(z)|$ és uniformement convergent sobre els compactes de U , aleshores el producte infinit $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ té les propietats del teorema 11.5.

En els capítols precedents hem utilitzat sovint el fet que la derivada logarítmica f'/f d'una funció $f \in H(U)$ és una funció meromorfa a U amb pols simples en el conjunt de zeros de U i residus donats per la multiplicitat d'aquests zeros. Quan tenim un producte finit $F = f_1 \dots f_n$, trivialment, hom té

$$\frac{F'}{F} = \sum_{i=1}^n \frac{f'_i}{f_i},$$

és a dir, la derivada logarítmica és la suma de derivades logarítmiques. Ara veurem que aquest resultat també val per a productes infinits.

Teorema 11.7. *Sigui U un domini de $\mathbb{C}$, $f_n \in H(U)$, $n = 1, 2, \dots$ de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ és uniformement convergent sobre els compactes de U , i posem $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Aleshores es compleix la igualtat*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)},$$

on la sèrie convergeix uniformement sobre els compactes de U .

Demostració. Fixat un compacte $K \subset U$, com que la hipòtesi implica $f_n(z) \rightarrow 1$ uniformement a K , hom té

$$|1 - f_n(z)| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{per a tot } z \in K, \quad n \geq n_0(K)$$

i, per tant, $|f_n(z)| \geq \frac{1}{2}$, per a $z \in K$, si $n \geq n_0(K)$. Així, d'un rang en endavant, els termes de la sèrie $\sum \frac{f'_n}{f_n}$ són funcions holomorfes en un entorn de K . Posem, com abans,

$$F(z) = \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z) G(z)$$

amb $G(z) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(z)$. Tindrem, aleshores,

$$\frac{F'}{F} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f'_n}{f_n} + \frac{G'}{G}$$

i, per tant, és suficient provar que la igualtat $\frac{G'}{G} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}$ val uniformement sobre K .

Considerem els productes parcials

$$G_l(z) = \prod_{n=0+l}^{n_0+l} f_n(z)$$

que tendeixen uniformement a G sobre K quan $l \rightarrow \infty$. Com que $G(z) \neq 0$ si $z \in K$, hi ha un $\delta > 0$ tal que $1/\delta > |G(z)| \geq \delta$ si $z \in K$, i, per convèrgència uniforme, serà $\frac{2}{\delta} > |G_l(z)| \geq \frac{\delta}{2}$ si $z \in K$, per a l prou avançat. D'altra banda, $G'_l \rightarrow G'$ uniformement a K i amb les desigualtats

$$\begin{aligned} \left| \frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{G'_l(z)}{G_l(z)} \right| &= \frac{|G_l(z)G'(z) - G(z)G'_l(z)|}{|G(z)||G_l(z)|} \leq \\ &\leq \frac{|G_l(z)||G'(z) - G'_l(z)| + |G'_l(z)||G_l(z) - G(z)|}{(\delta/2)^2} \leq \\ &\leq c \cdot (|G'(z) - G'_l(z)| + |G(z) - G_l(z)|), \quad c \text{ constant,} \end{aligned}$$

veiem que $\frac{G'_l}{G_l} \rightarrow \frac{G'}{G}$ uniformement a K , quan $l \rightarrow \infty$. Finalment observem que

$$\frac{G'_l}{G_l} = \sum_{n=0+l}^{n_0+l} \frac{f'_n}{f_n} \text{ i obtenim el teorema.} \quad \square$$

11.2 El teorema de factorització de Weierstrass

Volem construir una funció entera F que tingui exactament uns zeros $z_n \in \mathbb{C}$ prefixats amb unes multiplicitats també prefixades, $m_n \in \mathbb{N}$. El conjunt dels zeros $A = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ és un conjunt tancat de punts aïllats qualsevol (per tant, $|z_n| \rightarrow \infty$ quan $n \rightarrow \infty$, si A no és finit) i la successió de multiplicitats (m_n) és arbitrària. Sense pèrdua de generalitat, suposarem $z_n \neq 0$.

Evidentment, si A és un conjunt finit $A = \{z_1, \dots, z_N\}$, considerarem senzillament el polinomi

$$P(z) = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n}.$$

En el cas general, és prou natural considerar un producte infinit del tipus

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n}$$

sempre que compleixi les hipòtesis del teorema 11.5. Per tal de comprovar-les és més convenient interpretar que el factor $\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ surt repetit m_n vegades,

i llavors trobem que la condició adequada és que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left| \frac{z}{z_n} \right|$$

convergeixi uniformement sobre tot disc del pla, la qual cosa és equivalent a la condició

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{|z_n|} < +\infty.$$

Així, per exemple, el producte $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ defineix una funció entera que s'anul·la una vegada en cada punt $z_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$. En general, la condició anterior no es compleix (per exemple, si $z_n = n$); la idea és aleshores introduir uns factors $A_n(z)$, sense zeros, que siguin de correcció en el sentit que el producte infinit

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n} A_n(z) \quad (11.3)$$

sí que sigui uniformement convergent sobre compactes. Atès que els factors $A_n(z)$ no han de tenir zeros, els buscarem de la forma $A_n(z) = \exp(-B_n(z))$. Per motivar la definició de les funcions B_n , observem que segons el teorema 11.7 la derivada logarítmica de F tindrà l'expressió

$$\frac{F'}{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_n}{z - z_n} - Q_n \right) \quad \text{amb } Q_n = B'_n.$$

En conseqüència, les funcions $Q_n = B'_n$ han de ser també termes de correcció de la sèrie anterior, per tal que representi una funció meromorfa amb pols simples en els punts z_n i amb residus m_n .

Aquesta observació estableix un vincle del problema que estem considerant amb la descomposició de funcions meromorfe en fraccions simples i el teorema de Mittag-Leffler. En la demostració del teorema 10.9, hem vist que la tria més natural dels termes de correcció Q_n és una suma parcial del desenvolupament de $\frac{m_n}{z - z_n}$ en sèrie de potències al disc $D(0, |z_n|)$, posem

$$Q_n(z) = -m_n \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{z^k}{z_n^k}$$

sempre que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{|z - z_n|} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\lambda_n + 1}$$

sigui uniformement convergent sobre els compactes de $\mathbb{C}$. Observem ara que la igualtat $Q_n = B'_n$ es compleix si posem

$$B_n = -m_n \sum_{k=1}^{\lambda_n+1} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k.$$

Per tant, definim

$$A_n(z) = \exp \left\{ m_n \sum_{k=1}^{\lambda_n+1} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right\}$$

i procedim a esbrinar quines condicions han de complir els números λ_n per tal que el producte infinit (11.3) compleixi les hipòtesis del teorema 11.5. Introduïm la notació $p_n = 1 + \lambda_n$ i posem també

$$E_p(z) = (1 - z) \exp \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}, \quad p \in \mathbb{N},$$

que són els anomenats *factors elementals de Weierstrass*, de manera que interpretant que el factor $E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$ apareix repetit m_n vegades, hom té

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)^{m_n} A_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right).$$

Ens interessa ara una estimació de $|\operatorname{Log} E_p(z)|$. Llevat d'un múltiple enter de $2\pi i$, tenim

$$\operatorname{Log} E_p(z) = \operatorname{Log}(1 - z) + \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} = - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad \text{si } |z| < 1.$$

Si $|z| < \frac{1}{2}$ l'expressió anterior està acotada en valor absolut per

$$\frac{1}{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{p+1} \frac{|z|^{p+1}}{1 - |z|} < \frac{2}{p+1} |z|^{p+1} < 2^{-p}$$

(la qual cosa significa també que es tracta efectivament del logaritme principal, sense cap múltiple enter de $2\pi i$). Donat $r > 0$, suposant $|z| \leq r$ i considerant només els punts z_n amb $|z_n| \geq 2r$ tindrem

$$\sum_{n \geq n_0(r)} |\operatorname{Log} E_{p_n}^{m_n}(z)| \leq 2 \sum_{|z_n| \geq 2r} \frac{m_n}{p_n + 1} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n+1},$$

per a un rang $n_0(r)$ que depèn de r . Per aquest motiu, la sèrie

$$\sum_{|z_n| \geq 2r} \frac{m_n}{p_n + 1} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n + 1} \quad (11.4)$$

té un paper rellevant en el resultat següent, el qual queda provat per les consideracions que acabem de fer.

Teorema 11.8 (Weierstrass). *Si la sèrie (11.4) convergeix per a tot $r > 0$, llavors el producte infinit $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$ defineix una funció entera que s'anul·la exactament en els punts $z_n \in \mathbb{C}$ amb multiplicitats $m_n \in \mathbb{N}$.*

Sempre hi ha una tria de $p_n \in \mathbb{N}$ adequada, per exemple $p_n = nm_n$. Es pot prendre $p_n = p$, independent de n , quan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Exemple 11.9. Prenem $z_n = n$ i $m_n = 1$ per a $n \in \mathbb{Z}$. La funció entera més senzilla que s'anul·la en els punts enters amb multiplicitat 1 és

$$F(z) = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n}$$

que de seguida calcularem explícitament. En els mateixos punts, si volem ara $m_n = |n|$, ens cal prendre $p = 2$ i obtenim

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{n \neq 0} \left[\left(1 - \frac{z}{n} \right) \exp \left(\frac{z}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n} \right)^2 \right) \right]^{|n|} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)^n \exp \left(\frac{z^2}{n} \right), \end{aligned}$$

que és una funció entera amb $F(0) = 1$ i un zero d'ordre $|n|$ en cada punt $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. □

De la mateixa manera que el teorema de Mittag-Leffler és un teorema de descomposició d'una funció meromorfa en funcions simples, el teorema de Weierstrass és un resultat sobre la factorització de les funcions enteres.

Teorema 11.10. *L'expressió general d'una funció entera amb un zero de multiplicitat k a l'origen i zeros de multiplicitat $m_n > 0$ en els punts $z_n \in \mathbb{C}$ és*

$$F(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \exp g(z),$$

on els números $p_n \in \mathbb{N}$ fan que la sèrie (11.4) sigui convergent per a cada $r > 0$, i g és una funció entera.

Mitjançant l'ús de la derivada logarítmica podem obtenir exemples concrets de factorització de funcions enteres a partir dels exemples de l'apartat 10.3.1.

Exemple 11.11. Considerem la funció $F(z) = \sin \pi z$ que té zeros simples en els punts enters. Com que $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$, podem prendre $p_n = 1$ en el teorema 11.10 i obtenim

$$\sin \pi z = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \exp g(z).$$

Derivant logarítmicament i comparant amb el desenvolupament de $\pi \cot \pi z$ de l'exemple 10.13 veiem que $g'(z) = 0$ i g és constant. Atès que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$, ha de ser $e^{g(z)} = \pi$, és a dir,

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n},$$

o bé, agrupant els termes en n i $-n$,

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad \square$$

Exemple 11.12. La funció entera més senzilla que s'anul·la en els enters positius és

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$$

Comparant amb l'exemple anterior, resulta

$$zF(z)F(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

La funció $F(z-1)$ s'anul·la en els enters positius i també en el zero, de manera que

$$F(z-1) = zF(z) \exp g(z),$$

per a alguna funció entera g . Prenent la derivada logarítmica, hom té

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right),$$

que implica $g'(z) = 0$ i, per tant, g és una constant que anomenarem γ . Així, $F(z-1) = zF(z)e^\gamma$ i la funció $H(z) = F(z)e^{\gamma z}$ compleix la relació $H(z-1) = zH(z)$. Fent $z = 1$ a $F(z-1) = zF(z)e^\gamma$ obtenim

$$1 = F(0) = e^\gamma F(1), \quad e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}},$$

que significa

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \text{Log } n\right).$$

Aquesta constant γ s'anomena *constant d'Euler*. La funció $\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)}$ és una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ amb pols simples en els punts $0, -1, -2, \dots$, que compleix l'equació $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ i $\Gamma(1) = 1$. En particular, és $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}$. De l'expressió

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}$$

es dedueix que Γ satisfà la relació

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

la qual, fent $z = \frac{1}{2}$, dóna $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Així mateix, hom té

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}} = \\ &= e^{-\gamma z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} e^{z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned}$$

La funció Γ s'anomena *funció Γ d'Euler*. En els punts $z \in \mathbb{C}$ amb $\text{Re } z > 0$ té l'expressió integral següent:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Per a provar-ho, anomenem de moment $G(z)$ la funció definida per la integral anterior. Integrant per parts es comprova sense dificultat que G també compleix la relació $G(z+1) = zG(z)$. Per a veure que $G(z) = \Gamma(z)$ si $\text{Re } z > 0$, és suficient comprovar, per a $z = s$, $0 < s < 1$, la igualtat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(s)s(s+1) \cdots (s+n)}{n^s n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(s+n+1)}{n^s n!} = 1, \quad 0 < s < 1.$$

De la definició de G i trencant la integral en dos trossos, de 0 a n i de n a $+\infty$, resulta

$$G(s+n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s+n} dt \leq n^s \int_0^n t^n e^{-t} dt + n^{s-1} \int_n^\infty t^{n+1} e^{-t} dt,$$

$$G(s+n+1) \geq n^{s-1} \int_0^n t^{n+1} e^{-t} dt + n^s \int_n^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Integrant per parts, hom té $\int_n^\infty t^{n+1} e^{-t} dt = n^{n+1} e^{-n} + \int_n^\infty (n+1) t^n e^{-t} dt$ i $\int_0^n t^{n+1} e^{-t} dt = -n^{n+1} e^{-n} + \int_0^n (n+1) t^n e^{-t} dt$, que donen lloc a

$$G(s+n+1) \leq n^s \int_0^\infty t^n e^{-t} dt + e^{-n} n^{n+s} + n^{s-1} \int_n^\infty t^n e^{-t} dt,$$

$$G(s+n+1) \geq n^s \int_0^\infty t^n e^{-t} dt - e^{-n} n^{n+s} + n^{s-1} \int_0^n t^n e^{-t} dt,$$

desigualtats que proven l'equivalència $G(s+n+1) \sim n^s n!$, quan $n \rightarrow \infty$, tal com volíem veure. $\square$

Exemple 11.13. Construïm ara una funció entera amb zeros simples en els punts $z_{kl} \in \mathbb{C}$ de coordenades enteres, $z_{kl} = k + li$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Ens interessa trobar el número més petit $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k,l} \frac{1}{|z_{kl}|^{p+1}} < +\infty$, i, d'acord amb

l'exemple 10.16, podem prendre $p = 2$. Per tant, serveix la funció

$$\sigma(z) = z \prod_{k,l} \left(1 - \frac{1}{k+li} \right) \exp \left\{ \frac{z}{k+li} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{k+li} \right)^2 \right\},$$

anomenada *funció σ de Weierstrass*. La derivada logarítmica de σ és

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k,l} \left(\frac{1}{z - (k+li)} + \frac{1}{k+li} + \frac{z}{k+li} \right),$$

que té un pol simple en cada punt z_{kl} , $k, l \in \mathbb{Z}$. $\square$

Tot seguit veurem la versió del teorema de Weierstrass per a un domini qualsevol; a més, en donarem una formulació en la qual es preveu també la possibilitat de prefixar els pols.

Teorema 11.14. *Sigui U un domini de $\mathbb{C}^*$, $U \neq \mathbb{C}^*$, i siguin $A = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunt discret i tancat de U i (m_n) una successió d'enters, $m_n \neq 0$. Llavors*

existeix una funció f meromorfa a U i un entorn V_n de cada punt z_n , de manera que per a $n \geq 1$ es compleix

$$f(z) = (z - z_n)^{m_n} g_n(z), \quad z \in V_n$$

amb g_n holomorfa a V_n i $g_n(z_n) \neq 0$ (és a dir, si $m_n > 0$ f té un zero en el punt z_n d'ordre m_n i si $m_n < 0$ f té un pol en el punt z_n d'ordre $|m_n|$).

Demostració. Separant $A = A_1 \cup A_2$ de manera que als punts $z_n \in A_1$ els correspon $m_n > 0$, i als punts $z_n \in A_2$, $m_n < 0$, ens podem reduir al cas $m_n > 0$ per a tot n (perquè aleshores construirem f_1 que tingui zeros en els punts de A_1 amb multiplicitat m_n i f_2 que tingui zeros en els punts de A_2 amb multiplicitat $-m_n$ i, finalment, prendrem $f = \frac{f_1}{f_2}$). Aplicant, si és necessari, una homografia podem suposar també que $\infty \in U$ però $\infty \notin A$, de manera que $\mathbb{C}^* \setminus U$ és un compacte de $\mathbb{C}$; finalment, podem suposar que A és infinit. Per a cada punt z_n , sigui $w_n \in \mathbb{C}^* \setminus U$ un punt tal que $d(z_n, \mathbb{C}^* \setminus U) = |z_n - w_n|$. Com que A no pot tenir punts d'acumulació a U , ha de ser $\lim_n |z_n - w_n| = 0$. Ara imitem la prova del teorema 11.8 prenent $p_n = nm_n$ i posant,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right)^{m_n} = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)^{m_n} \text{ on } f_n(z) = E_{p_n} \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right).$$

Cada factor f_n és holomorf a U i només cal comprovar que es compleixen les hipòtesis del teorema 11.5. Si K és un compacte de U , hi ha un enter $n_0(K)$ tal que $|z - w_n| > 2|z_n - w_n|$ és a dir, $\left| \frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right| < \frac{1}{2}$, si $z \in K$ i $n \geq n_0(K)$. En la justificació del teorema 11.8 hem vist que $|\text{Log } E_p(z)|$ està dominat per $\frac{2}{p+1}|z|^{p+1}$ quan $|z| \leq \frac{1}{2}$, i obtenim així:

$$\sum_{n \geq n_0(K)} m_n |\text{Log } f_n(z)| \leq \sum_{n \geq n_0(K)} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^n < +\infty. \quad \square$$

Corol·lari 11.15. *Tota funció meromorfa en un domini U del pla és el quocient de dues funcions holomorfes a U .*

Demostració. Sigui f meromorfa a U amb pols z_n d'ordres m_n i F holomorfa construïda amb zeros de multiplicitats m_n en els mateixos punts z_n ; aleshores la funció $g = fF$ només té singularitats evitables; per tant, $g \in H(U)$ i $f = \frac{g}{F}$. $\square$

Corol·lari 11.16. *Per a tot domini U hi ha una funció f holomorfa a U que no pot ser prolongada analíticament a cap punt de la frontera de U , és a dir, f no es pot estendre a una funció holomorfa a U' si U' és un domini que conté estrictament U .*

Demostració. Considerem un conjunt discret i tancat $A \subset U$ tal que tot punt de ∂U sigui un punt d'acumulació de A . Per exemple, A es pot construir de la manera següent: sigui $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeració dels punts de U de coordenades racionals i posem $r_n = d(z_n, \mathbb{C} \setminus U)$. Sigui K_n una successió creixent de compactes amb $\bigcup_n K_n = U$ com en el lema 1.15. Per a cada n , sigui $w_n \notin K_n$, $w_n \in U$, tal que $|z_n - w_n| < r_n$ i $w_n \neq w_m$ si $n \neq m$. Com que $w_n \notin K_n$, $A = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ és discret. Si $a \in \partial U$ i $\varepsilon > 0$ hi ha un punt z_n amb $|a - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$; per tant, $r_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ i $|a - w_n| \leq |a - z_n| + |z_n - w_n| < \frac{\varepsilon}{2} + r_n \leq \varepsilon$. Així, tot punt $a \in \partial U$ és punt d'acumulació de punts de A .

Si ara prenem com a f una funció que s'anul·la exactament en els punts de A , no pot haver-hi cap disc $D(a, \varepsilon)$ centrat en un punt $a \in \partial U$ de manera que f s'estengui analíticament a una funció $g \in H(D(a, \varepsilon))$ perquè, en aquest cas, els zeros de g tindrien un punt d'acumulació a $D(a, \varepsilon)$ i seria $g \equiv 0$ i, per tant, $f \equiv 0$. $\square$

11.3 Interpolació per funcions enteres

Si $z_1, \dots, z_n$ són punts diferents de $\mathbb{C}$ i $a_1, \dots, a_n$ són valors complexos arbitraris, hi ha un únic polinomi P de grau més petit o igual que $n - 1$ que compleix $P(z_j) = a_j$, $1 \leq j \leq n$. Observem que imposem al polinomi n condicions i que l'espai dels polinomis de grau més petit o igual que $n - 1$ té precisament dimensió n . Aquest enunciat es pot provar posant

$$P(z) = c_1 + c_2 z + \dots + c_n z^{n-1}$$

i imposant les equacions

$$P(z_j) = c_1 + c_2 z_j + \dots + c_n z_j^{n-1} = a_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

La matriu d'aquest sistema lineal en les incògnites $c_1, c_2, \dots, c_n$ té per determinant el determinant de Van der Monde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j) \neq 0$$

i, per tant, hi ha una solució única siguin quins siguin els números $a_1, \dots, a_n$. El polinomi P s'anomena *polinomi d'interpolació de Lagrange*. Per trobar-lo

no cal resoldre el sistema anterior i es pot escriure el polinomi P explícitament: si posem $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, la solució és

$$P(z) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{Q(z)}{Q'(z_i)(z - z_i)}.$$

Els polinomis $Q_i(z) = \frac{Q(z)}{Q'(z_i)(z - z_i)} = \frac{1}{Q'(z_i)} \prod_{j \neq i} (z - z_j)$, compleixen $Q_i(z_j) = \delta_{ij}$, són de grau no superior a $n - 1$ i, per tant, hom té

$$P(z_j) = \sum_{i=1}^n a_i Q_i(z_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j.$$

Ara volem resoldre el mateix problema però amb infinits punts $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ que formin un conjunt discret i tancat de $\mathbb{C}$. Hom té uns valors $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ arbitraris i es vol trobar una funció entera f (“polinomi de grau infinit”) que compleixi $f(z_n) = a_n$, per a $n \geq 1$. Sigui F una funció entera que tingui un zero simple en cada un dels punts z_n : $F(z_n) = 0$, $F'(z_n) \neq 0$. Llavors les funcions

$$F_n(z) = \frac{1}{F'(z_n)} \frac{F(z)}{(z - z_n)}$$

són funcions enteres que compleixen $F_n(z_m) = \delta_{n,m}$. Si la sèrie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{F'(z_n)} \frac{F(z)}{(z - z_n)}$$

convergeix uniformement sobre compactes, la qual cosa passa si

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|a_n|}{|F'(z_n)||z_n|} < +\infty,$$

llavors f serà una funció entera solució del problema.

Exemple 11.17. Considerem el problema d'interpolació $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$. La funció entera F més senzilla que s'anul·la en els punts enters és $F(z) = \sin \pi z$, que dóna $F'(n) = \pi \cos \pi n = \pi(-1)^n$. Així, si la sèrie

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{a_n}{z - n}$$

convergeix uniformement sobre compactes (en el sentit habitual, és a dir, després d'eliminar un nombre finit de sumands per a z variant en un compacte

fixat), llavors la funció $\frac{1}{\pi}F(z)h(z)$ resol el problema d'interpolació. Sabem que la convergència uniforme sobre compactes de la sèrie que defineix la funció h es compleix si

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|a_n|}{|n|} < +\infty.$$

Per la desigualtat de Hölder, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, hom té

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|a_n|}{|n|} \leq \left(\sum \frac{1}{|n|^p} \right)^{1/p} \left(\sum |a_n|^q \right)^{1/q}$$

i atès que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ convergeix si $p > 1$, és suficient imposar $\sum |a_n|^q < +\infty$ per a un valor de q , $1 \leq q < \infty$. Observem que la sèrie que defineix h pot ser uniformement convergent sobre compactes sense ser-ho absolutament. En l'exemple 10.13 hem vist que la sèrie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z-n}$ és uniformement convergent sobre compactes, amb suma $\frac{\pi}{\sin \pi z}$:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Així una altra manera de garantir la convergència uniforme sobre compactes de la sèrie que defineix la funció h és imposant la condició $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n - a_{n+1}| < +\infty$, d'acord amb el criteri d'Abel (teorema 2.14).

En definitiva, doncs, en l'espai vectorial de les successions $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ que compleixen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^q < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$, i en el de les que compleixen $\sum_n |a_n - a_{n+1}| < +\infty$, l'operador

$$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \frac{1}{\pi} \sin \pi z \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{a_n}{z - n}$$

és un operador lineal d'interpolació. □

La condició de convergència prèvia a l'exemple 11.17 no es complirà en general i, per tant, cal modificar la definició de la funció f . Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $z_n \neq 0$ per a tot n i que F és com en el teorema de Weierstrass:

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$$

amb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{p_n}}{p_n |z_n|^{p_n}} < +\infty \quad \text{si } r > 0.$$

Llavors posant

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{F'(z_n)} \frac{F(z)}{z - z_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{q_n},$$

amb q_n números naturals convenients, tindrem una solució del problema d'interpolació. Cal triar q_n de manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|F'(z_n)|} \frac{r^{q_n}}{|z_n|^{q_n+1}} < +\infty \quad \text{per a tot } r > 0 \quad (11.5)$$

i, per a això, és suficient prendre $q_n \nearrow +\infty$ complint

$$\left(\frac{|a_n|}{|F'(z_n)|} \frac{1}{|z_n|} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leq C, \quad C \text{ constant.}$$

Resumint, tenim el resultat següent.

Teorema 11.18. *Si $\{z_n: n \in \mathbb{N}\}$ és un conjunt discret i tancat de $\mathbb{C}$, és a dir, $\lim_n |z_n| = +\infty$, i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ és una successió arbitrària de números complexos, llavors hi ha una funció entera f que compleix*

$$f(z_n) = a_n, \quad \text{per a } n = 1, 2, \dots$$

Exemple 11.19. Reprement el problema d'interpolació $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$ de l'exemple 11.17 on $F(z) = \sin \pi z$, la condició que han de complir els exponents q_n per tal de garantir (11.5) és:

$$\frac{|a_n|}{|n|} \leq C^{q_n}, \quad C \text{ constant.}$$

Si la successió $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ és acotada o, més generalment, $|a_n| = O(|n|)$ quan $|n| \rightarrow +\infty$, podem prendre qualsevol successió $q_n \nearrow +\infty$, per exemple, $q_n = |n|$. Així,

$$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \frac{1}{\pi} \sin \pi z \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n a_n}{z - n} \left(\frac{z}{n} \right)^{|n|}$$

és un operador lineal d'interpolació sobre l'espai de les successions acotades. En general, la tria de la successió (q_n) dependrà de (a_n) i no podem exhibir un operador lineal d'interpolació que actui sobre totes les successions. $\square$

Veurem ara que el teorema 11.18 es pot millorar prefixant també, a cada punt z_n , un nombre finit de derivades. És a dir, suposarem que per a cada $n \geq 1$ tenim un número $k_n \in \mathbb{N}$ i valors $a_n^0, a_n^1, \dots, a_n^{k_n} \in \mathbb{C}$ arbitraris i volem trobar una funció entera f que compleixi

$$f^{(i)}(z_n) = a_n^i, \quad \text{per a } i = 0, \dots, k_n, \quad n \geq 1.$$

Aquest problema es pot resoldre combinant el teorema de Weierstrass amb el teorema de Mittag-Leffler (vegeu l'exercici 8 de la secció 11.9). Tot i això, farem servir un mètode diferent que es basa en l'existència de solucions de l'equació inhomogènia de Cauchy-Riemann i que és un mètode habitual en la solució de problemes d'interpolació en altres contextos. La idea és resoldre primer el problema amb una funció $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ que tingui $\bar{\partial}\phi$ petit a l'entorn de z_n i després corregir la solució per tal de convertir-la en una funció holomorfa. Considerem els polinomis

$$\phi_n(z) = \sum_{i=0}^{k_n} \frac{a_n^i}{i!} (z - z_n)^i$$

de manera que $\phi_n^{(i)}(z_n) = a_n^i$, $i = 0, 1, \dots, k_n$. Si ε_n són números prou petits per tal que els discos $D(z_n, \varepsilon_n)$ siguin disjunts dos a dos, posem

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z) \chi\left(\frac{|z - z_n|}{\varepsilon_n}\right)$$

on χ és una funció de classe C^∞ a $\mathbb{R}$ amb suport compacte contingut a $[-1, 1]$, parella, amb $\chi(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$. Llavors $\phi \in C^\infty(\mathbb{C})$ i al disc $D(z_n, \varepsilon_n/2)$ hom té $\phi(z) = \phi_n(z)$ i, per tant, $\phi^{(i)}(z_n) = a_n^i$. Sigui ara F una funció entera que tingui zeros simples en els punts z_n i busquem la solució f al problema d'interpolació plantejat, sota la forma

$$f = \phi + uF$$

amb u per determinar; com que volem que f sigui entera, és a dir, $\bar{\partial}f = 0$, ha de ser

$$0 = \bar{\partial}f = \bar{\partial}\phi + F\bar{\partial}u \quad \text{és a dir} \quad \bar{\partial}u = -\frac{\bar{\partial}\phi}{F}.$$

Atès que $\phi = \phi_n$ a $D(z_n, \varepsilon/2)$, hom té $\bar{\partial}\phi = 0$ en aquest disc i, per tant, $-\frac{\bar{\partial}\phi}{F}$ és una funció de classe C^∞ a $\mathbb{C}$ ben definida. El teorema 10.41 ens assegura que, efectivament, hi ha una funció $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ que compleix $\bar{\partial}u = -\frac{\bar{\partial}\phi}{F}$, i en conseqüència f és una solució del problema.

11.4 Zeros de funcions holomorfes i l'equació de Poisson

En aquesta secció establim un lligam entre dos temes aparentment independents. D'una banda, sabem (corol·lari 10.42) que a tot domini $U \subset \mathbb{C}$ l'equació de Poisson

$$\Delta u = \mu,$$

on μ és una mesura de massa localment finita a U , té una solució $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ en el sentit feble, és a dir, es compleix, per a tota funció $\varphi \in C_c^\infty(U)$, la igualtat

$$\int_U u \Delta \varphi dA = \int_U \varphi d\mu.$$

D'altra banda, hem vist que per a tot conjunt discret i tancat $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de U i tota successió de multiplicitats (m_n) hi ha una funció $f \in H(U)$ que té un zero de multiplicitat m_n en el punt z_n , per a cada n .

Proposició 11.20. *Suposem que f és una funció holomorfa al domini U i $f \not\equiv 0$. Sigui $Z(f) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunt de zeros de f (finit o numerable) i (m_n) la successió de multiplicitats respectives. Aleshores, la funció $u = \text{Log } |f|$ és localment integrable a U i hom té, en el sentit feble,*

$$\Delta u = 2\pi \sum_n m_n \delta_{z_n},$$

on δ_{z_n} indica la mesura amb massa 1 en el punt z_n (delta de Dirac en el punt z_n).

Observem que $\mu = \sum_n m_n \delta_{z_n}$ és una mesura de massa localment finita perquè cada compacte de U conté tan sols un nombre finit de punts z_n .

Demostració. Fixat un compacte $K \subset U$ tindrem $z_n \notin K$ per a $n \geq n_0(K)$. En un entorn V de K , per tant, podem escriure

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n_0} (z - z_k)^{m_k} g(z)$$

amb g holomorfa a U i $g(z) \neq 0$ si $z \in V$, i resulta

$$\text{Log } |f(z)| = \sum_{k=1}^{n_0} m_k \text{Log } |z - z_k| + \text{Log } |g(z)|, \quad z \in V.$$

La funció $\text{Log } |g(z)|$ és harmònica a V (corol·lari 4.31) i, per tant, és localment integrable. Pel lema 7.11 cada funció $\text{Log } |z - z_k|$ és també integrable a K i, en conseqüència, $\int_K |\text{Log}(f(z))| dm(z) < +\infty$.

El teorema 7.42 diu que $\Delta \text{Log } |z - z_k| = 2\pi\delta_{z_k}$ en el sentit feble, i llavors, a V , es compleix

$$\Delta \text{Log } |f(z)| = \sum_{k=1}^{n_0} m_k 2\pi\delta_{z_k} + \Delta \text{Log } |g| = 2\pi \sum_k m_k \delta_{z_k}. \quad \square$$

El punt interessant en aquesta relació és que el recíproc també és cert, sempre que el domini U sigui simplement connex.

Teorema 11.21. *Segui U un domini simplement connex, $\{z_n: n \in \mathbb{N}\}$ un conjunt discret i tancat de U , (m_n) una successió de multiplicitats, i considerem la mesura μ , de massa localment finita, $\mu = \sum_n m_n \delta_{z_n}$. Aleshores tota solució $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ de l'equació de Poisson $\Delta u = 2\pi\mu$ és de la forma $u = \text{Log } |f|$, amb f holomorfa a U que s'anul·la exactament en els punts z_n amb multiplicitat m_n .*

Demostració. Segui u una solució de $\Delta u = 2\pi\mu$. Pel teorema de Weierstrass, hi ha una funció $g \in H(U)$ que té zeros exactament en els punts z_n amb multiplicitats m_n i, per tant, $\Delta \text{Log } |g| = 2\pi\mu$, per la proposició 11.20. Així doncs,

$$\Delta(u - \text{Log } |g|) = 0.$$

Pel lema de Weyl, $u - \text{Log } |g|$ és una funció harmònica a U . Si U és simplement connex, d'acord amb el teorema 6.22 hi ha una funció $h \in H(U)$, sense zeros, tal que $u - \text{Log } |g| = \text{Log } |h|$. Llavors hom té $u = \text{Log } |f|$ amb $f = gh$ i f té els mateixos zeros i multiplicitats que g . $\square$

Així, en un domini simplement connex, hi ha una correspondència bijectiva entre solucions de l'equació de Poisson $\Delta u = 2\pi\mu$ i funcions holomorfes amb zeros "codificats" per la mesura μ . En termes generals, tot procediment per a construir funcions holomorfes amb zeros i multiplicitats prefixades porta a una manera de resoldre l'equació de Poisson i recíprocament.

Per tal de justificar el que acabem de dir, apliquem el teorema de Weierstrass, segons el qual la funció

$$f = \prod_{n=1}^{\infty} E_p^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)^{m_n} \exp \left[m_n \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right]$$

té zeros en els punts (z_n) amb multiplicitats (m_n) , sempre que

$$\sum_n \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Reescrivim-ho tot –conclusió i hipòtesi– en termes de $\text{Log}|f|$ i de la mesura $\mu = \sum_n m_n \delta_{z_n}$. D'un costat, tenim

$$\text{Log}|f(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left\{ \text{Log} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \text{Re} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right\} = \int_{\mathbb{C}} K_p(z, w) d\mu(w)$$

amb

$$K_p(z, w) = \text{Log} \left| 1 - \frac{z}{w} \right| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \text{Re} \left(\frac{z}{w} \right)^k, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (11.6)$$

I, a més, també podem escriure

$$\sum_n \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|w|^{p+1}} d\mu(w).$$

El resultat següent generalitza el que acabem de veure per al cas d'una mesura qualsevol.

Teorema 11.22. *Si μ és una mesura a $\mathbb{C}$ de massa localment finita, nulla en un entorn de l'origen, amb $\int_{\mathbb{C}} |w|^{-p-1} d\mu(w) < +\infty$, per a algun $p \in \mathbb{N}$, llavors la integral*

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} K_p(z, w) d\mu(w),$$

on el nucli $K_p(z, w)$ està donat per (11.6), defineix una funció $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ tal que $\Delta u = 2\pi\mu$ en el sentit feble.

Demostració. La identitat

$$\text{Log} \left(1 - \frac{z}{w} \right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{w} \right)^k = - \sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{w} \right)^k, \quad \text{si } |w| > |z|$$

dóna lloc, prenent parts reals, a la desigualtat

$$|K_p(z, w)| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{|w|^k} = \frac{1}{p+1} \left(\frac{|z|}{|w|} \right)^{p+1} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{|w|}}$$

i, en conseqüència, hom té

$$|K_p(z, w)| \leq \frac{2}{p+1} \left(\frac{|z|}{|w|} \right)^{p+1} \quad \text{si } |w| > 2|z|.$$

Fixat $r > 0$, descomponem ara la funció u , al disc $D(0, r)$, en tres parts:

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{|w| \leq 2r} K_p(z, w) d\mu(w) + \int_{|w| > 2r} K_p(z, w) d\mu(w) = \\ &= \int_{|w| \leq 2r} \text{Log } |z - w| d\mu(w) + \\ &\quad + \int_{|w| \leq 2r} \left(-\text{Log } |w| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \text{Re} \left(\frac{z}{w} \right)^k \right) d\mu(w) + \\ &\quad + \int_{|w| > 2r} K_p(z, w) d\mu(w) = \\ &= u_1 + u_2 + u_3. \end{aligned}$$

La integral que defineix u_2 està, de fet, estesa a $\{w: \varepsilon < |w| < 2r\}$, $\varepsilon > 0$, per la hipòtesi sobre μ ; l'integrand és llavors una funció harmònica en z i acotada en w i, per tant, u_2 és una funció harmònica (μ té massa finita per hipòtesi). Al domini $\{w: |w| > 2r > 2|z|\}$ hem vist que $|K_p(z, w)| = O(|w|^{-p-1})$ i $K_p(z, w)$ és harmònica per a $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ i, en conseqüència, u_3 també està ben definida i és harmònica. Finalment, u_1 és 2π vegades el potencial logarítmic de $\mu|_{D(0, 2r)}$ i, pel teorema 7.42, $\Delta u = 2\pi\mu$ a $D(0, 2r)$. Com que $r > 0$ és arbitrari, arribem a la conclusió que $\Delta u = 2\pi\mu$. $\square$

En la direcció contrària, si disposem d'una forma de resoldre l'equació de Poisson, tindrem un procediment per a construir funcions holomorfes amb zeros prefixats. Això ho farem veure, en el cas d'un domini simplement connex i acotat, en la secció 11.6. Com que aquests dominis són conformement equivalents al disc unitat, n'hi haurà prou de considerar aquest domini particular.

11.5 La fórmula de Jensen

En la secció 7.8 hem obtingut la fórmula (7.32) que permet resoldre el problema de Dirichlet no homogeni en un disc $D(0, R)$. Per a $u \in C^2(\overline{D}(0, R))$ hom té

$$\begin{aligned}
 u(z) = & \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0,R)} \frac{R^2 - |z|^2}{|w - z|^2} u(w) ds(w) + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{D(0,R)} \operatorname{Log} \frac{|w - z|R}{|R^2 - \bar{w}z|} \Delta u(w) dm(w).
 \end{aligned}
 \tag{11.7}$$

Si f és holomorfa en un entorn de $\overline{D}(0, R)$, ens proposem aplicar aquesta fórmula a la funció $u = \operatorname{Log} |f(z)|$. Ens interessa especialment el cas que f pugui tenir zeros; llavors $u = \operatorname{Log} |f(z)|$ no pertany a $C^2(\overline{D}(0, R))$; però, tanmateix, veurem que la fórmula obtinguda substituint formalment $u(z)$ per $\operatorname{Log} |f(z)|$ és correcta. Com que $\Delta \operatorname{Log} |f(z)| = 2\pi \sum_{n=1}^N m_n \delta_{z_n}$ a $D(0, R)$, on $z_1, \dots, z_N$ són els zeros de f en aquest disc amb multiplicitats $m_1, \dots, m_N$ (els zeros de f a $D(0, R)$ són en nombre finit perquè f és holomorfa a un entorn de $\overline{D}(0, R)$ per hipòtesi), la fórmula (11.7) dóna

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Log} |f(z)| = & \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0,R)} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - w|^2} \operatorname{Log} |f(w)| ds(w) + \\
 & + \sum_{i=1}^N m_i \operatorname{Log} \frac{|z_i - z|R}{|R^2 - \bar{z}_i z|}, \quad |z| < R.
 \end{aligned}
 \tag{11.8}$$

Per justificar aquesta fórmula, cal veure, en primer lloc, que la funció $\operatorname{Log} |f(w)|$ és integrable en el cercle $C(0, R)$. Si f no hi té zeros, és evident; si $f(a) = 0$ amb $|a| = R$ i m és la multiplicitat de a com a zero de f , hom té $|f(w)| \sim |w - a|^m$ i, per tant, $\operatorname{Log} |f(w)| \sim m \operatorname{Log} |w - a|$. Ara bé,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\operatorname{Log} |t|| dt < +\infty, \quad \text{si } \varepsilon > 0,$$

de manera que $\operatorname{Log} |f|$ és integrable a $C(0, R)$.

Per tal de provar (11.8), observem que si z és algun dels zeros $z_1, z_2, \dots, z_N$ de la funció f llavors els dos membres de (11.8) valen $-\infty$. El cas interessant és, per tant, quan $z \neq z_1, \dots, z_N$. Tant si f té zeros sobre $C(0, R)$ com si no, sempre hi ha un $\delta > 0$ tal que f no té zeros a $\{w: R - \delta < |w| < R\}$. Considerem el domini $U = D(0, R - \varepsilon) \setminus [\bigcup_{i=1}^N \overline{D}(z_i, \varepsilon) \cup \overline{D}(z, \varepsilon)]$, amb $\varepsilon > 0$ prou petit, i apliquem la segona identitat de Green (7.6) a U , prenent $u = \operatorname{Log} |f(z)|$ (que és de classe C^2 a $\overline{U}$) i com a funció v , la funció de Green de $D(0, R)$ amb pol z , és a dir,

$$v(w) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{|w - z|R}{|R^2 - \bar{w}z|}.$$

Recordem que $\frac{\partial v}{\partial \bar{N}} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |z|^2}{|w - z|^2}$ si $|w| = R$, que és el nucli de Poisson de $D(0, R)$. Tant u com v són harmòniques a U i de classe C^2 a $\bar{U}$. Hom té, per tant,

$$\begin{aligned} \int_{C(0, R-\varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right) ds(w) &= \int_{C(z, \varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right) ds(w) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{C(z_i, \varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right) ds(w). \end{aligned}$$

En ser $v(w) = 0$ si $|w| = R$, el límit del terme de l'esquerra, quan $\varepsilon \searrow 0$, és

$$\int_{C(0, R)} u \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} ds(w) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0, R)} \text{Log} |f(w)| \frac{R^2 - |z|^2}{|w - z|^2} ds(w).$$

Per a tractar el límit del primer terme de la dreta quan $\varepsilon \rightarrow 0$, observem que la funció v és la diferència de $\frac{1}{2} \text{Log} |w - z|$ i una funció sense pol en el punt z , i que u és regular. Llavors raonant com en la prova del teorema 7.13 hom té

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C(z, \varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right) ds(w) = u(z) = \text{Log} |f(z)|.$$

Finalment, el darrer terme es tracta com el que acabem de considerar, però amb els papers de u, v canviats. A l'entorn de z_i , v és regular i u és la diferència de $m_i \text{Log} |z - z_i|$ amb una funció regular.

Resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{C(z_i, \varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{N}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} \right) ds(w) &= - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{C(z_i, \varepsilon)} v \frac{\partial u}{\partial \bar{N}} ds(w) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{C(z_i, \varepsilon)} v \frac{\partial}{\partial \bar{N}} (m_i \text{Log} |z - z_i|) ds(w) = \\ &= -2\pi m_i v(z_i) = -m_i \text{Log} \frac{|z_i - z|R}{|R^2 - \bar{z}_i z|}. \end{aligned}$$

Prenent $z = 0$ en la fórmula (11.8) s'obté el resultat següent.

Teorema 11.23 (Fórmula de Jensen). *Si f és una funció holomorfa en un entorn del disc $\bar{D}(0, R)$, $f(0) \neq 0$, i $z_1, \dots, z_N$ són els zeros de f a $D(0, R)$ amb multiplicitats $m_1, \dots, m_N$, llavors hom té*

$$\text{Log} |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log} |f(Re^{it})| dt + \sum_{n=1}^N m_n \text{Log} \frac{|z_n|}{R}.$$

Si f té un zero de multiplicitat k a l'origen, podem aplicar el teorema anterior a la funció $g(z) = \frac{f(z)}{z^k}$, que compleix $g(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, i obtenim

$$\operatorname{Log} \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |f(Re^{it})| dt - k \operatorname{Log} R + \sum_{n=1}^N m_n \operatorname{Log} \frac{|z_n|}{R}.$$

Exemple 11.24. La fórmula de Jensen amb $f(z) = z - \alpha$, $|\alpha| < 1$, $\alpha \neq 0$, dóna

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |e^{it} - \alpha| dt = \operatorname{Log} |f(0)| - \operatorname{Log} |\alpha| = 0.$$

Si $\alpha = 0$, trivialment la integral és zero. Així, si P és un polinomi que té tots els zeros dins el disc unitat, es compleix

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |P(e^{it})| dt = 0. \quad \square$$

Una altra conseqüència interessant de la fórmula (11.8) es deriva de l'observació que tots els termes del sumatori són negatius (tota funció de Green és negativa).

Corol·lari 11.25. Si f és una funció holomorfa en un entorn del disc $\overline{D}(0, R)$, llavors la funció $\operatorname{Log} |f(z)|$ és subharmònica a $D(0, R)$, en el sentit que

$$\operatorname{Log} |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - Re^{it}|^2} \operatorname{Log} |f(Re^{it})| dt, \quad |z| < R.$$

La fórmula (11.8) permet veure que si f no té zeros sobre el cercle $C(0, R)$, llavors els valors de $|f|$ en aquest cercle i els zeros de f determinen $|f(z)|$ per a $z \in D(0, R)$. Ara bé, sabem que tota funció holomorfa f queda determinada per $|f|$, llevat d'una constant de mòdul 1; per tant, sembla natural intentar obtenir els valors de $f(z)$ directament. Amb aquesta finalitat cal treballar una mica més a partir de la fórmula (11.8). Considerem la funció

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^N \frac{(R^2 - \bar{z}_i z)^{m_i}}{(z - z_i)^{m_i} R},$$

que és una funció sense zeros i compleix $|g(z)| = |f(z)|$ si $|z| = R$. La funció $\operatorname{Log} |g|$ és harmònica en un entorn de $\overline{D}(0, R)$ i (11.8) s'escriu

$$\operatorname{Log} |g(z)| = \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0, R)} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - w|^2} \operatorname{Log} |g(w)| ds(w),$$

que expressa $\text{Log}|g|$ com la transformada de Poisson dels seus valors frontera. Considerem ara la funció holomorfa

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{C(0,R)} \text{Log}|g(w)| \frac{w+z}{w-z} ds(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \text{Log}|g(Re^{it})| dt. \end{aligned}$$

Hom té, si $|w| = R$,

$$\text{Re} \frac{w+z}{w-z} = \frac{\text{Re}(w+z)(\bar{w}-\bar{z})}{|w-z|^2} = \frac{R^2 - |z|^2}{|w-z|^2}.$$

Això significa que la part real de h és $\text{Log}|g(z)|$ i, en conseqüència, h difereix d'una determinació de $\log g(z)$ en una constant imaginària:

$$\log g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \text{Log}|f(Re^{it})| dt.$$

Així, hem demostrat el resultat següent.

Teorema 11.26. *Si f és una funció holomorfa en un entorn del disc $\overline{D}(0, R)$, sense zeros sobre $C(0, R)$, hom té*

$$f(z) = C \prod_{i=1}^N \frac{(z - z_i)^{m_i} R}{(R^2 - \bar{z}_i z)^{m_i}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \text{Log}|f(Re^{it})| dt \right\},$$

on z_i , $i = 1, \dots, N$ són els zeros de f a $D(0, R)$, m_i , $i = 1, \dots, N$, les seves multiplicitats, i C , una constant.

11.6 Creixement d'una funció holomorfa i distribució dels zeros. La condició de Blaschke

Tal com hem vist en la secció 11.5, la fórmula de Jensen és una conseqüència de l'equació $\Delta \text{Log}|f| = 2\pi\mu$, amb $\mu = \sum_n m_n \delta_{z_n}$, equació que satisfà una funció holomorfa f que tingui els zeros z_n amb multiplicitats m_n i, de fet, estableix un lligam quantitatiu entre $|f|$ i μ .

Un exemple interessant en el qual es fa explícit aquest lligam és en el cas de funcions holomorfes acotades al disc unitat $\mathbb{D}$. Si f és acotada i holomorfa a

$\mathbb{D}$, amb zeros z_n de multiplicitats m_n , la fórmula de Jensen implica que, per a $R < 1$, hom té

$$\sum_{0 < |z_n| < R} m_n \operatorname{Log} \frac{R}{|z_n|} \leq C$$

amb C una constant independent de R , la qual cosa significa

$$\sum_{z_n \neq 0} m_n \operatorname{Log} \frac{1}{|z_n|} \leq C,$$

que és equivalent a

$$\sum_n m_n (1 - |z_n|) < +\infty.$$

Aquesta condició s'anomena *condició de Blaschke*. Així, si f és holomorfa i acotada al disc unitat o, més generalment, si $f \in H(\mathbb{D})$, $f \neq 0$ i hi ha una constant $C \geq 0$ tal que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |f(Re^{it})| dt \leq C, \quad 0 \leq R < 1,$$

llavors el conjunt de zeros de f satisfà la condició de Blaschke.

Tal com hem vist, la fórmula de Jensen és la fórmula (11.7) per a $z = 0$,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{C(0,R)} \operatorname{Log} \frac{|w|}{R} \Delta u(w) dm(w),$$

aplicada a la funció $u = \operatorname{Log} |f|$. Per a una funció $u \in C^2(\mathbb{D})$ amb $\Delta u \geq 0$ (o, més generalment, amb $\Delta u = \mu$, en sentit feble, on μ és una mesura positiva), la condició

$$\sup_R \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) dt < +\infty,$$

que es compleix, en particular, si u és acotada implica la condició de Blaschke en el sentit que

$$\int_{\mathbb{D}} \operatorname{Log} \frac{1}{|w|} \Delta u(w) dm(w) < +\infty.$$

Aquesta és, doncs, una condició vinculada a l'equació de Laplace, formulable en dimensió arbitrària. Per exemple, a la bola unitat $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$, si $u \in C^2(\mathbb{B})$ amb $\Delta u \geq 0$ compleix la condició

$$\sup_{0 < R < 1} \int_{\mathbb{S}} u(Ry) d\sigma(y) < +\infty,$$

llavors la condició de Blaschke és

$$\int_{\mathbf{B}} (1 - |x|) \Delta u(x) dV(x) < +\infty.$$

En la proposició 7.52 s'ha vist que la funció de Green del disc unitat permet considerar el potencial

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{D}} \operatorname{Log} \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| d\mu(w)$$

quan μ és una mesura positiva que satisfà la condició de Blaschke

$$\int_{\mathbf{D}} (1 - |w|^2) d\mu(w) < +\infty.$$

Aleshores la funció u és integrable a $\mathbb{D}$ i $\Delta u = \mu$ en el sentit feble. Si agafem $\mu = 2\pi \sum m_n \delta_{z_n}$, llavors la condició $\int_{\mathbf{D}} (1 - |w|^2) d\mu(w) = 2\pi \sum_n m_n (1 - |z_n|^2) < +\infty$ és la condició de Blaschke per als punts z_n i els enters m_n , i sabem que ha de ser $u = \operatorname{Log} |f(z)|$ amb $f \in H(\mathbb{D})$ que s'anul·la en els punts z_n amb multiplicitats m_n . A més essent $u \leq 0$, f estarà acotada per 1. Com que ara

$$u(z) = \sum_n m_n \operatorname{Log} \left| \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|,$$

és natural considerar el producte infinit

$$\prod_n \left(\lambda_n \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right)^{m_n}$$

amb $|\lambda_n| = 1$ com a candidat per a $f(z)$. La tria dels λ_n haurà de ser tal que la sèrie $\sum_{n \geq n_0(r)} m_n \operatorname{Log} \left(\lambda_n \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right)$ convergeixi uniformement sobre cada disc $D(0, r)$, $0 < r < 1$, o bé, de manera equivalent, que

$$\sum_n m_n \left| 1 - \lambda_n \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|$$

convergeixi uniformement sobre cada disc compacte $\overline{D}(0, r)$. Ens interessa que $|1 - \bar{z}_n z - \lambda_n z + \lambda_n z_n|$ estigui dominat per $1 - |z_n|$; per tant, si $z_n = r_n w_n$ amb $|w_n| = 1$, $r_n = |z_n| \neq 0$, la quantitat

$$1 - r_n \bar{w}_n - \lambda_n z + \lambda_n r_n w_n$$

s'ha d'anul·lar quan $r_n = 1$, és a dir, ha de ser $1 - \bar{w}_n z - \lambda_n z + \lambda_n w_n = 0$. Per tant, prenem $\lambda_n = -\bar{w}_n = -\frac{\bar{z}_n}{|z_n|}$ si $z_n \neq 0$. Amb aquesta tria, hom té que l'expressió $1 - \bar{z}_n z - \lambda_n z + \lambda_n z_n = 1 - \bar{z}_n z + \frac{\bar{z}_n z}{|z_n|} - |z_n| = (1 - |z_n|) + z \bar{z}_n \left(\frac{1}{|z_n|} - 1 \right) = (1 - |z_n|) \left(1 + \frac{z \bar{z}_n}{|z_n|} \right)$ té mòdul inferior o igual a $(1 - |z_n|)(1 + |z|)$. Aleshores la sèrie

$$\sum_{z_n \neq 0} m_n \left| 1 - \lambda_n \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|, \text{ majorada per } \sum_{z_n \neq 0} m_n \frac{(1 - |z_n|)(1 + |z|)}{1 - |z|},$$

és, efectivament, uniformement convergent sobre cada disc $\bar{D}(0, r)$.

Resumint, hem provat el resultat següent.

Teorema 11.27. *Si f és una funció holomorfa i acotada al disc unitat, $f \neq 0$, llavors el conjunt de zeros $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ amb multiplicitats (m_n) de f compleix la condició de Blaschke*

$$\sum_n m_n (1 - |z_n|) < +\infty.$$

Recíprocament, donats els punts $z_n \in \mathbb{D}$ i els enters $m_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, que satisfan aquesta condició, el producte infinit

$$B(z) = z^k \prod_{z_n \neq 0} \frac{\bar{z}_n}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$$

convergeix uniformement sobre els compactes de $\mathbb{D}$ i defineix una funció B holomorfa a $\mathbb{D}$, que compleix $|B(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$ i que s'anul·la exactament en els punts z_n amb multiplicitats m_n .

El producte infinit que defineix la funció B s'anomena *producte de Blaschke*.

Exemple 11.28. La successió $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ amb $z_n = 1 - 1/n$ no pot ser la successió de zeros d'una funció $f \in H(\mathbb{D})$ acotada perquè

$$\sum_n (1 - |z_n|) = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty.$$

En canvi, si $z_n = 1 - 1/n^\alpha$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\alpha > 1$, llavors $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sí que és la successió de zeros d'una funció f holomorfa a $\mathbb{D}$ i acotada; concretament,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\alpha} - z}{1 - n^{-\alpha} z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n^\alpha z}{n^\alpha - z}.$$

□

11.7 Funcions enteres d'ordre finit

Si partim d'una funció entera f , llavors la fórmula de Jensen es pot aplicar a la funció f i a qualsevol disc centrat a l'origen. Aprofitarem aquest fet per a estudiar la relació que hi ha entre el creixement de f i la distribució dels seus zeros.

Sigui, doncs, f una funció entera que suposarem que compleix $f(0) = 1$. El creixement de f es mesura per la funció

$$M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad r \geq 0.$$

Pel principi del mòdul màxim és $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$, i, per tant, $M(r)$ és una funció creixent de r . De fet, és estrictament creixent si f no és constant, perquè si $r_1 < r_2$ i fos $M(r_1) = M(r_2)$, la funció $|f|$ tindria un màxim local en un punt del disc $D(0, r_2)$ i, pel principi del màxim, f seria constant a $D(0, r_2)$ i, per tant, a tot $\mathbb{C}$.

La funció $M(r)$ pot créixer de diverses formes. Sabem, per les desigualtats de Cauchy, que si $M(r)$ té un creixement polinomial, és a dir, $M(r) = O(r^N)$ per a algun N natural, aleshores f és un polinomi de grau més petit o igual que N (secció 4.7, exercici 11). Altres tipus de creixement es poden quantificar amb la noció d'ordre d'una funció entera.

En general, si $\varphi(r) \geq 0$ és una funció creixent de r , per a $r > 0$, l'ordre de φ és el número $\rho \geq 0$ definit per

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } \varphi(r)}{\text{Log } r}.$$

Això significa que ρ és l'ímfim del conjunt de números $\lambda > 0$ que compleixen

$$\varphi(r) = O(r^\lambda), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Definició 11.29. L'ordre $\rho = \rho(f)$ d'una funció entera f és l'ordre de la funció $\text{Log } M(r)$, és a dir,

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log Log } M(r)}{\text{Log } r}.$$

Això significa que ρ és l'ímfim del conjunt de números $\lambda > 0$ tals que

$$|f(z)| = O(\exp(|z|^\lambda)), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Exemple 11.30. Els polinomis tenen ordre zero i la funció exponencial, $f(z) = e^z$, té ordre 1. L'ordre pot ser infinit; per exemple, la funció $f(z) = \exp(\exp(z))$ té ordre infinit. $\square$

Exemple 11.31. La funció $f(z) = \sin z$ té ordre 1, perquè $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$, si $z = x + iy$, i d'aquí es desprèn

$$\operatorname{sh}^2 r \leq M(r)^2 \leq 1 + \operatorname{sh}^2 r,$$

que implica que $M(r)$ es comporta com e^r . □

Segui $(z_n)_{n=1}^\infty$ la successió de zeros d'una funció entera f amb $|z_n| \leq |z_{n+1}|$ i $(m_n)_{n=1}^\infty$ les multiplicitats respectives. La distribució radial dels zeros de f es codifica mitjançant la *funció comptadora* $n_f(r)$, que compta (amb multiplicitats) el nombre de zeros que hi ha a cada disc $D(0, r)$:

$$n(r) = n_f(r) = \sum_{|z_n| \leq r} m_n, \quad \text{si } r > 0.$$

Així, $n(r)$ és una funció creixent esglaonada, constant entre $|z_n|$ i $|z_{n+1}|$ (si $|z_n| < |z_{n+1}|$), que fa un salt de valor m_n en el punt $|z_n|$.

El comportament de $n(r)$ quan r creix controla la convergència o divergència de sèries del tipus $\sum_n m_n \psi(|z_n|)$ amb $\psi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, una funció derivable i decreixent. En efecte, aplicant el teorema de Fubini, hom té per a $r > 0$ fixat:

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n| \leq r} m_n \psi(|z_n|) &= \sum_{|z_n| \leq r} \int_0^\infty m_n \mathbb{1}_{[0, \psi(|z_n|)]}(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \#\{n: |z_n| \leq r, \psi(|z_n|) \geq t\} dt = \\ &= \int_0^\infty \#\{n: |z_n| \leq \min(r, \psi^{-1}(t))\} dt = \\ &= \int_{\psi(r)}^\infty n(\psi^{-1}(t)) dt + n(r) \psi(r) = \\ &= \int_0^r n(t) |\psi'(t)| dt + n(r) \psi(r) \end{aligned} \tag{11.9}$$

(hem fet servir la notació $\#A$ per a indicar el nombre d'elements d'un conjunt finit A).

Prenent $\psi(x) = \operatorname{Log} \frac{r}{x}$ tenim la igualtat $\sum_{|z_n| \leq r} m_n \operatorname{Log} \frac{r}{|z_n|} = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$, i la fórmula de Jensen s'escriu, per tant,

$$\operatorname{Log} |f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |f(re^{i\theta})| d\theta. \tag{11.10}$$

Lema 11.32. Si $\psi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ és decreixent i derivable, la sèrie $\sum_n m_n \psi(|z_n|)$ és convergent si i només si la integral $\int_0^\infty n(t) |\psi'(t)| dt$ és convergent i, en aquest cas, $n(r) \psi(r) \xrightarrow{r \nearrow \infty} 0$ i $\sum_n m_n \psi(|z_n|) = \int_0^\infty n(t) |\psi'(t)| dt$.

Demostració. La igualtat entre el primer i l'últim terme de (11.9) prova que si la sèrie és convergent, la integral és convergent, perquè $n(r) \psi(r) \geq 0$. Si la integral és convergent, aleshores

$$n(r) \psi(r) \leq \int_r^\infty n(t) |\psi'(t)| dt \xrightarrow{r \nearrow \infty} 0,$$

i la mateixa igualtat prova la convergència de la sèrie. $\square$

L'exponent de convergència μ d'una successió de punts $(z_n)_{n=1}^\infty$ amb multiplicitats (m_n) i $z_n \neq 0$, es defineix per

$$\mu = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum m_n |z_n|^{-\lambda} < +\infty \right\}.$$

Pel lema 11.32, hom té

$$\mu = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt < +\infty \right\}.$$

Lema 11.33. L'exponent de convergència μ d'una successió de punts (z_n) , $z_n \neq 0$, amb multiplicitats (m_n) , coincideix amb l'ordre de la funció comptadora $n(r)$, $\bar{\rho} = \limsup_{r \nearrow \infty} \frac{\text{Log } n(r)}{\text{Log } r}$.

Demostració. Provem primer que $\bar{\rho} \leq \mu$. Si $\mu = +\infty$ no hi ha res a dir; si $\mu < +\infty$ i triem λ , $\lambda > \mu$, és $\sum m_n |z_n|^{-\lambda} < +\infty$ que implica $n(r)/r^\lambda \rightarrow 0$, o bé $n(r) = O(r^\lambda)$ i, per tant, $\bar{\rho} \leq \lambda$. Com que λ , $\lambda > \mu$, és arbitrari, resulta $\bar{\rho} \leq \mu$. D'altra banda, si $\bar{\rho} < +\infty$ i $\lambda > \bar{\rho}$, pel fet que $n(r) = O(r^\lambda)$, la integral

$$\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\lambda+1+\varepsilon}} dt$$

és convergent per a $\varepsilon > 0$; llavors ha de ser $\mu \leq \lambda + \varepsilon$, i com que $\varepsilon > 0$ és arbitrari, resulta $\mu \leq \lambda$. Això és cert per a tot $\lambda > \bar{\rho}$ i, per tant, $\mu \leq \bar{\rho}$. $\square$

Exemple 11.34. Si amb $k \in \mathbb{N}$ fixat posem $z_n = n^k$, $n \in \mathbb{Z}$, la sèrie $\sum |z_n|^{-\lambda} = \sum n^{-k\lambda}$ convergeix exactament quan $k\lambda > 1$; per tant, l'exponent de convergència de (z_n) és $1/k$. Si prenem com a (z_n) la successió dels

números primers, el famós teorema sobre la distribució d'aquests números estableix que la funció corresponent $n(r)$ es comporta com $r/\text{Log } r$, amb la qual cosa l'ordre i l'exponent de convergència són tots dos iguals a 1. Si prenem una progressió geomètrica $z_n = \rho^n$ amb $\rho > 1$, trivialment $\sum |z_n|^{-\lambda} = \sum \rho^{-n\lambda}$ és convergent si i només si $\rho^\lambda > 1$ i l'exponent de convergència de (z_n) és 0. $\square$

D'una banda, tenim, doncs, l'ordre ρ de la funció entera f , i de l'altra, l'ordre μ de la funció $n(r)$, comptadora dels zeros de f , que coincideix amb l'exponent de convergència d'aquests zeros.

Teorema 11.35 (Hadamard). *Si f és una funció entera d'ordre ρ i μ és l'exponent de convergència dels zeros de f , hom té $\mu \leq \rho$.*

Demostració. Suposant $f(0) = 1$, la fórmula de Jensen (11.10) dona

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \text{Log } M(r).$$

Aleshores, com que $n(t)$ és creixent, resulta

$$n(r) \leq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} dt \leq \int_0^{er} \frac{n(t)}{t} dt \leq \text{Log } M(er).$$

D'aquí es desprèn

$$\begin{aligned} \mu &= \limsup_{r \nearrow \infty} \frac{\text{Log } n(r)}{\text{Log } r} \leq \limsup_{r \nearrow \infty} \frac{\text{Log } \text{Log } M(er)}{\text{Log } r} = \\ &= \limsup_{r \nearrow \infty} \frac{\text{Log } \text{Log } M(r)}{\text{Log } r} = \rho. \end{aligned} \quad \square$$

Així, si una funció entera f té ordre ρ i zeros (z_n) amb multiplicitats (m_n) , es compleix

$$\sum_n m_n |z_n|^{-\rho-\varepsilon} < +\infty \quad \text{per a qualsevol } \varepsilon > 0.$$

Sigui p la part entera de ρ , $p = [\rho]$; com que $p+1 > \rho$, la sèrie $\sum_n m_n |z_n|^{-p-1}$ convergeix i podem considerar el *producte canònic*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right). \quad (11.11)$$

Teorema 11.36 (Hadamard). *Tota funció entera f d'ordre finit ρ es pot factoritzar en la forma*

$$f(z) = z^m \exp(P(z))F(z),$$

on m és la multiplicitat de l'origen com a zero de f , P és un polinomi de grau més petit o igual que ρ i F és el producte canònic (11.11).

Demostració. Substituint f per $f/c_m z^m$, on $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$, podem suposar que $f(0) = 1$. Fixem $R > 0$, suposem $f(z) \neq 0$ si $|z| = R$ i siguin $z_1, \dots, z_N$, els zeros de f amb $|z_i| < R$. Pel teorema 11.26 tenim

$$f(z) = C \prod_{n=1}^N \frac{(z - z_n)^{m_n} R}{(R^2 - \bar{z}_n z)^{m_n}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \operatorname{Log} |f(Re^{it})| dt \right\}.$$

Escrivim ara aquesta fórmula en termes del producte parcial

$$F_R(z) = \prod_{n=1}^N E_p^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) = C_R \prod_{n=1}^N (z - z_n)^{m_n} \exp \left[m_n \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^N \frac{z_n^k}{k} \right],$$

on C_R és constant i $p = [\rho]$, de la funció $h_R(z) = \frac{f(z)}{F_R(z)}$, que no té zeros a $D(0, R)$, i del logaritme d'aquesta funció; hom té

$$\begin{aligned} \log h_R(z) &= d_R + \sum_{n=1}^N m_n \operatorname{Log} \frac{1}{R^2 - \bar{z}_n z} + m_n \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^p \frac{z_n^k}{k} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \operatorname{Log} |f(Re^{it})| dt, \quad |z| < R, \end{aligned}$$

per a alguna constant d_R .

Derivem $(p+1)$ vegades la igualtat anterior per tal d'obtenir

$$\begin{aligned} (\log h_R(z))^{(p+1)} &= \sum_{n=1}^N m_n \frac{p! \bar{z}_n^{p+1}}{(R^2 - \bar{z}_n z)^{p+1}} + \\ &+ \frac{(p+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |f(Re^{it})| dt \frac{2Re^{it}}{(Re^{it} - z)^{p+2}} dt. \end{aligned}$$

En termes de $M(R)$ i de $n(R) = n_f(R)$ resulta, per a $|z| = r < R$,

$$|(\log h_R(z))^{(p+1)}| \leq \frac{p! n(R)}{(R-r)^{p+1}} + \frac{(p+1)!}{2\pi} \operatorname{Log} M(R) \frac{4\pi R}{(R-r)^{p+2}}.$$

Quan $R \rightarrow +\infty$, les funcions $\log h_R$ convergeixen uniformement sobre els compactes de $\mathbb{C}$ cap a $\log h$, on $h = \frac{f}{F}$ i, per tant, també hi ha convergència de les derivades. Ara bé, com que $\text{Log } M(R) = O(R^{\rho+\varepsilon})$ i $n(R) = O(R^{\rho+\varepsilon})$, fent $R \rightarrow +\infty$ veiem que $\log h$ té la derivada d'ordre $p+1$ idènticament nul·la i ha de ser, per tant, un polinomi de grau p . $\square$

Exemple 11.37. Si ρ és un enter i P és un polinomi de grau més petit o igual que ρ , la funció $z^m \exp P(z)$ amb $m \in \mathbb{N}$, té ordre ρ ; ara bé, si ρ no és enter, necessàriament hi ha d'haver el factor F en el teorema 11.36 i ha de constar d'infinites termes; altrament l'ordre de f seria el grau de P . És a dir, si una funció entera té ordre no enter, necessàriament té infinites zeros. $\square$

Observem que del teorema d'Hadamard es dedueix que el producte canònic F també té ordre finit. Ens proposem ara d'esbrinar quin és, exactament, l'ordre d'un producte canònic. Recordem que el producte F està definit per

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p^{m_n} \left(\frac{z}{z_n} \right),$$

on p és l'enter més petit tal que

$$\sum_n \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} < +\infty.$$

Necessitem unes estimacions de les funcions $\text{Log } |E_p(z)|$ més precises que les utilitzades en la secció 11.2.

Lema 11.38. *Els factors elementals de Weierstrass $E_p(z)$ compleixen les desigualtats següents:*

$$a) \text{Log } |E_p(z)| \leq C_p \frac{|z|^{p+1}}{1+|z|}, \quad p > 0, z \in \mathbb{C} \text{ i } C_p \text{ constant.}$$

$$b) \text{Log } |E_0(z)| \leq \text{Log}(1 + |z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demostració. La part *b)* és evident. Recordem ara que per a $|z| < 1$, és

$$\text{Log } E_p(z) = - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

d'on

$$\text{Log } |E_p(z)| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \leq \frac{1}{p+1} \frac{|z|^{p+1}}{1-|z|} \leq \frac{2}{p+1} |z|^{p+1},$$

per a $|z| < \frac{1}{2}$. Si $|z| > 1$, tenim, trivialment,

$$|E_p(z)| \leq (1 + |z|) \exp \sum_{k=1}^p \frac{|z|^k}{k} \leq (1 + |z|) \exp(p|z|^p) \leq \exp[(p+1)|z|^p].$$

Atès que $\frac{|z|^{p+1}}{1+|z|}$ és de l'ordre de $|z|^{p+1}$ si $|z| < \frac{1}{2}$, de l'ordre de $|z|^p$ si $|z| > 1$ i està acotat inferiorment i superiorment per a $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$, les dues estimacions anteriors proven a) per a una constant C_p . $\square$

Proposició 11.39. Si $\sum_n \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} < +\infty$, el producte canònic $F(z) = \prod_n E_p^{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ satisfà l'acotació

$$\text{Log } |F(z)| \leq B_p r^p \left\{ \int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right\},$$

on $r = |z|$, $n(t)$ és la funció comptadora de $\{z_n; m_n\}$ i B_p una constant.

Demostració. Si $p = 0$, utilitzant la part (b) del lema 11.38 i el lema 11.32, resulta

$$\text{Log } |F(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_n \text{Log} \left(1 + \frac{1}{|z_n|} \right) = r \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t(t+r)} dt$$

que es majora per

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt.$$

Si $p > 0$, per la part a) del lema 11.38 i el lema 11.32, és

$$\begin{aligned} \text{Log } |F(z)| &\leq C_p \sum_n m_n \frac{r^{p+1}}{|z_n|^p(r + |z_n|)} = \\ &= C_p r^{p+1} \int_0^{\infty} \left[\frac{p}{t^{p+1}(t+r)} + \frac{1}{t^p(t+r)^2} \right] n(t) dt. \end{aligned}$$

Separant, altre cop, les contribucions de $0 \leq t \leq r$ i de $t > r$ completem la demostració. $\square$

Teorema 11.40 (Borel). L'ordre d'un producte canònic és igual a l'exponent de convergència dels seus zeros.

Demostració. Sigui μ l'exponent de convergència dels zeros del producte F que hem definit per (11.11); si μ no és enter, serveix $p = [\mu]$, i si μ és enter, prenem

$p = \mu - 1$ si la sèrie $\sum_n \frac{m_n}{|z_n|^\mu}$ convergeix, i $p = \mu$ si divergeix. Suposem primer $\mu < p + 1$; si $\mu + \varepsilon < p + 1$, tenim $n(t) = O(t^{\mu+\varepsilon})$ i la proposició 11.39 implica

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} |F(z)| &\leq B_p r^p \left\{ O(1) + \int_0^r t^{\mu+\varepsilon-p-1} dt + t \int_r^\infty t^{\mu+\varepsilon-p-2} dt \right\} = \\ &= B_p r^p O(r^{\mu+\varepsilon-p}) = O(r^{\mu+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Això demostra $\rho \leq \mu$ si ρ és l'ordre del producte F . Suposem ara $\mu = p + 1$, és a dir, que la sèrie $\sum_n \frac{m_n}{|z_n|^\mu}$ convergeix. Pel lema 11.32, la convergència d'aquesta sèrie és equivalent a la convergència de la integral

$$\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\mu+1}} dt = \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt$$

i, en conseqüència, ha de ser $n(r) = o(r\mu)$. Tenim, aleshores,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt = 0.$$

Això dona

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt = o(r)$$

i, per la proposició 11.39, és

$$\operatorname{Log} |F(z)| = o(r^{p+1}) = o(r^\mu),$$

d'on també es dedueix $\rho \leq \mu$. El teorema 11.35 ens dona la desigualtat contrària, $\mu \leq \rho$. $\square$

Combinant els teoremes de Hadamard i de Borel s'obté el resultat següent.

Teorema 11.41. *Una successió de punts del pla (z_n) , $z_n \neq 0$ amb multiplicitats (m_n) és la successió de zeros d'una funció entera d'ordre més petit o igual que ρ si i només si es compleix $\sum_n m_n |z_n|^{-\rho-\varepsilon} < +\infty$, per a tot $\varepsilon > 0$.*

11.8 Ideals de l'àlgebra de les funcions holomorfes

Un dels objectes d'estudi de més interès en una àlgebra és la determinació de l'estructura dels seus ideals. Un exemple molt natural i senzill és l'àlgebra dels polinomis en una variable sobre un cos qualsevol. Pensem en $\mathbb{C}[z]$ i sigui I

un ideal d'aquesta àlgebra de polinomis. Si triem un polinomi $P \in I$ de grau mínim entre tots els polinomis no nuls de I , és fàcil veure que tot altre polinomi $H \in I$ és un múltiple de P , és a dir, $H = P \cdot Q$, amb $Q \in \mathbb{C}[z]$. En efecte, només cal fer la divisió entera de H per P , que dóna $H = P \cdot Q + R$ amb $\text{gr}(R) < \text{gr}(P)$ i $R \in I$. Per tant, ha de ser $R = 0$. Així, l'ideal I està generat per P , és a dir $I = \langle P \rangle = \{H \in \mathbb{C}[z] : H = P \cdot Q, Q \in \mathbb{C}[z]\}$, i si considerem ara els zeros de P , siguin $z_1, z_2, \dots, z_N$ comptats amb les seves multiplicitats $m_1, m_2, \dots, m_N$, resulta que un polinomi H és de I si i només si H s'anul·la en cada un dels punts z_i , $i = 1, \dots, N$ amb multiplicitat més gran o igual que m_i .

Una generalització natural d'aquest exemple s'obté en considerar l'àlgebra de les sèries de potències amb coeficients complexos o àlgebra de les sèries formals $\mathbb{C}[[z]]$. És fàcil veure que en aquesta àlgebra també és cert que tots els ideals tenen un sol generador. Si ara pensem en les sèries de potències de radi de convergència infinit, estarem parlant de l'àlgebra de les funcions enteres. Doncs bé, ens proposem en aquesta secció de fer l'estudi dels ideals de l'àlgebra de les funcions holomorfes en un domini qualsevol del pla complex. Veurem que, en aquest cas, només es poden determinar els ideals que satisfan alguna restricció.

Fixem, doncs, un domini U del pla complex i considerem l'espai de les funcions holomorfes sobre U , $H(U)$. És clar que $H(U)$ és una $\mathbb{C}$ -àlgebra, és a dir, un espai vectorial sobre els complexos que, a més, té estructura d'anell. Recordem també que $H(U)$ com a subespai de $C(U)$ té una topologia que prové d'una mètrica completa. La convergència corresponent a aquesta topologia és la convergència uniforme sobre els compactes de U (vegeu l'apartat 9.1.3), i les operacions de l'àlgebra són contínues respecte d'aquesta topologia.

Els ideals més senzills en tota àlgebra són els *ideals principals*, és a dir, els ideals que tenen un sol generador. Triem una funció $f \in H(U)$, $f \neq 0$, i considerem l'ideal principal

$$I = \langle f \rangle = \{g = fh : h \in H(U)\}.$$

Sigui (z_n) la successió dels zeros de f i indiquem per $m_n \geq 1$ la multiplicitat de z_n . És clar que cada funció $g \in I$ s'anul·la a cada punt z_n amb una multiplicitat $m'_n \geq m_n$. Recíprocament, si una funció $g \in H(U)$ s'anul·la a cada z_n amb multiplicitat $m'_n \geq m_n$, és fàcil veure que $g \in I$. En efecte, la funció g/f és holomorfa a $U \setminus \{z_n\}$, però a més al voltant de cada punt z_n hom té $f(z) = (z - z_n)^{m_n} f_1(z)$ i $g(z) = (z - z_n)^{m'_n} g_1(z)$ amb f_1, g_1 holomorfes no nul·les. Per tant, $\frac{g(z)}{f(z)} = (z - z_n)^{m'_n - m_n} \frac{g_1}{f_1}$ també és holomorfa en el punt z_n . Posant $h = \frac{g}{f} \in H(U)$ tenim la conclusió que volíem. Hem vist, doncs, que l'ideal principal $I = \langle f \rangle$ està format, exactament, per les funcions de $H(U)$ que s'anul·len a

cada zero z_n de f amb multiplicitat més gran o igual que m_n . En particular, aplicant el teorema 9.3, tenim la conseqüència següent:

Proposició 11.42. *Si I és un ideal principal de $H(U)$, aleshores I és un conjunt tancat de $H(U)$.*

Partim ara d'un conjunt $Z = \{z_n; m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ format per un conjunt discret i tancat de punts $\{z_n\}$ de U i d'una successió d'enters $m_n \geq 1$, i considerem el conjunt de funcions holomorfes

$$I(Z) = \{g \in H(U) : g(z_n) = g'(z_n) = \dots = g^{m_n-1}(z_n) = 0, n = 1, 2, \dots\}, \quad (11.12)$$

que s'anul·len a cada punt z_n amb multiplicitat més gran o igual que m_n . És clar que $I(Z)$ és un ideal de $H(U)$. És principal? Doncs sí, i la resposta afirmativa la dóna el teorema de Weierstrass (teorema 11.8). En efecte, segons aquest teorema, hi ha una funció $f \in H(U)$ que s'anul·la exactament a cada punt z_n amb multiplicitat m_n . Això significa que $f \in I$ i, pel que hem dit abans, que $I = \langle f \rangle$.

A partir d'ara anomenarem *conjunt de zeros de U* un conjunt de la forma $Z = \{z_n; m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ amb $\{z_n\}$ discret i tancat a U i $m_n \geq 1$ enters. Hem vist, doncs, el resultat següent.

Proposició 11.43. *Hi ha una correspondència bijectiva entre els ideals principals de $H(U)$ i els conjunts de zeros de U . La correspondència s'obté assignant a cada conjunt de zeros Z l'ideal $I(Z)$ definit per (11.12).*

Observació 11.1. Per tal que el resultat anterior sigui cert cal admetre el conjunt buit $Z = \{\emptyset; \emptyset\}$ com a conjunt de zeros que correspon a l'ideal engendrat per una funció que no s'anul·la a U . És clar que en aquest cas l'ideal corresponent és tota l'àlgebra $H(U)$. Si, com és habitual, anomenem *ideal propi* de $H(U)$ un ideal I tal que $\{0\} \neq I \neq H(U)$, llavors els ideals principals propis es corresponen amb els conjunts de zeros no buits.

Com a pas següent en l'estudi dels ideals de $H(U)$ és natural considerar els ideals que tenen un nombre finit de generadors, és a dir, que són de la forma $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle = \{g = \sum_{i=1}^n h_i f_i : h_i \in H(U)\}$. Ens podem preguntar: és tancat l'ideal I ? O encara més: és principal l'ideal I ? Aviat donarem la resposta positiva a aquestes qüestions.

Comencem per observar que el fet de ser I principal vol dir que existeix una funció $f_0 \in H(U)$ de manera que $f_i \in \langle f_0 \rangle$ $i = 1, \dots, n$. Si la funció f_0 té algun zero a U , llavors totes les funcions $f_1, f_2, \dots, f_n$ s'haurien d'anul·lar en els zeros de f_0 . Per tant, si $f_1, \dots, f_n$ no tenen cap zero en comú, f_0 no pot

tenir zeros i hauria de ser $I = \langle f_0 \rangle = H(U)$. El resultat següent ens diu que, efectivament, aquest és el cas.

Teorema 11.44. *Siguin $f_1, f_2, \dots, f_n \in H(U)$ funcions holomorfes sense cap zero en comú a U . Aleshores existeixen funcions $g_1, g_2, \dots, g_n \in H(U)$ de manera que $\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1$; és a dir, $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle = H(U)$.*

Demostració. Procedirem per inducció sobre el nombre n de funcions. El cas $n = 1$ és trivial, però necessitem el cas $n = 2$ per a poder fer la inducció.

Suposem, doncs, $f_1, f_2 \in H(U)$ de manera que f_1 i f_2 no s'anul·len simultàniament a cap punt de U . Definim les funcions

$$\varphi_1 = \frac{\bar{f}_1}{|f_1|^2 + |f_2|^2}, \quad \varphi_2 = \frac{\bar{f}_2}{|f_1|^2 + |f_2|^2},$$

que són de classe C^∞ a U perquè $|f_1|^2 + |f_2|^2 > 0$ a U i a més, compleixen la condició $f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2 = 1$. El problema consisteix a canviar φ_1, φ_2 per dues funcions holomorfes g_1, g_2 de manera que es continuï complint aquesta igualtat. Amb aquesta finalitat busquem una funció ψ , també de classe C^∞ a U , de manera que si posem

$$g_1 = \varphi_1 + \psi f_2, \quad g_2 = \varphi_2 - \psi f_1,$$

aquestes funcions g_1, g_2 serveixin per al nostre propòsit. La relació $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$ és evident que es compleix i, per tant, l'únic problema és triar ψ de manera que $g_1, g_2 \in H(U)$. Si imposem $\bar{\partial} g_1 = \bar{\partial} g_2 = 0$, resulten les equacions

$$\bar{\partial} \varphi_1 + \bar{\partial} \psi f_2 = 0, \quad \bar{\partial} \varphi_2 - \bar{\partial} \psi f_1 = 0,$$

o bé,

$$\bar{\partial} \psi = -\frac{\bar{\partial} \varphi_1}{f_2}; \quad \bar{\partial} \psi = \frac{\bar{\partial} \varphi_2}{f_1}. \quad (11.13)$$

Un càlcul senzill, a partir de la definició de φ_1 i φ_2 , dona

$$\frac{\bar{\partial} \varphi_1}{f_2} = \frac{\bar{f}'_1 \bar{f}_2 - \bar{f}_1 \bar{f}'_2}{(|f_1|^2 + |f_2|^2)^2}; \quad \frac{\bar{\partial} \varphi_2}{f_1} = \frac{\bar{f}'_2 \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \bar{f}'_1}{(|f_1|^2 + |f_2|^2)^2}$$

de manera que aquestes dues funcions són de classe C^∞ a U . A més, la relació $f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2 = 1$ fa que les dues equacions de (11.13) siguin la mateixa i cal, finalment, trobar una funció ψ que compleixi

$$\bar{\partial} \psi = -\frac{\bar{\partial} \varphi_1}{f_2} = \frac{\bar{\partial} \varphi_2}{f_1} \quad \text{a } U.$$

El teorema 10.41 ens assegura l'existència d'aquesta funció ψ , de classe C^∞ a U , i això acaba la prova en el cas $n = 2$.

Suposem ara que el teorema és cert per a $n-1$ funcions i siguin $f_1, f_2, \dots, f_n \in H(U)$ sense zeros comuns. Si $f_1, \dots, f_{n-1}$ no tenen cap zero en comú, aplicant la hipòtesi d'inducció ja hem acabat. En cas contrari, sigui $Z = \{z_k; m_k\}$ el conjunt de zeros comuns a $f_1, \dots, f_{n-1}$, on m_k és el mínim de les multiplicitats de z_k com a zero de cada f_i , $i = 1, \dots, n-1$. Pel teorema de Weierstrass, existeix una funció f que s'anul·la exactament a cada punt z_k amb multiplicitat m_k . Llavors les funcions $f_1/f, \dots, f_{n-1}/f$ són holomorfes a U sense zeros comuns. Per tant, per la hipòtesi d'inducció, podem trobar $h_1, \dots, h_{n-1} \in H(U)$ de manera que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i h_i = f.$$

Però f_n no té zeros en comú amb f (perquè no els té amb $f_1, \dots, f_{n-1}$); per tant, pel que hem provat en el cas $n = 2$ hi ha funcions $g_n, g \in H(U)$ tals que $fg + f_n g_n = 1$. És a dir,

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i (h_i g) + f_n g_n = 1,$$

i això acaba la demostració. $\square$

Corol·lari 11.45. *Tot ideal de $H(U)$ amb un nombre finit de generadors és principal i, per tant, tancat.*

Demostració. Sigui $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ amb $f_i \in H(U)$. Si les funcions $f_1, \dots, f_n$ no tenen zeros en comú, el teorema 11.44 dóna $I = H(U) = \langle 1 \rangle$. Si els generadors de I tenen zeros comuns, agafem un divisor f de $f_1, \dots, f_n$ de manera que $f_1/f, \dots, f_n/f$ no tinguin zeros en comú, com a l'última part de la prova del teorema 11.44. Llavors hi ha funcions, $g_1, \dots, g_n \in H(U)$ de manera que $\sum_{i=1}^n f_i g_i = f$; és a dir, $f \in I$ i és clar que tota funció $g = \sum_{i=1}^n f_i h_i \in I$ ha de ser divisible per f perquè g s'ha d'anul·lar en els zeros comuns de $f_1, \dots, f_n$, que són els de f . $\square$

Hem vist, doncs, que si I és un ideal amb un nombre finit de generadors, llavors $I = I(Z)$ on Z és un conjunt de zeros de U . Ara és natural preguntar-se si aquest resultat val en general, és a dir, si tot ideal I de $H(U)$ és l'ideal associat a un conjunt Z de zeros de U . Per tal que això sigui possible cal posar alguna restricció a I ; en efecte, l'ideal I ha de ser tancat perquè si els termes d'una

successió de funcions holomorfes a U , (f_n) , s'anul·len a Z i $f_n \rightarrow f$, uniformement sobre els compactes de U , llavors f també s'anul·la a Z . Veurem que la condició necessària que I sigui un ideal tancat, també és suficient per tal que I estigui determinat per un conjunt de zeros de U . Aquesta afirmació implica, en particular, que si I és un ideal tancat, llavors hi ha d'haver zeros comuns a totes les funcions de I . Dit d'una altra manera, els ideals sense zeros comuns a totes les seves funcions són els enemics del resultat anunciat. Quins són aquests ideals? Abans de formular-ho introduïm una notació que ens serà útil.

Si I és un ideal de $H(U)$, definim el conjunt $Z(I)$ de zeros de I de la manera següent: $Z(I) = \{z_n; m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, on $\{z_n\} = \bigcap_{f \in I} Z(f)$, és el conjunt discret i tancat de U format pels punts en els quals s'anul·len totes les funcions de I i per a cada z_n , és $m_n = \inf\{m(f, z_n): f \in I\}$. És clar que admetem la possibilitat $Z(I) = \emptyset$, és a dir, que les funcions de I no s'anul·lin, simultàniament, a cap punt de U .

Proposició 11.46. *Si I és un ideal de $H(U)$ tal que $Z(I) = \emptyset$, aleshores I és dens a $H(U)$.*

Demostració. Per a veure que I és dens n'hi ha prou de provar que donats una funció $f \in H(U)$, un compacte $K \subset U$ i un número $\varepsilon > 0$ existeix una funció $h \in I$ de manera que $\sup\{|f(z) - h(z)|: z \in K\} < \varepsilon$ (vegeu l'apartat 9.1.3). Podem suposar que cap component connexa de $U \setminus K$ és relativament compacta a U (si hi hagués components amb aquesta propietat les afegiríem a K i passariem a un compacte més gros). Com que $Z(I) = \emptyset$, hom té

$$Z(I) \cap K = \bigcap_{f \in I} (Z(f) \cap K) = \emptyset,$$

i per ser K compacte i, per tant, també $Z(f) \cap K$, deduïm que hi ha d'haver un nombre finit de funcions $f_1, f_2, \dots, f_n \in I$ de manera que $\bigcap_{i=1}^n Z(f_i) \cap K = \emptyset$. És a dir, podem trobar un obert $V \subset U$, amb $K \subset V$ i $f_1, f_2, \dots, f_n$ sense zeros en comú a V . Ara podem aplicar el teorema 11.44 i concloure que existeixen funcions $g_1, g_2, \dots, g_n \in H(V)$ amb $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1$, a V (si V no fos connex, aplicariem el teorema a cada component connexa de V). Finalment, una versió del teorema de Runge (teorema 10.7) ens permet aproximar cada funció $g_i \in H(V)$ per una funció $h_i \in H(U)$ uniformement sobre K . Així doncs, la funció $h = \sum_{i=1}^n f_i \cdot h_i$ compleix la condició requerida si les h_i són prou properes a les funcions g_i . □

Corol·lari 11.47. Si I és un ideal propi i tancat de $H(U)$, aleshores és $Z(I) \neq \emptyset$.

Exemple 11.48. Ara podem veure com pot ser un ideal dens de $H(U)$. Agafem una successió de punts (z_n) continguda a U de manera que convergeixi cap a un punt de la frontera de U . Si definim I per

$$I = \{f \in H(U) : \text{existeix } n_0(f) \text{ tal que } f(z_n) = 0 \text{ si } n \geq n_0(f)\},$$

llavors I és un ideal amb $Z(I) = \emptyset$ i, per tant, és dens. $\square$

Finalment, podem provar que els ideals tancats de $H(U)$ també estan associats al seu conjunt de zeros.

Teorema 11.49. Sigui I un ideal tancat de $H(U)$. Aleshores hom té $I = I(Z(I))$. En particular, I és un ideal principal.

Demostració. És clar que $I \subseteq I(Z(I))$. Per al recíproc sigui f un generador de l'ideal principal $I(Z(I))$ i posem $I_1 = \{g \in H(U) : fg \in I\}$. És clar que I_1 és un ideal i que $I \subseteq I_1$. Per tant, $Z(I) \supseteq Z(I_1)$, però ara veurem que $Z(I_1) = \emptyset$. En efecte, si $z_0 \in Z(I)$, hi ha una funció $f_0 \in I$ tal que z_0 és un zero de f_0 amb la mateixa multiplicitat que ho és de la funció f . Per tant, z_0 no és un zero de la funció holomorfa $g = \frac{f_0}{f}$ i $g \in I_1$; és a dir, $z_0 \notin Z(I_1)$. Per la proposició 11.46, I_1 és un ideal dens a $H(U)$. Si $T_f : H(U) \rightarrow H(U)$ és l'operador definit per $T_f(h) = fh$, $h \in H(U)$, hom té

$$I(Z(I)) = T_f(H(U)) = T_f(\bar{I}_1) \subseteq \overline{T_f(I_1)} \subset \bar{I} = I,$$

de manera que $I = I(Z(I)) = \langle f \rangle$. $\square$

Així doncs, la proposició 11.43 es pot reformular en els mateixos termes, però substituint ideals principals per ideals tancats.

En tot anell és interessant de conèixer també els ideals maximals. En el cas de l'anell $H(U)$ és fàcil ara determinar els ideals maximals que són tancats. Observem que, com que $H(U)$ té ideals densos, també ha de tenir ideals maximals densos. Ara bé, si $M \subset H(U)$ és un ideal maximal i tancat, d'una banda ha de ser $Z(M) \neq \emptyset$, per la proposició 11.46, però $Z(M)$ ha de consistir en un punt únic de multiplicitat 1, és a dir, $Z(M) = \{z_0; 1\}$, perquè en cas contrari M no seria maximal. Així doncs, M està generat per la funció $z - z_0$ i hom té

$$M = \{h(z)(z - z_0) : h \in H(U)\}, \quad z_0 \in U.$$

També és evident que tot ideal d'aquest tipus és maximal i tancat i, per tant, aquests ideals estan en correspondència bijectiva amb els punts de U .

11.9 Exercicis

1. Sigui f una funció holomorfa en un entorn del disc $\overline{D}(0, R)$ que té els zeros $z_1, z_2, \dots, z_N$ a $D(0, R)$. Proveu la desigualtat

$$|f(z)| \leq R^N \left| \frac{z - z_1}{R^2 - \bar{z}_1 z} \right| \cdots \left| \frac{z - z_N}{R^2 - \bar{z}_N z} \right| \cdot \sup\{|f(z)| : |z| = R\} \text{ si } |z| < R,$$

que millora el corol·lari 4.35 en el cas $U = D(0, R)$.

2. Posem $P_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 - \frac{z}{k^2})$, $n \in \mathbb{N}$ i siguin $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$ amb $\sum_1^\infty |a_n| < +\infty$.

a) Proveu que el producte infinit $\prod_{k=1}^\infty (1 - \frac{z}{k^2})$ i la sèrie $f(z) = \sum_{k=1}^\infty a_k P_k(z)$ convergeixen uniformement sobre els compactes de $\mathbb{C}$.

b) Calculeu $\int_\gamma \frac{zf(z^2)}{P_n(z^2)} dz$ si $\gamma = C(0, n+1/2)$ per a $n = 1, 2, \dots$

3. Definim al disc unitat $\mathbb{D}$ la successió de funcions holomorfes

$$f_1(z) = \frac{z(1-2z)}{2-z}, \quad f_{n+1} = f_1 \circ f_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Proveu que el producte infinit $\prod_{n=2}^\infty \frac{2f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$ i la successió $(2^n f_n(z))$, convergeixen uniformement sobre els compactes de $\mathbb{D}$ i calculeu $f(0)$ i $f'(0)$ si $f(z) = \lim_n 2^n f_n(z)$.

Indicació: Proveu les desigualtats $|f_n(z)| \leq |z| \left(\frac{1+2|z|}{2+|z|} \right)^n$, $z \in \mathbb{D}$, $n \geq 1$.

4. Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Proveu que la funció

$$\theta(z) = \prod_{n=1}^\infty (1 + a^{2n-1} e^z)(1 + a^{2n-1} e^{-z})$$

és entera i determineu-ne els zeros. Proveu també que compleix l'equació

$$\theta(z) = a e^z \theta(z + 2 \operatorname{Log} a), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Indicació: Proveu que la funció $\frac{e^{-z} \theta(z)}{\theta(z + 2 \operatorname{Log} a)}$ té dos períodes linealment independents.

5. Sigui f una funció entera que té l'expressió donada pel teorema 11.10 amb $p_n = p \leq 1$, per a tot n , i g un polinomi de grau més petit o igual que 1. Suposem que $f(z)$ és real quan z és real i que els zeros de f són tots reals. Proveu que f' també té tots els seus zeros reals i que entre cada dos zeros consecutius de f hi ha exactament un zero de f' .

Indicació: Proveu que la derivada logarítmica de f té part imaginària diferent de zero fora de l'eix real.

6. Proveu les fórmules següents per a la derivada de la derivada logarítmica de la funció Γ :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{1}{2z^2} + \int_0^{\infty} \coth \pi t \frac{2zt}{(z^2 + t^2)^2} dt.$$

Indicació: Integreu la funció $w \rightarrow \frac{\pi \cot \pi w}{(z+w)^2}$ sobre la vora del rectangle que té els costats verticals sobre $\operatorname{Re} w = 0$ i $\operatorname{Re} w = n + 1/2$ i els horitzontals sobre $\operatorname{Im} w = \pm M$ i després feu $M, n \rightarrow +\infty$.

7. Proveu la fórmula de Legendre

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/2).$$

8. Demostreu el resultat sobre interpolació dels valors d'una funció entera i les seves derivades de la pàgina 526 fent servir el teorema de Weierstrass (teorema 11.8) i el teorema de Mittag-Leffler (teorema 10.9).
9. Sigui U un domini acotat de $\mathbb{C}$ i $A \subset \partial U$ un conjunt numerable de punts dens a ∂U . Sigui $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió que contingui cada punt de A infinites vegades. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ triem un punt $z_n \in U$ de manera que $\sum_n |z_n - w_n| < +\infty$. Proveu que, aleshores, el producte infinit

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_n}{z - w_n}$$

convergeix uniformement sobre els compactes de U i representa una funció F holomorfa a U que no es pot prolongar analíticament a cap entorn de cap punt de ∂U .

10. Sigui f una funció entera, $\{z_n; m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el seu conjunt de zeros i $M(r) = \sup\{|f(z)|: |z| = r\}$, $r > 0$. Si per a $\lambda > 0$ es compleix $\int_1^\infty \frac{\text{Log } M(r)}{r^{\lambda+1}} dr < +\infty$, proveu que la sèrie $\sum_n m_n |z_n|^{-\lambda}$ és convergent.
11. Sigui f holomorfa al disc unitat $\mathbb{D}$ complint

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log}^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = M < +\infty.$$

Proveu que es compleix la desigualtat

$$|f(z)| \leq \exp \left(M \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Proveu que si f és holomorfa a $\mathbb{D}$ i $|f(z)| \geq 1$ per a $z \in \mathbb{D}$, llavors és

$$|f(z)| \leq |f(0)|^{2/(1-|z|)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

12. Deduïu del teorema de Mittag-Leffler (teorema 10.9) el teorema de Weierstrass:

Si $z_n \in \mathbb{C}$, $(z_n) \rightarrow \infty$ i $m_n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots$ llavors existeix una funció entera que s'anul·la exactament en els punts z_n amb multiplicitats m_n , per a $n = 1, 2, \dots$

Indicació: Considereu una funció h meromorfa amb un pol simple a cada z_n amb residu m_n i després agafeu f amb $f'/f = h$.

13. Si B és un producte de Blaschke, proveu que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Log} |B(re^{i\theta})| d\theta = 0.$$

14. Determineu totes les funcions enteres f que compleixen $|f(z)| = 1$ quan $|z| = 1$.

15. Proveu que l'ordre ρ d'una funció entera té les propietats següents:

- i) Si $\rho(f_1) < \rho(f_2)$, llavors $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_2)$.
- ii) $\rho(f_1 f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.

- iii) Si $\rho(f) = \rho$ i P és un polinomi, llavors $\rho(fP) = \rho$. Si f/P és entera, llavors $\rho(f/P) = \rho$.
- iv) $\rho(f) = \rho(f')$.
16. Si f_1, f_2 són funcions enteres i f_1/f_2 també ho és, proveu que $\rho(f_1/f_2) \leq \max\{\rho(f_1), \rho(f_2)\}$.
17. Sigui $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ una funció entera d'ordre ρ . Proveu la fórmula

$$\frac{1}{\rho} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } 1/|c_n|}{n \text{Log } n}.$$

Indicació:

- i) La desigualtat $\sqrt[n]{|c_n|} \leq n^{-\alpha}$ per a $n \geq n_0$ implica $\rho \leq 1/\alpha$.
- ii) La desigualtat $M(r) \leq e^{r^\alpha}$ per a $r \geq r_0$ implica $\sqrt[n]{|c_n|} \leq c n^{-1/\alpha}$ si $n \geq n_0$, c constant.
18. Sigui f una funció entera d'ordre ρ on ρ és un número fraccionari. Proveu:
- a) L'exponent de convergència dels zeros de f és igual a ρ .
- b) La funció f pren tots els valors complexos infinites vegades.
19. Sigui U un domini simplement connex, $f \in H(U)$ i $n \in \mathbb{N}$. Proveu que f té una arrel n -èsima holomorfa a U si i només si la multiplicitat de cada zero de f a U és divisible per n .
20. Sigui U un domini del pla, $f_1, f_2, \dots, f_n \in H(U)$ i $\varphi = \text{mcd}(f_1, \dots, f_n)$. Proveu que existeix una unitat u de l'anell $H(U)$ i funcions $g_2, \dots, g_n \in H(U)$ de manera que

$$u\varphi = f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n.$$

La transformació de Fourier complexa

La transformació de Fourier en el camp real permet expressar, sota condicions adequades, qualsevol funció com una combinació infinita, una integral de fet, d'oscil·lacions que tenen una freqüència que varia d'acord amb un paràmetre real, cadascuna d'elles afectada per una determinada amplitud. En aquest capítol estudiem l'extensió de la transformació de Fourier al camp complex, obtinguda per substitució de les freqüències reals per un paràmetre complex.

La transformació de Fourier complexa permet identificar alguns subespais de $L^2(\mathbb{R})$ amb espais de funcions enteres definits per condicions de creixement. L'enunciat precís està donat pels teoremes de Paley-Wiener. Un cas important és el de les funcions de banda limitada, les quals, d'acord amb el teorema de Shannon-Whittaker, queden determinades per les seves mostres en un conjunt discret de punts. Aquest fet té molt d'interès en la teoria de la transmissió del senyal.

Estudiem també detalladament la transformada de Laplace que és una transformació de Fourier complexa definida sobre les anomenades funcions causals. Les propietats d'aquesta transformació la fan molt útil en diverses aplicacions i en donem una de les més típiques, que fa referència a la solució d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants.

Acabem el capítol considerant alguns anàlegs discrets de la transformació de Laplace, com ara les sèries de Dirichlet, que són importants en la teoria de números, o la Z -transformada, que té aplicació a l'estudi de les equacions en diferències finites.

12.1 L'extensió complexa de la transformada de Fourier. Primer teorema de Paley-Wiener

Sigui E un subconjunt mesurable de $\mathbb{R}$ i f una funció mesurable definida sobre E amb valors reals o complexos. Com és habitual, posarem

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)| dx; \quad \|f\|_2 = \left[\int_E |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

i

$$L^1(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} : f \text{ és mesurable i } \|f\|_1 < +\infty\}$$

$$L^2(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} : f \text{ és mesurable i } \|f\|_2 < +\infty\}.$$

L'espai $L^1(E)$ amb $\|\cdot\|_1$ i l'espai $L^2(E)$ amb $\|\cdot\|_2$ són espais de Banach. Habitualment ens interessarà el cas que E sigui tota la recta, o una semirecta o bé un interval.

La transformada de Fourier, $\widehat{f}$, d'una funció f de l'espai $L^1(\mathbb{R})$ es defineix mitjançant la fórmula:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La funció $\widehat{f}$ és contínua a $\mathbb{R}$ i nul·la a l'infinit, però no és necessàriament integrable. Si $\widehat{f}$ és integrable a $\mathbb{R}$, aleshores val la fórmula d'inversió:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi, \quad \text{per a gairebé tot } t \in \mathbb{R}. \quad (12.1)$$

La fórmula d'inversió és vàlida també sota altres hipòtesis.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, hom té $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i es compleix la *identitat de Parseval*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (12.2)$$

Aquest fet permet definir la transformada de Fourier d'una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la manera següent:

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{+h} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

on el límit es pren a $L^2(\mathbb{R})$. En efecte, la darrera integral és $\widehat{f}_h(\xi)$ amb $f_h(t) = f(t)\mathbf{1}_{(-h, +h)}(t)$ i hom té

$$\|\widehat{f}_h - \widehat{f}_k\|^2 = \|f_h - f_k\|_2^2 = \int_{h < |t| < k} |f(t)|^2 dt \xrightarrow{h, k \rightarrow +\infty} 0.$$

De fet, també es compleix la igualtat puntual

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{+h} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \quad \text{per a gairebé tot } \xi \in \mathbb{R},$$

si bé aquest resultat és molt més profund i difícil de provar (teorema de Carleson).

Amb la definició que hem donat de $\widehat{f}$ per a $f \in L^2(\mathbb{R})$, la relació (12.2) és certa per a tota funció $f \in L^2(\mathbb{R})$. La mateixa igualtat també és vàlida si substituïm $\widehat{f}$ per la funció $\check{f}$ definida, quan $f \in L^2(\mathbb{R})$, per:

$$\check{f}(t) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{+h} f(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi$$

amb el límit pres també a $L^2(\mathbb{R})$.

Les transformacions $f \rightarrow \widehat{f}$ i $f \rightarrow \check{f}$ són inverses l'una de l'altra en un subespai dens de $L^2(\mathbb{R})$ (per la fórmula d'inversió) i es conclou que la transformació de Fourier és una isometria de $L^2(\mathbb{R})$ sobre $L^2(\mathbb{R})$ (teorema de Parseval).

Ens interessarà considerar la complexificació de la transformació de Fourier o *transformació de Fourier complexa*, que consisteix en la substitució formal del paràmetre de freqüència real ξ per una *freqüència complexa* z . Així posarem

$$\widehat{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t z} dt \quad (12.3)$$

sempre que aquesta integral tingui sentit. En aquest cas, la funció $\widehat{f}(\xi)$ tindrà, doncs, una *extensió complexa*.

Definició 12.1. Per a $a > 0$, designarem per $H^2(B_a)$ l'espai de les funcions F holomorfes a la banda $B_a = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a\}$, que compleixen

$$\|F\|_2^2 = \sup_{|y| < a} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx < +\infty,$$

i per L_a^2 el subespai de $L^2(\mathbb{R})$, que consisteix en les funcions $f \in L^2(\mathbb{R})$, que compleixen

$$\|f\|_{2,a}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi a |t|} dt < +\infty.$$

Teorema 12.2 (Primer teorema de Paley-Wiener). *La transformació de Fourier complexa donada per (12.3) estableix, per a cada $a > 0$, un isomorfisme topològic entre els espais L_a^2 i $H^2(B_a)$; és a dir, $f \mapsto \hat{f} = F$ és un isomorfisme lineal que compleix $m \|f\|_{2,a} \leq \|F\|_2 \leq M \|f\|_{2,a}$, amb constants m, M que no depenen de a .*

Demostració. Si posem $z = x + iy$, hom té per a $|y| < a$

$$\begin{aligned} |\hat{f}(z)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| e^{2\pi ty} \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi a|t|} dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4\pi (ty-a|t|)} dt \right)^{1/2} < +\infty, \end{aligned} \quad (12.4)$$

si $f \in L_a^2$.

Amb això veiem que $F(z) = \hat{f}(z)$ està ben definida si $|y| < a$. A més, si $|y| \leq b < a$, és

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, |y| \leq b} |f(t) e^{-2\pi itz}| \leq |f(t)| e^{2\pi tb}$$

i la funció de la dreta és integrable per (12.4). La mateixa desigualtat (12.4) garanteix que la integral que defineix $f(z)$ és contínua respecte de z , pel teorema de continuïtat d'una integral respecte d'un paràmetre i, per tant, la funció F és contínua a B_a ; utilitzant el teorema de Morera i el teorema de Fubini, resulta que F és holomorfa a B_a . Fixem-nos que $f \in L_a^2$ implica $f \in L^1(\mathbb{R})$, així que ara hem vist no solament que $\hat{f}$ és contínua, sinó que té una extensió holomorfa a B_a . Si escrivim

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi itz} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi ty} e^{-2\pi itx} dt,$$

veiem que fixat y , amb $|y| < a$, la funció $x \mapsto F(x + iy)$ és la transformada de Fourier de $f(t) e^{2\pi ty} \stackrel{\text{def}}{=} f_y(t)$ i $f_y \in L^2(\mathbb{R})$ perquè $f \in L_a^2$. Pel teorema de Parseval, hom té

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi ty} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi a|t|} dt,$$

desigualtat que dóna $\|F\|_2 \leq \|f\|_{2,a}$ i $F \in H^2(B_a)$.

Recíprocament, sigui $F \in H^2(B_a)$ i posem $F_y(x) = F(x + iy)$. Ja sabem que $F(x) = \hat{f}(x)$ amb

$$f(t) = \lim_h \int_{-h}^{+h} F(x) e^{2\pi itx} dx \quad \text{a } L^2(\mathbb{R}).$$

Fixem y , amb $|y| < a$, i sigui Q el rectangle de vèrtexs $\pm h, \pm h + iy$. Pel teorema de Cauchy aplicat a la funció $F(z)e^{2\pi itz}$ i a ∂Q , resulta

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} F(x) e^{2\pi itx} dx - \int_{-h}^{+h} F(x + iy) e^{2\pi it(x+iy)} dx = \\ = \int_0^y F(h + is) e^{2\pi it(h+is)} i ds - \int_0^y F(-h + is) e^{2\pi it(-h+is)} i ds = 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Ara veurem que hi ha una successió de números $h_j \nearrow +\infty$ de manera que les dues darreres integrals de (12.5), quan $h = h_j$ i $j \rightarrow \infty$, tendeixen a zero per a tot valor $t \in \mathbb{R}$. Per exemple, la primera està acotada per

$$\int_0^y |F(h + is)| e^{-2\pi ts} ds \leq \left(\int_0^y |F(h + is)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^y e^{-2\pi ts} ds \right)$$

i és suficient veure que hi ha valors $h_j \nearrow +\infty$ tals que

$$\int_0^y |F(\pm h_j + is)|^2 ds \longrightarrow 0, \quad \text{si } j \rightarrow \infty.$$

Si posem $\varphi(h) = \int_0^y |F(h + is)|^2 ds$, la hipòtesi $F \in H^2(B_a)$ i el teorema de Fubini donen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(h) dh = \int_0^y \int_{-\infty}^{+\infty} |F(h + is)|^2 ds dh \leq y \|F\|_2^2.$$

Per tant, la funció $\varphi(h) + \varphi(-h)$ és integrable i, en conseqüència,

$$\int_j^{j+1} (\varphi(h) + \varphi(-h)) dh \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Atès que φ és contínua, aquesta darrera integral coincideix amb $\varphi(h_j) + \varphi(-h_j)$ per a alguns valors h_j , $j \leq h_j \leq j + 1$. Com que

$$f(t) = \lim_j \int_{-h_j}^{+h_j} F(x) e^{2\pi itx} dx \quad \text{a } L^2(\mathbb{R}),$$

existeix una successió (h_{jk}) parcial de la (h_j) que dóna convergència puntual g. p. t. en la igualtat anterior. Per tant, per (12.1)

$$f(t) = \lim_k \int_{-h_{jk}}^{+h_{jk}} F(x + iy) e^{2\pi it(x+iy)} dx \quad \text{g. p. t. } t \in \mathbb{R}.$$

Això significa que per a la funció f , transformada inversa de Fourier de F , val la igualtat

$$f(t) = e^{-2\pi ty} \lim_k \int_{-h_{jk}}^{+h_{jk}} F(x + iy) e^{2\pi itx} dx.$$

La funció $e^{2\pi ty} f(t)$ és, per tant, la transformada inversa de $x \mapsto F(x + iy)$, i el teorema de Parseval implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4\pi ty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx \leq \|F\|_2^2.$$

Si fem ara $y \rightarrow a$, obtenim

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi ta} dt \leq \|F\|_2^2,$$

i si fem $y \rightarrow -a$, obtenim

$$\int_{-\infty}^0 |f(t)|^2 e^{4\pi a|t|} dt + \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt \leq \|F\|_2^2. \quad \square$$

L'exemple més senzill d'un parell de funcions f, F que estiguin en les condicions del teorema 12.2 és quan $f(t) = e^{-2\pi|t|}$; en aquest cas, hom té

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + z^2},$$

que restringida a $\mathbb{R}$ és el nucli de Poisson.

12.2 La fórmula de Poisson

Un dels resultats més importants en anàlisi harmònica és la fórmula de Poisson, que estableix la validesa de la igualtat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n), \quad (12.6)$$

sota determinades condicions sobre la funció f i la seva transformada de Fourier $\hat{f}$, les quals han de garantir, en particular, que els dos membres de l'equació estiguin ben definits. En aquest apartat provarem aquesta fórmula, amb mètodes de variable complexa, quan f i $\hat{f} = F$ compleixen alguna hipòtesi addicional. Concretament suposarem que $F \in H^2(B_a)$ i que es compleix

$$\sup_{|y| < a} |F(x + iy)| \leq \varphi(x) \quad (12.7)$$

amb $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ i $\varphi(x) \rightarrow 0$ quan $|x| \rightarrow +\infty$. Llavors F és integrable a $\mathbb{R}$ i

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{2\pi itx} dx, \quad (12.8)$$

és una funció contínua.

Teorema 12.3. Si $F \in H^2(B_a)$ satisfà (12.7) amb $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ i $\varphi(x) \rightarrow 0$ quan $|x| \rightarrow +\infty$, aleshores la funció f definida per (12.8) compleix

$$|f(t)| = O\left(e^{-2\pi b|t|}\right) \quad \text{per a tot } b < a.$$

A més, hom té

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi itz} dt, \quad \text{per a } |\operatorname{Im} z| < a$$

i

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} F(n).$$

Demostració. En primer lloc, veurem, com en el teorema 12.2, que la funció f està donada per

$$f(t) = e^{-2\pi ty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy) e^{2\pi itx} dx, \quad |y| < a \quad (12.9)$$

(la hipòtesi (12.7) implica que $x \mapsto F(x + iy)$ és integrable per a cada y). Amb les mateixes notacions del teorema 12.2, és suficient provar que la integral

$$\int_I |F(h + is)| e^{-2\pi ts} ds$$

tendeix a zero quan $h \rightarrow +\infty$, per a cada valor de t , on I és l'interval $[0, y]$ o $[y, 0]$, la qual cosa és clara perquè està dominada per $\varphi(h) \int_I e^{-2\pi ts} ds$. Si $b < a$ i prenem $y = b$ quan $t > 0$ o bé $y = -b$ quan $t < 0$ a (12.9) obtenim $|f(t)| = O(e^{-2\pi b|t|})$. Amb això $f \in L^1(\mathbb{R})$ i la fórmula d'inversió ens diu aleshores que $F(x) = \widehat{f}(x)$; però volem donar una prova d'aquest fet utilitzant arguments de variable complexa. Es tracta de comprovar la igualtat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi itx} dt = F(x).$$

Per a $t \geq 0$ utilitzem (12.9) amb $y = b > 0$, $b < a$. Tenim

$$\int_0^\infty f(t) e^{-2\pi i t x} dt = \int_0^\infty e^{-2\pi i t b} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} F(s + ib) e^{2\pi i t s} ds \right\} e^{-2\pi i t x} dt,$$

que, pel teorema de Fubini, coincideix amb

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s + ib) \left\{ \int_0^\infty e^{-2\pi i t(x-s-ib)} dt \right\} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(s + ib)}{s + ib - x} ds.$$

Anàlogament, per a $t \leq 0$ utilitzem (12.9) amb $y = -b$ i trobem

$$\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-2\pi i t x} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(s - ib)}{s - ib - x} ds.$$

Considerem el rectangle Q_h de vèrtexs $\pm h \pm ib$. Per la fórmula integral de Cauchy, és

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_h} \frac{F(z)}{z - x} dz, \quad \text{si } |x| < h.$$

És senzill veure, utilitzant (12.7), que les integrals sobre els dos costats verticals de Q_h tendeixen a zero quan $h \rightarrow +\infty$, de manera que

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(s - ib)}{s - ib - x} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(s + ib)}{s + ib - x} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt.$$

Així, $\hat{f}(z)$ i $F(z)$ són dues funcions holomorfes a B_a que coincideixen quan $z = x \in \mathbb{R}$ i, pel principi de prolongació analítica, ha de ser $\hat{f}(z) = F(z)$, $z \in B_a$.

A continuació provarem la fórmula de Poisson. Considerem $G(z) = F(z)/(e^{2\pi i z} - 1)$, que és una funció meromorfa a B_a amb pols simples en els punts enters $n \in \mathbb{Z}$ i residu $(2\pi i)^{-1} F(n)$. Apliquem el teorema dels residus a la funció G i al rectangle Q_N de vèrtexs $\pm(N + 1/2) \pm ib$, amb N enter i $b > 0$. Resulta

$$\sum_{|n| \leq N} F(n) = \int_{\partial Q_N} \frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1} dz.$$

En un segment vertical $z = \pm(N + 1/2) + is$, $-b < s < b$, l'expressió

$$e^{2\pi i z} - 1 = e^{-2\pi s} e^{\pm 2\pi i(N+1/2)} - 1 = -(1 + e^{-2\pi s})$$

té mòdul més gran que 1; la seva contribució a la integral està, per tant, controlada per $\varphi(\pm(N + 1/2))2b$ i tendeix a zero quan $N \rightarrow +\infty$. D'altra

banda, si $z = s \pm ib$, és $e^{2\pi iz} = e^{2\pi is} e^{\pm 2\pi b}$, de manera que $|e^{2\pi iz} - 1|$ està acotat inferiorment i les integrals sobre els costats horitzontals de Q_N són convergents quan $N \rightarrow +\infty$, perquè $F(s \pm ib)$ és integrable. La conclusió és que existeix el límit:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} F(n) = \int_{L_1} \frac{F(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz - \int_{L_2} \frac{F(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz,$$

on L_1, L_2 són les línies $L_1 = \{z: \operatorname{Im} z = -b\}$, $L_2 = \{z: \operatorname{Im} z = b\}$ recorregudes d'esquerra a dreta. Per a $z \in L_1$ és $z = s - ib$ i $e^{2\pi iz} = e^{2\pi b} e^{2\pi is}$ té mòdul $e^{2\pi b} \geq 1$ de manera que

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}$$

amb convergència uniforme per a $z \in L_1$. Per a $z \in L_2$ és $z = s + ib$ i $e^{2\pi iz} = e^{-2\pi b} e^{2\pi is}$ té mòdul $e^{-2\pi b} < 1$, i ara és

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz} \quad \text{uniformement per a } z \in L_2.$$

La convergència uniforme i el fet que la funció $F(s \pm ib)$ és integrable en la variable s permeten integrar terme a terme les dues sèries i trobem

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{L_1} F(z) e^{2\pi inz} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_2} F(z) e^{2\pi inz} dz,$$

que per (12.9) coincideix amb $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$. □

Cal dir que la fórmula de Poisson és certa sota hipòtesis més generals que les que hem presentat aquí (vegeu l'exercici 11 d'aquest capítol).

Observem que si la funció F satisfà la condició (12.7), llavors també satisfan la mateixa condició totes les funcions $F(x+h)$ per a h qualsevol número fixat. Si posem, com abans, $F = \hat{f}$, aleshores $F(x+h)$ és la transformada de Fourier de la funció $f(t) = e^{-2\pi i th}$. Així, hom té

$$\sum_n F(n+h) = \sum_n f(n) e^{-2\pi inh},$$

que significa que $f(-n)$ és l' n -èsim coeficient de Fourier de la funció 1-periòdica $\sum_n F(n+h)$.

Exemple 12.4. Quan F és el nucli de Poisson, $F(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2}$, tenim $f(t) = e^{-2\pi|t|}$ i resulta la fórmula

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+(n+h)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|} e^{-2\pi i n h},$$

que equival a

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+(n+h)^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi n} \cos 2\pi n h. \quad \square$$

Exemple 12.5. Si $F(z) = e^{-\pi z^2}$ és $f(x) = e^{-\pi t^2}$ i, per tant, si prenem, $F(z) = a^{-1/2} e^{-\pi \frac{z^2}{a}} e^{2\pi i b z}$ amb $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, hom té $f(t) = e^{-\pi a(t+b)^2}$ i obtenim la igualtat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi a(n+b)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^{-1/2} e^{-\pi \frac{n^2}{a}} e^{-2\pi i n b}. \quad \square$$

La funció *theta* és la funció

$$\vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

i té importància en teoria analítica de números. Quan $b = 0$, la igualtat de l'exemple 12.5 dóna la relació funcional

$$\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta(1/t), \quad t > 0.$$

12.3 Les funcions de banda limitada. Segon teorema de Paley-Wiener

Si la funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ té suport compacte, és clar que la transformació de Fourier complexa

$$\widehat{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t z} dt$$

està definida per a tot $z \in \mathbb{C}$ i és una funció entera. Més generalment, $\widehat{f}(z)$ és una funció entera sempre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| e^{2\pi t y} dt < +\infty, \quad \text{per a tot } y \in \mathbb{R}.$$

En aquesta secció volem estudiar com són les funcions $\hat{f}$ que s'obtenen quan $f \in L^2(\mathbb{R})$ té suport compacte. Observem que si $F(x) = \hat{f}(x)$, aleshores $\hat{F}(x) = f(-x)$ i podem posar la definició següent.

Definició 12.6. Direm que una funció $F \in L^2(\mathbb{R})$ és de banda limitada si $\hat{F}$ té suport compacte.

Per l'observació anterior, sabem que tota funció $F \in L^2(\mathbb{R})$ de banda limitada té una extensió entera. Sigui I el més petit interval que conté el suport de $\hat{F}$; si 2τ designa la longitud de I , alguna traslladada de $\hat{F}$ té suport contingut a $(-\tau, \tau)$, la qual cosa significa que per a algun $a \in \mathbb{R}$, la funció $e^{2\pi i a x} F(x)$ és de la forma

$$e^{2\pi i a x} F(x) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t) e^{-2\pi i x t} dt,$$

amb $f \in L^2(-\tau, \tau)$. Sense pèrdua de generalitat, suposarem $a = 0$. El primer que farem és caracteritzar les funcions enteres F de la forma

$$F(z) = \int_{-\tau}^{+\tau} f(t) e^{-2\pi i t z} dt, \quad f \in L^2(-\tau, \tau), \quad \tau > 0. \quad (12.10)$$

Teorema 12.7 (Segon teorema de Paley-Wiener). Una funció entera F és de la forma (12.10) si i només si compleix

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx \leq C e^{4\pi\tau|y|}, \quad y \in \mathbb{R} \quad (12.11)$$

amb C constant.

Demostració. Si F està donada per (12.10), $x \mapsto F(x + iy)$ és la transformada de Fourier de $f(t) e^{2\pi t y}$ i el teorema de Parseval dóna

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx = \int_{-\tau}^{+\tau} |f(t)|^2 e^{4\pi t y} dt \leq e^{4\pi\tau|y|} \int_{-\tau}^{+\tau} |f(t)|^2 dt.$$

Recíprocament, si F és entera i satisfà (12.11), aleshores $F \in H^2(B_a)$ per a tot $a > 0$, i segons el teorema 12.2 hom té $F = \hat{f}$ amb

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi a|t|} dt \leq \frac{1}{m} \sup_{|y| < a} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx \leq C e^{4\pi a\tau},$$

amb m constant. Així,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{4\pi a(|t| - \tau)} dt \leq C$$

per a tot $a > 0$. Fent $a \nearrow +\infty$, es veu que aquesta desigualtat implica $f(t) = 0$ g. p. t. si $|t| > \tau$. Així, $F = \hat{f}$ amb $f \in L^2(-\tau, \tau)$. $\square$

L'objectiu que tenim ara és descriure l'espai de les funcions enteres que compleixen la condició (12.11) d'una manera alternativa, més usual.

Definició 12.8. Per a $\tau > 0$, l'espai de Paley-Wiener PW_τ està format per les funcions enteres F que compleixen

$$|F(z)| = O(e^{2\pi\tau|z|}) \quad i \quad \|F\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 dx < +\infty.$$

Veurem que aquest espai coincideix amb l'espai descrit per la condició (12.11). Necessitarem un resultat de Phragmen-Lindelöf relacionat amb el principi del mòdul màxim que exposem a continuació.

Teorema 12.9 (Phragmen-Lindelöf). *Si F una funció holomorfa en un sector S_α d'obertura angular π/α , amb $\alpha > 0$, i contínua a $\bar{S}_\alpha$. Suposem que es compleix*

$$|F(z)| = O(\exp|z|^\beta), \quad z \in S_\alpha \text{ amb } \beta < \alpha$$

i $|F(z)| \leq M$, per a una constant $M > 0$, si $z \in \partial S_\alpha$. Aleshores hom té $|F(z)| \leq M$ per a tot $z \in \bar{S}_\alpha$.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, suposem que S_α és el sector $\{z: |\arg z| < \pi/2\alpha\}$. Prenem $\beta < \gamma < \alpha$ i amb la determinació principal de z^γ considerem la funció $g(z) = F(z) \exp(-\varepsilon z^\gamma)$ amb $\varepsilon > 0$. Si $z = r e^{i\theta}$, llavors $|g(z)| = |F(z)| \exp(-\varepsilon r^\gamma \cos \gamma\theta)$; d'altra banda, si $|\theta| \leq \pi/2\alpha$, hom té $|\gamma\theta| < \pi/2$ i existeix $\delta > 0$ tal que $\cos \gamma\theta > \delta$; per tant,

$$|g(z)| \leq C \exp(r^\beta - \delta \varepsilon r^\gamma),$$

que tendeix a zero quan $|z| \rightarrow +\infty$. Això implica que $|g(z)|$ té un màxim absolut, que pel principi del màxim s'ha d'agafar a la frontera de S_α . Però per a $z \in \partial S_\alpha$ és

$$|g(z)| = |F(z)| \exp\left(-\varepsilon r^\gamma \cos \gamma \frac{\pi}{2\alpha}\right) \leq |F(z)| \leq M.$$

En conclusió, $|g(z)| \leq M$ si $z \in S_\alpha$, i fent $\varepsilon \rightarrow 0$ veiem que $|F(z)| \leq M$. $\square$

Corol·lari 12.10. *a) Si F és una funció entera i hi ha constants C, M tals que $|F(z)| \leq C e^{\tau|z|}$ per a $z \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$ i $|F(x)| \leq M$ per a $x \in \mathbb{R}$, aleshores hom té $|F(x + iy)| \leq M e^{\tau|y|}$, per a $x, y \in \mathbb{R}$.*

b) Si F és una funció entera i hi ha constants C, M tals que $|F(z)| \leq C e^{\tau|z|}$ per a $z \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$ i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p dx \leq M^p, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

aleshores hom té

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^p dx \leq M^p e^{\tau p|y|} \quad \text{per a } x, y \in \mathbb{R}.$$

Demostració. Per a la part a) suposem $y > 0$; sigui $g(z) = F(z) e^{i(\tau + \varepsilon)z}$, $\varepsilon > 0$, de manera que $|g(x)| = |F(x)| \leq M$ i $|g(iy)| = |F(iy)| \exp(-(\tau + \varepsilon)y) \leq C \exp(-\varepsilon y) \rightarrow 0$ quan $y \nearrow +\infty$. Si apliquem el teorema de Phragmén-Lindelöf separatament, al primer i al segon quadrants obtenim $|g(z)| \leq M$ si $y = \operatorname{Im} z > 0$, és a dir,

$$|F(z)| \leq M \exp((\tau + \varepsilon)y).$$

Fent $\varepsilon \rightarrow 0$ acabem la prova de a) si $y > 0$, i si $y < 0$, es raona anàlogament.

Per a b) cal provar que si φ és una funció de l'espai $C_c(\mathbb{R})$ amb

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^q dx = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

hom té

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)| \varphi(x) dx \right| \leq M e^{\tau|y|}.$$

Si considerem la funció entera

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z + t) \varphi(t) dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

cal provar la desigualtat $|G(iy)| \leq M e^{\tau|y|}$. Ara bé,

$$|G(z)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |F(z + t)| |\varphi(t)| dt \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau(|z| + |t|)} |\varphi(t)| dt \leq C' e^{\tau|z|}, \quad C' \text{ constant},$$

i, per la desigualtat de Hölder,

$$\begin{aligned} |G(z)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + t)|^p dt \right)^{1/p} = \|F\|_p^p \leq M. \end{aligned}$$

Per la part a), ja provada, obtenim $|G(z)| \leq M e^{\tau|y|}$ tal com volíem. $\square$

Teorema 12.11. *Per a una funció entera F i $\tau > 0$ les afirmacions següents són equivalents:*

- a) F compleix la condició (12.11).
- b) $F \in PW_\tau$.
- c) $F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ i $|F(z)| = O(e^{2\pi\tau|\operatorname{Im} z|})$.

En conseqüència, la transformació de Fourier complexa estableix una isometria entre els espais $L^2(-\tau, \tau)$ i PW_τ .

Demostració. Si F satisfà la condició (12.11), F és de la forma (12.10) i llavors $F \in L^2(\mathbb{R})$, pel teorema de Parseval, i

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \int_{-\tau}^{+\tau} |f(t)| e^{2\pi t \operatorname{Im} z} dt \leq e^{2\pi\tau|\operatorname{Im} z|} \int_{-\tau}^{+\tau} |f(t)| dt \\ &\leq (2\tau)^{1/2} \|f\|_2 e^{2\pi\tau|\operatorname{Im} z|}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Així, a) $\Rightarrow$ c). La implicació c) $\Rightarrow$ b) és trivial. Finalment, si $F \in PW_\tau$, F compleix les hipòtesis de la part b) del corollari 12.10 amb $2\pi\tau$ en lloc de τ i $p = 2$, amb la qual cosa es compleix (12.11).

La resta de l'enunciat és una conseqüència del teorema 12.7. □

L'espai PW_τ és un espai rellevant en el tractament del senyal. La raó és que les funcions de banda limitada corresponen a diversos senyals que són importants en les aplicacions de l'anàlisi de Fourier, per exemple els senyals acústics que entren en el rang de percepció de l'oïda. La representació de Fourier

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

ens diu que tot senyal d'energia finita, descrit per una funció $F \in L^2(\mathbb{R})$ és la superposició de les funcions $e^{2\pi i x \xi} = \cos 2\pi x \xi + i \sin 2\pi x \xi$ amb amplituds $\widehat{F}(\xi)$. Les funcions de banda limitada són aquelles en les quals només intervenen freqüències ξ amb $|\xi| \leq \tau$ per a un $\tau > 0$, talment com en el cas dels senyals acústics, on només són perceptibles les freqüències per sota d'un llindar determinat.

Fins aquí hem vist que tota funció de banda limitada té una extensió entera i que, multiplicada per $e^{2\pi i a z}$ per a algun $a \in \mathbb{R}$, és una funció de l'espai PW_τ . Ara analitzarem més detalladament les propietats d'aquestes funcions.

L'objectiu és el *teorema de Shannon-Whittaker*, que es la base teòrica per als processos de digitalització.

Farem servir el resultat fonamental de Fourier, que formularem amb el llenguatge dels espais de Hilbert. L'espai $L^2(-\tau, \tau)$, $\tau > 0$, és un espai de Hilbert amb el producte escalar (correlació)

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{L^2(-\tau, \tau)} = \int_{-\tau}^{+\tau} f(x) \overline{g(x)} dx$$

i norma $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$. Naturalment, $L^2(-\tau, \tau)$ s'identifica amb l'espai de les funcions definides a $\mathbb{R}$, 2τ -periòdiques i que són de quadrat integrable en un període. Les més característiques d'aquestes funcions són el cosinus i el sinus 2τ -periòdics, $\cos \frac{n\pi}{\tau} x$, $\sin \frac{n\pi}{\tau} x$, $n \in \mathbb{Z}$. El resultat de Fourier és que "tota funció 2τ -periòdica és superposició de sinus i cosinus 2τ -periòdics". Modernament utilitzem, per comoditat en la manipulació de les integrals, les exponencials complexes $e^{\frac{n\pi}{\tau} xi} = \cos \frac{n\pi}{\tau} x + i \sin \frac{n\pi}{\tau} x$ i el concepte de base ortonormal per precisar l'enunciat de Fourier. Normalitzarem les exponencials complexes per tal que tinguin norma 1 i prendrem

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{\frac{n\pi}{\tau} xi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 12.12 (Fourier). *La família de funcions $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ és una base ortonormal de l'espai $L^2(-\tau, \tau)$.*

Recordem que això significa que les funcions e_n compleixen les relacions $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ i que per a $f \in L^2(-\tau, \tau)$, hom té

$$f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n, \quad \text{a } L^2(-\tau, \tau).$$

En particular,

$$\|f\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n \right\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2,$$

que és el teorema de Parseval en el cas periòdic. Quan $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ és una base ortonormal, hom escriu simbòlicament

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

i la sèrie de la dreta s'anomena *sèrie de Fourier de f* . La prova del teorema 12.12 es pot veure a [6, pàg. 140].

Sota determinades hipòtesis de regularitat de la funció f , la convergència de la sèrie de Fourier de f cap a f té lloc respecte de normes més precises, com ara la uniforme, o bé puntualment per a tot valor de x :

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n(x).$$

El teorema de Carleson, de gran dificultat, estableix que la igualtat anterior és compleix a gairebé tot punt de $(-\tau, \tau)$ si $f \in L^2(-\tau, \tau)$. No necessitem aquí altra cosa, però, que l'enunciat de Fourier presentat en la forma del teorema 12.12. Observem que l'enunciat d'aquest teorema es pot donar també en termes de les funcions sinus i cosinus, dient que les funcions 2τ -periòdiques normalitzades

$$\frac{1}{\sqrt{2\tau}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos \frac{n\pi}{\tau} x, \quad \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sin \frac{n\pi}{\tau} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

formen una base ortonormal de $L^2(-\tau, \tau)$.

Tenint en compte les igualtats

$$\langle f, e_n \rangle e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \left(\int_{-\tau}^{\tau} f(x) e^{-\frac{n\pi}{\tau} xi} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{\frac{n\pi}{\tau} xi}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

és habitual escriure la sèrie de Fourier sota la forma

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{\frac{n\pi}{\tau} xi}$$

amb

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} f(x) e^{-\frac{n\pi}{\tau} xi} dx,$$

coeficient que s'anomena *n -èsim coeficient de Fourier de f* . El teorema de Parseval s'escriu ara:

$$\int_{-\tau}^{+\tau} |f(x)|^2 dx = \int_{-\tau}^{+\tau} \left| \sum \widehat{f}(n) e^{\frac{n\pi}{\tau} xi} \right|^2 dx = 2\tau \sum_n |\widehat{f}(n)|^2.$$

Segons el teorema 12.11, la transformació de Fourier complexa

$$f \mapsto F(z) = \int_{-\tau}^{+\tau} f(x) e^{-2\pi i x z} dx$$

és una isometria entre $L^2(-\tau, \tau)$ i PW_τ , és a dir, si $F = \widehat{f}$ i $G = \widehat{g}$ amb $f, g \in L^2(-\tau, \tau)$, llavors és

$$\int_{-\tau}^{+\tau} f(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, g \rangle_{L^2(-\tau, \tau)} = \langle F, G \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \overline{G(x)} dx.$$

Com que la família $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ és una base ortonormal de $L^2(-\tau, \tau)$, les funcions enteres $\{\widehat{e_n}, n \in \mathbb{Z}\}$ formaran una base ortonormal de PW_τ . Explicitem aquestes funcions:

$$\begin{aligned} \widehat{e_n}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{\frac{n\pi}{\tau}xi} e^{-2\pi iz} dx = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{2\pi ix(\frac{n}{2\tau} - z)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i(\frac{n}{2\tau} - z)} \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{2\pi ix(\frac{n}{2\tau} - z)} \Big|_{x=-\tau}^{x=+\tau} = \sqrt{2\tau} \frac{\sin \pi(n - 2\tau z)}{\pi(n - 2\tau z)}. \end{aligned}$$

Definició 12.13. La funció sinus cardinal és la funció entera

$$\text{sinc } z = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Així, hom té $\widehat{e_n}(z) = \sqrt{2\tau} \text{sinc}(n - 2\tau z)$. D'altra banda, si $\widehat{f} = F$, la correlació $\langle f, e_n \rangle$ s'escriu

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\tau}^{+\tau} f(x) e^{-\frac{n\pi}{\tau}xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} F\left(\frac{n}{2\tau}\right) = \langle F, \widehat{e_n} \rangle.$$

Així doncs, per a tota funció $F \in PW_\tau$ és

$$F(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} F\left(\frac{n}{2\tau}\right) \text{sinc}(n - 2\tau z) \quad \text{a } L^2(\mathbb{R}).$$

Ara bé, la desigualtat (12.12) té com a conseqüència que la convergència a $L^2(\mathbb{R})$ implica la convergència uniforme a cada banda horitzontal i tenim que si $F \in PW_\tau$, val la igualtat

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n}{2\tau}\right) \text{sinc}(n - 2\tau z)$$

uniformement a cada banda horitzontal $\{z: |\text{Im } z| < a\}$, $a > 0$. El teorema de Parseval pren la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 dx = \sum_n |\langle F, \widehat{e_n} \rangle|^2 = \frac{1}{2\tau} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\frac{n}{2\tau}\right) \right|^2.$$

El fet que la família $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ sigui una base ortonormal de $L^2(-\tau, \tau)$ també significa que $f = \sum_n \lambda_n e_n$, amb $\sum |\lambda_n|^2 < +\infty$, és l'expressió general d'una funció $f \in L^2(-\tau, \tau)$. Això vol dir que

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{sinc}(n - 2\tau z), \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$$

és l'expressió general d'una funció $F \in PW_\tau$. Resumim tots aquests fets, que, com hem vist, són traduccions de l'enunciat de Fourier, en el resultat següent, que en teoria de la informació es coneix com a teorema de Shannon-Whittaker.

Teorema 12.14 (Shannon-Whittaker). *Tota funció F de banda limitada a $(-\tau, \tau)$ (és a dir $F \in L^2(\mathbb{R})$ i $\operatorname{spt}(\hat{F}) \subset (-\tau, \tau)$) està completament determinada pels seus valors en els punts $\frac{n}{2\tau}$, $n \in \mathbb{Z}$, mitjançant la sèrie cardinal*

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\frac{n}{2\tau}\right) \operatorname{sinc}(n - 2\tau z),$$

que és uniformement convergent a tota banda horitzontal $\{z: |\operatorname{Im} z| < a\}$, $a > 0$. Els valors $F\left(\frac{n}{2\tau}\right)$ determinen F de forma estable en el sentit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left| F\left(\frac{n}{2\tau}\right) \right|^2, \quad \text{si } F \in PW_\tau.$$

Recíprocament, donada una successió de números $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ amb $\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty$, la sèrie

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n \operatorname{sinc}(n - 2\tau z)$$

defineix una funció $F \in PW_\tau$, que compleix $F(n) = \lambda_n$ per a cada $n \in \mathbb{Z}$.

En general, una successió $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de números reals s'anomena *successió de mostreig estable (sampling)* per a l'espai PW_τ si hi ha constants $m, M > 0$ tals que

$$m \|F\|_2^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |F(a_n)|^2 \leq M \|F\|_2^2, \quad \text{per a tota } F \in PW_\tau.$$

Això significa, com abans, que els valors $\{F(a_n): n \in \mathbb{Z}\}$ determinen F de forma estable. Una successió $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ s'anomena *successió d'interpolació* per a l'espai PW_τ si per a tota successió $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ amb $\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty$ hi ha una funció $F \in PW_\tau$ tal que $F(a_n) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Així, el teorema de Shannon-Wittaker afirma que la successió regularment espaiada $(a_n = \frac{n}{2\tau})_{n \in \mathbb{Z}}$ és simultàniament de mostreig estable i d'interpolació per a l'espai PW_τ . El pas $\frac{1}{2\tau}$ s'anomena *pas de Nyquist*. Es pot veure que si $\mu < \frac{1}{2\tau}$, la successió $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ amb $\mu_n = n\mu$ és de mostreig estable però no pas d'interpolació, i que si $\mu > \frac{1}{2\tau}$, és d'interpolació però no pas de mostreig estable.

Acabarem aquest apartat amb una fórmula reproductora per a les funcions de l'espai PW_τ .

Teorema 12.15. Si $F \in PW_\tau$, hom té

$$F(z) = 2\tau \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \operatorname{sinc} 2\tau(z-x) dx.$$

Demostració. Si $F = \hat{f}$, és

$$F(z) = \int_{-\tau}^{+\tau} f(x) e^{-2\pi i x z} dz = \langle f, e_z \rangle_{L^2(-\tau, \tau)},$$

on $e_z(x) = e^{2\pi i x \bar{z}}$; per tant, $F(z) = \langle F, \hat{e}_z \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Calculant $\hat{e}_z$ resulta:

$$\hat{e}_z(w) = \int_{-\tau}^{+\tau} e^{2\pi i x(\bar{z}-w)} dx = \frac{1}{2\pi i(\bar{z}-w)} e^{2\pi i x(\bar{z}-w)} \Big|_{x=-\tau}^{x=+\tau} = \frac{\sin 2\pi\tau(\bar{z}-w)}{\pi(\bar{z}-w)}$$

i obtenim

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \overline{\hat{e}_z(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{\sin 2\pi\tau(z-x)}{\pi(z-x)} dx. \quad \square$$

És interessant observar que les propietats anteriors de les funcions de l'espai PW_τ es poden obtenir directament sense recórrer a la representació (12.10). Per exemple (suposant $\tau = \frac{1}{2}$), per a obtenir la convergència de la sèrie $\sum_n |F(n)|^2$ quan $F \in PW_\tau$ podem utilitzar la propietat de la mitjana en els discos de centre n i radi $\frac{1}{2}$ per a acotar aquesta suma per la integral de $|F|^2$ sobre la reunió d'aquests discos. Atès que aquesta reunió està inclosa en la banda $\{z: |\operatorname{Im} z| < 1\}$, la desigualtat (12.11) implica que aquesta darrera integral és finita. Un argument similar fa veure que $F(x) \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow +\infty$. Provem ara directament la fórmula de Shannon-Whittaker (teorema 12.14); com que $\sin \pi(n-z) = (-1)^{n+1} \sin \pi z$, es tracta d'establir la igualtat

$$\frac{F(z)}{\sin \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{F(n)}{\pi(z-n)}, \quad (12.13)$$

fórmula que demostrarem amb els mateixos mètodes que hem fet servir en la secció 10.3. Observem en primer lloc que la convergència de la sèrie $\sum_n |F(n)|^2$ i la desigualtat de Schwarz impliquen que la sèrie del terme de la dreta de (12.13) convergeix uniformement sobre compactes i defineix, per tant, una funció meromorfa a tot el pla, amb pols als punts $n \in \mathbb{Z}$ i residus $(-1)^n F(n)/\pi$, que coincideixen amb els de la funció $F(z)/\sin \pi z$. Això implica que la diferència entre els dos termes de (12.13) és una funció entera h . Veurem que h és constant d'una forma similar a l'exemple 10.12, comprovant primer que ambdós termes i, per tant, també h estan acotats a la vora del quadrat Q_N centrat a l'origen i de costat $2N+1$ per una constant independent de N . Per al terme de la dreta aquest fet ja està provat en l'exemple 10.12, i per a la funció $F(z)/\sin \pi z$ es dedueix de la relació $|F(z)| = O(e^{\pi|y|})$ i del fet que la funció $|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y$ està acotada inferiorment per $ce^{2\pi|y|}$ a la vora de Q_N , amb c constant independent de N . Amb això h és constant; per veure que aquesta constant és zero prenem $z = m + \frac{1}{2}$ en ambdós termes i comprovem que tenen límit zero quan $m \rightarrow +\infty$. Ja hem vist abans que $F(m + 1/2)$ té límit zero, i pel que fa a la sèrie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{F(n)}{\pi(m + \frac{1}{2} - n)}$$

la convergència a zero quan $m \rightarrow +\infty$ és conseqüència del fet que $\sum_n |F(n)|^2 < +\infty$.

12.4 La transformada de Laplace

12.4.1 La transformada de Laplace de funcions localment integrables

En aquesta secció analitzarem la *transformació de Laplace*, que és una transformació integral definida sobre les funcions que s'anul·len a gairebé tots els punts de la semirrecta $(-\infty, 0)$. Aquestes funcions s'anomenen *causals* i típicament són les que només depenen del temps (valors positius del paràmetre). Suposarem al llarg de tot aquest apartat i de la secció següent que

$$f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

és una funció mesurable i que per a tot $R > 0$ hom té

$$\int_0^R |f(t)| dt < +\infty.$$

Definició 12.16. La transformada de Laplace de f , $F = \mathcal{L}f$, és la funció definida per

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-tz} f(t) dt$$

per als valors complexos de z per als quals el límit anterior existeix.

Veiem que formalment la transformada de Laplace de f és la funció $\frac{\hat{f}(iz)}{2\pi}$ sempre que f s'anul·li a $(-\infty, 0)$ i $\hat{f}$ designi la transformada de Fourier complexa. Formalment també podem escriure

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{L}f(2\pi i\xi).$$

Ara bé, el fet que $\mathcal{L}$ s'apliqui només a funcions causals i que es consideri per a arguments complexos de la variable, fa que $\mathcal{L}$ tingui unes propietats addicionals i alguns avantatges respecte de la transformada de Fourier. Per exemple, pot ser que la transformada $\hat{f}$ no existeixi, i en canvi $\mathcal{L}f$, sí.

Exemple 12.17. Prenem $f(t) = 1$, $t \geq 0$. Aleshores

$$\int_0^R e^{-zt} f(t) dt = -\frac{1}{z} e^{-zt} \Big|_{t=0}^{t=R} = \frac{1}{z} (1 - e^{-Rz}), \quad z \neq 0$$

i, si $\operatorname{Re} z > 0$, hom té $|e^{-Rz}| = e^{-R\operatorname{Re} z} \rightarrow 0$ quan $R \nearrow +\infty$. Així, $\mathcal{L}f$ està definida si $\operatorname{Re} z > 0$ i val $1/z$. En canvi, $\hat{f}(\xi)$ no està definida. $\square$

Exemple 12.18. Considerem $f(t) = e^{\alpha t}$ amb $\alpha \in \mathbb{C}$. Aleshores és

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz} dt = \int_0^R e^{t(\alpha-z)} dt = \frac{1}{z-\alpha},$$

per a $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \alpha$. Si $f(t) = \cos \alpha t = \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})$, llavors

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-i\alpha} + \frac{1}{z+i\alpha} \right) = \frac{z}{z^2 + \alpha^2}, \quad \text{per a } \operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} \alpha|$$

i si $f(t) = \sin \alpha t = \frac{1}{2\pi i}(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})$, obtenim

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-i\alpha} - \frac{1}{z+i\alpha} \right) = \frac{\alpha}{z^2 + \alpha^2}, \quad \text{per a } \operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} \alpha|. \quad \square$$

Exemple 12.19. Si $f = \mathbf{1}_{[0,T]}$, $T > 0$, resulta

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^T e^{-tz} dt = -\frac{1}{z} [e^{-tz}]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{z} (1 - e^{Tz}). \quad \square$$

Els exemples 12.17, 12.18 mostren un aspecte interessant de la transformada de Laplace. Es tracta de funcions que no són ni a $L^1(0, \infty)$ ni a $L^2(0, \infty)$ i que, en principi, no tenen definida una transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$. Tanmateix, les transformades de Laplace corresponents estan definides en un semiplà i fins i tot tenen sentit en la frontera d'aquest domini. Ja hem observat que formalment $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{L}f(2\pi i\xi)$ i això porta a pensar que $\mathcal{L}f(2\pi i\xi)$ bé haurà de ser una transformada de Fourier. Per exemple, quan $f = 1$ a $(0, +\infty)$, hom té $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z}$ i formalment

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{L}f(2\pi i\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi} = \frac{-i}{2\pi} \xi.$$

Si $f(t) = \sin t$ a $(0, +\infty)$, és $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ i

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i\xi)^2 + 1} = \frac{1}{1 - 4\pi^2\xi^2}.$$

Aquesta “extensió” de la transformació de Fourier mitjançant la transformació de Laplace es pot fer rigorosa fent servir la teoria de distribucions.

Un altre avantatge de la transformada de Laplace és que permet incorporar els valors de f i de les derivades de f a l'origen, si existeixen, en la formulació de les regles de derivació i d'integració de $\mathcal{L}f$. Això ho veurem més endavant quan estudiem les aplicacions de la transformada de Laplace.

Evidentment, pot donar-se el cas que $\mathcal{L}f(z)$ no estigui definida per a cap valor de z , per exemple, si $f(t) = \exp(t^2)$. Direm que la funció f té *creixement exponencial* si hi ha una constant real a tal que

$$|f(t)| = O(e^{at}), \quad t > 0.$$

Llavors hom té

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-tz}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq C \int_0^{+\infty} e^{t(a - \operatorname{Re} z)} dt,$$

amb la qual cosa la integral de l'esquerra és absolutament convergent, i per tant convergent, i $\mathcal{L}f$ està definida per a $\operatorname{Re} z > a$.

La primera qüestió de la qual ens ocuparem és de determinar la *regió de convergència* de la transformada de Laplace de f , és a dir, el domini

$$C(f) = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{L}(f)(z) \text{ és convergent}\}.$$

Tal com veurem, hi ha un paral·lisme amb l'estudi de les sèries de potències per a les quals, com sabem, la regió de convergència queda determinada pel radi de convergència de la sèrie.

Lema 12.20. *Suposem que $\mathcal{L}(f)(z_0)$ convergeix. Aleshores $\mathcal{L}(f)(z)$ convergeix uniformement a tot sector $S_\beta = \{z: |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \beta\}$ si $\beta < \pi/2$. És a dir, per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha un número $R_0 = R_0(\varepsilon, \beta)$ de manera que si $R > R_0$, és*

$$\left| \mathcal{L}f(z) - \int_0^R e^{-tz} f(t) dt \right| < \varepsilon, \quad \text{per a } z \in S_\beta.$$

Demostració. Escrivim, per a $R_1 < R_2$,

$$\int_{R_1}^{R_2} e^{-tz} f(t) dt = \int_{R_1}^{R_2} e^{-t(z-z_0)} e^{-tz_0} f(t) dt$$

i considerem

$$g(t) = \int_t^{+\infty} e^{-sz_0} f(s) ds = \mathcal{L}(f)(z_0) - \int_0^t e^{-sz_0} f(s) ds.$$

La regla d'integració per parts dóna, aleshores,

$$\int_{R_1}^{R_2} e^{-tz} f(t) dt = \left[e^{-t(z-z_0)} g(t) \right]_{t=R_1}^{t=R_2} + (z - z_0) \int_{R_1}^{R_2} e^{-(z-z_0)t} g(t) dt$$

(aquesta igualtat pot comprovar-se directament amb el teorema de Fubini). Donat $\varepsilon > 0$, sigui R_0 de manera que $|g(t)| < \varepsilon$ si $t > R_0$. Si $z \in S_\beta$ i $R_1 > R$, llavors

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} e^{-tz} f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon + |z - z_0| \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}(z - z_0)} \leq \varepsilon \left(2 + \frac{1}{\cos \beta} \right)$$

i, pel criteri de Cauchy, obtenim el resultat. $\square$

Definició 12.21. *L'abscissa de convergència de la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$ és el número α_f definit per*

$$\alpha_f = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \text{existeix } z \in \mathbb{C} \text{ amb } \operatorname{Re} z = \alpha \text{ i } \mathcal{L}(f)(z) \text{ convergent} \}.$$

El lema 12.20 implica que $C(f)$ conté el semiplà $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha_f\}$ i que $C(f)$ està inclòs a $\{z: \operatorname{Re} z \geq \alpha_f\}$ si α_f és finit. Si $C(f) = \emptyset$ és $\alpha_f = +\infty$ i si $\alpha_f = -\infty$ és $C(f) = \mathbb{C}$.

Igual que per a sèries de potències, en general, no es pot dir res del comportament de $\mathcal{L}f(z)$ quan $\operatorname{Re} z = \alpha_f$.

Exemple 12.22. Quan $f(t) = 1$, $t \geq 0$ o, més generalment, f coincideix sobre $(0, +\infty)$ amb un polinomi, hom té $\alpha_f = 0$ i $\mathcal{L}(f)(z)$ no convergeix si $\operatorname{Re} z = 0$. Si f és integrable a $(0, +\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty,$$

llavors hom té

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-tz}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| dt, \quad \operatorname{Re} z \geq 0$$

i $C(f)$ conté $\{z: \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Per exemple, la funció $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ té abscissa de convergència igual a 0 i $\mathcal{L}(f)(z)$ convergeix si i només si $\operatorname{Re} z \geq 0$. $\square$

Observem també que $\alpha_f \leq 0$ quan $f \in L^p(0, \infty)$ amb $1 \leq p \leq +\infty$, perquè si $\operatorname{Re} z > 0$, resulta

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} e^{-qt \operatorname{Re} z} dt \right)^{1/q} < +\infty,$$

si $1 < p < +\infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\text{i } \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| dt \quad \text{si } p = 1,$$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-t \operatorname{Re} z} dt \quad \text{si } p = +\infty.$$

Es pot introduir també la noció d'*abscissa de convergència absoluta*:

$$\beta_f = \inf \{ \beta \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\beta t} dt < +\infty \}.$$

És fàcil provar que $\mathcal{L}(f)(z)$ convergeix absolutament si $\operatorname{Re} z > \beta_f$ i que no ho fa si $\operatorname{Re} z < \beta_f$. Evidentment, $\alpha_f \leq \beta_f$, però com que una integral pot ser convergent sense ser-ho absolutament, pot donar-se el cas que $\alpha_f < \beta_f$. Aquest fet constitueix una diferència amb les sèries de potències, per a les quals els dos conceptes anàlegs coincideixen. Quan $f \in L^p(0, +\infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$, ja hem observat que $\beta_f \leq 0$.

Així, si $-\infty \leq \alpha_f < +\infty$, el conjunt $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha_f\}$ és el conjunt obert més gran en el qual $\mathcal{L}(f)$ està definida. És el concepte anàleg al disc de convergència d'una sèrie de potències.

Proposició 12.23. Si $\alpha_f < +\infty$, llavors $\mathcal{L}(f)$ és una funció holomorfa al semiplà $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha_f\}$.

Demostració. Posem

$$F_n(z) = \int_0^n e^{-tz} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pel lema 12.20, la successió (F_n) convergeix uniformement sobre tot compacte de $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha_f\}$. Com que cada F_n és una funció entera, el teorema 9.3 implica que $\mathcal{L}(f)$ és holomorfa a $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha_f\}$. $\square$

El resultat anàleg del teorema 2.31 és:

Proposició 12.24. Supposem $\alpha_f < +\infty$ i considerem les funcions $f_k(t) = t^k f(t)$ per a $k \in \mathbb{N}$. Llavors l'abscissa de convergència de f_k és menor o igual que α_f i hom té

$$\mathcal{L}(f_k)(z) = (-1)^k \mathcal{L}(f)^{(k)}(z), \quad \text{si } \operatorname{Re} z > \alpha_f.$$

Demostració. La igualtat de l'enunciat és la que s'obté si es deriva formalment la definició de $\mathcal{L}(f)(z)$, k vegades. Per provar-la rigorosament observem que, amb les notacions de la proposició 12.23, el teorema 9.3 implica

$$\mathcal{L}(f)^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (-t)^k e^{-tz} f(t) dt$$

uniformement sobre els compactes de $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha_f\}$. Això ja dóna que l'abscissa de convergència de f_k és menor o igual que α_f i també la validesa de l'enunciat. $\square$

Exemple 12.25. Si prenem $f(t) = 1$, $t \geq 0$, en la proposició 12.24 i fem servir l'exemple 12.17 que ens dóna $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{z}$, per a $\operatorname{Re} z > 0$, obtenim que la transformada de Laplace d'un polinomi $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ és

$$\mathcal{L}(P)(z) = \sum_{k=0}^n \frac{k! a_k}{z^{k+1}}. \quad \square$$

L'anàleg del teorema d'Abel (teorema 2.20) per a la transformada de Laplace és:

Proposició 12.26. *Suposem $\alpha_f < +\infty$ i que $\mathcal{L}(f)(z_0)$ convergeix en un punt $z_0 \in \mathbb{C}$ amb $\operatorname{Re} z_0 = \alpha_f$. Aleshores hom té*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(f)(z_0)$$

si z tendeix a z_0 dins d'un sector $\{z: |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \beta\}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$.

Demostració. És una conseqüència immediata del lema 12.20, perquè $\int_0^R e^{-tz} f(t) dt$ és una funció entera per a cada $R < +\infty$. $\square$

El lema 12.20 també implica un decreixement de $\mathcal{L}f(z)$ quan z va cap a l'infinit.

Proposició 12.27. *Si $\alpha_f < +\infty$, hom té $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(z) = 0$ si z tendeix a ∞ dins d'un sector $\{z: |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \beta\}$ amb $\beta < \frac{\pi}{2}$ i $\operatorname{Re} z_0 = \alpha_f$.*

Demostració. Hem vist la igualtat

$$\mathcal{L}f(z) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-tz} f(t) dt,$$

uniformement en el sector. Així, tan sols cal veure que fixat R la integral anterior tendeix a zero quan $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$; però això és conseqüència de l'estimació

$$\left| \int_0^R e^{-tz} f(t) dt \right| \leq \int_0^R e^{-t \operatorname{Re} z} |f(t)| dt$$

i del teorema de la convergència dominada. $\square$

Exemple 12.28. Considerem $f(t) = \frac{\sin \alpha t}{t}$. Com que $t f(t) = \sin \alpha t$ té transformada de Laplace $\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}$, la proposició 12.24 ens diu que $\mathcal{L}f(z)$ té per derivada la funció $-\frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}$. Així és $\mathcal{L}f(x) = -\operatorname{arctg} x + k$ i com que ha de tenir límit zero quan $x \rightarrow +\infty$, per la proposició 12.27, resulta $k = \frac{\pi}{2}$. És ben conegut que la integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} dt$$

és convergent però no absolutament convergent, això és, $0 \in C(f)$. Per la proposició 12.26, resulta

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \mathcal{L}f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Si per a una sèrie de potències $\sum c_n z^n$ hom té $\sum |c_n| < +\infty$, llavors el radi de convergència R compleix $R \geq 1$ i $f(z) = \sum c_n z^n$ és contínua a $\overline{D}(0, R)$. L'anàleg d'aquest fet per a la transformada de Laplace és la proposició següent.

Proposició 12.29. *Si $f \in L^1(0, \infty)$, aleshores $\beta_f \leq 0$ i $\mathcal{L}f(z)$ és contínua a $\{z: \operatorname{Re} z \geq 0\}$.*

Demostració. Ja hem observat abans que $\beta_f \leq 0$. Atès que

$$|f(t)| |e^{-tz}| = |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} \leq |f(t)|,$$

l'enunciat és conseqüència del teorema de la convergència dominada. $\square$

A continuació veurem el teorema d'unicitat per a la transformada de Laplace.

Teorema 12.30. *La transformació de Laplace és injectiva; més generalment, si $\alpha_f < +\infty$, $\alpha_g < +\infty$ i $\mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}g(z)$ per a $\operatorname{Re} z$ prou gran, llavors hom té $f(t) = g(t)$ g. p. t. $t > 0$.*

Demostració. Treballant amb $h = f - g$, cal veure que si $\mathcal{L}h(z) = 0$ per a $\operatorname{Re} z$ prou gran, llavors $h \equiv 0$ g. p. t.. Evidentment, pel principi de prolongació analítica, tindrem $\mathcal{L}h(z) = 0$ per a $\operatorname{Re} z > \alpha_h$, és a dir,

$$\int_0^\infty e^{-tz} h(t) dt = 0, \quad \operatorname{Re} z > \alpha_h.$$

La idea és senzillament especificar z als punts de la forma $\alpha_h + n\tau$, τ fixat i $n = 1, 2, \dots$, que dóna

$$\int_0^\infty e^{-t\alpha_h} e^{-tn\tau} h(t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

fer el canvi de variable $x = e^{-t\tau}$, $dx = -\tau e^{t\tau} dt$, que ens porta a

$$\int_0^\infty x^{n-1} h\left(-\frac{\operatorname{Log} x}{\tau}\right) x^{\alpha/\tau} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

i utilitzar la densitat dels polinomis a l'espai $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$. Ara bé, atès que les integrals que apareixen no són en principi absolutament convergents, és necessari fer abans una integració per parts. Així, introduïm, per a z_0 fixat amb $\operatorname{Re} z_0 > \alpha_h$, la funció

$$g(t) = \int_0^t e^{-sz_0} h(s) ds$$

i integrem per parts per a obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-sz} h(s) ds &= \int_0^R e^{-s(z-z_0)} e^{-sz_0} h(s) ds = \\ &= e^{-R(z-z_0)} g(R) + (z-z_0) \int_0^R e^{-s(z-z_0)} g(s) ds.\end{aligned}\quad (12.14)$$

La funció g és contínua a $[0, +\infty)$; a més, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$ existeix i val $\mathcal{L}h(z_0) = 0$ i

$$\mathcal{L}h(z) = (z-z_0) \int_0^\infty e^{-s(z-z_0)} g(s) ds.$$

Per tant, l'última integral de la dreta de (12.14) és zero si $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$. Si especifiquem a $z = z_0 + n\tau$, trobem

$$\int_0^\infty e^{-sn\tau} g(s) ds = 0$$

i amb el canvi $x = e^{-s\tau}$

$$\int_0^1 x^n g\left(-\frac{\operatorname{Log} x}{\tau}\right) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ara $G(x) = g\left(-\frac{\operatorname{Log} x}{\tau}\right)$ és una funció contínua a $[0, 1]$ i podem concloure que $G \equiv 0$. Per tant, $g(t) = 0$ per a tot t i això implica $h(t) = 0$ g. p. t., perquè $g(t)$ és absolutament contínua amb derivada $e^{-tz_0} h(t)$ g. p. t. $\square$

Analitzem a continuació quines fórmules d'inversió explícites podem trobar que expressin f en termes de $\mathcal{L}f$. És clar que aquesta és una qüestió molt relacionada amb la inversió de la transformació de Fourier. Observem que si $x > \alpha_f$,

$$\mathcal{L}f(x + iy) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+iy)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) e^{-iyt} dt$$

coincideix formalment amb $\widehat{g}_x\left(\frac{y}{2\pi}\right)$, on $g_x(t) = e^{-tx} f(t)$. Per tant, també formalment, tenim

$$\begin{aligned}e^{-tx} f(t) &= g_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}_x(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}_x\left(\frac{y}{2\pi}\right) e^{ity} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}f(x + iy) e^{ity} dy;\end{aligned}$$

és a dir, independentment del valor de x , $x > \alpha_f$, hom té

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = x} \mathcal{L}f(z) e^{tz} dz = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iT}^{x+iT} \mathcal{L}f(z) e^{tz} dz.$$

Aquesta fórmula d'inversió formal és vàlida si $\mathcal{L}f$ satisfà algunes hipòtesis addicionals, talment com en el cas de la transformació de Fourier. Un resultat d'aquest estil és el següent, anàleg al teorema 12.3.

Teorema 12.31. *Suposem $\beta_f < +\infty$ i que per a $\beta > \beta_f$ es compleix*

$$\sup_{x > \beta} |\mathcal{L}f(x + iy)| \leq \varphi(y)$$

amb $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ i $\varphi(y) \rightarrow 0$ quan $|y| \rightarrow +\infty$. Aleshores $f(t)$ coincideix gairebé per a tot $t > 0$ amb la funció contínua

$$e^{tx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}f(x + iy) e^{ity} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = x} \mathcal{L}f(z) e^{tz} dz$$

independentment del valor de x , $x > \beta$.

Per a $t < 0$ hom té $\int_{\operatorname{Re} z = x} \mathcal{L}f(z) e^{tz} dz = 0$.

Demostració. Com a la prova del teorema 12.3, el teorema de Cauchy i la hipòtesi impliquen que la funció

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = x} \mathcal{L}f(z) e^{tz} dz$$

és independent de x , $x > \beta$ i contínua a $\mathbb{R}$. Fent $x \rightarrow +\infty$ en l'estimació

$$|g(t)| \leq \frac{e^{tx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{L}f(x + iy)| dy \leq \frac{e^{tx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy$$

veiem que $g(t) = 0$ si $t < 0$. Per a $t > 0$ la mateixa estimació prova la desigualtat $|g(t)| \leq C e^{t\beta}$. Demostrarem ara la igualtat $\mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}f(z)$ si $\operatorname{Re} z > \beta$, la qual pel teorema d'unicitat ja dóna $f = g$ g. p. t. Fixat z amb $\operatorname{Re} z > \beta$, prenguem x amb $\operatorname{Re} z > x > \beta$ de manera que tenim

$$\mathcal{L}g(z) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-tz} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = x} \mathcal{L}f(w) e^{tw} dw \right) e^{-tz} dt.$$

La integral doble és absolutament convergent i podem canviar l'ordre d'integració per a obtenir

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w = x} \mathcal{L}f(w) \left(\int_0^{+\infty} e^{t(w-z)} dt \right) dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w = x} \frac{\mathcal{L}f(w)}{w - z} dw.$$

Ara bé, si apliquem la fórmula de Cauchy al quadrat Q_R de vèrtexs $x \pm iR$, $R \pm iR$ amb $R > x$ prou gran per tal que tingui z en el seu interior, tenim

$$\mathcal{L}f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} \frac{\mathcal{L}f(w)}{w-z} dw + I_1 + I_2 + I_3,$$

on I_1 , I_2 corresponen als costats horitzontals i I_3 al costat vertical $\{w: \operatorname{Re} w = R\}$ de Q_R i es compleix

$$|I_1|, |I_2| \leq \varphi(R) \frac{R-x}{d(z, \partial Q_R)} \leq C\varphi(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0, \quad C \text{ constant}$$

$$|I_3| \leq \frac{1}{d(z, \partial Q_R)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

i, fent $R \nearrow +\infty$, trobem

$$\mathcal{L}f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w = x} \frac{\mathcal{L}f(w)}{w-z} dw,$$

que dóna $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$. □

La hipòtesi sobre el creixement de $\mathcal{L}f$ en el teorema anterior es compleix, per exemple, si $|\mathcal{L}f(z)| = O(|z|^{-2})$, prenent $\varphi(y) = (\beta^2 + y^2)^{-1}$. Fixem-nos que hem provat que tota funció F holomorfa en un semiplà $\{z: \operatorname{Re} z > \beta\}$ complint les condicions del teorema 12.31, és la transformada de Laplace d'una funció f amb $\beta_f < +\infty$. Per exemple, si F és una funció racional nul·la a l'infinit, $F(z)$ és suma de termes de la forma $C(z - \alpha)^{-1}$ amb $C, \alpha \in \mathbb{C}$ i d'altres que són $O(|z|^{-2})$, i en conseqüència F és la transformada de Laplace d'alguna funció.

Exemple 12.32. Calculem $\mathcal{L}^{-1}F$ si $F(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$. Podem fer-ho amb la fórmula d'inversió del teorema 12.31, és a dir, calculant la integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2 - 3z + 2} dz,$$

amb x prou gran, per residus. Els pols són $z = 1$ i $z = 2$, $F(z)$ és holomorfa si $\operatorname{Re} z > 2$, i prenem, per tant, $x > 2$. Per a R gran considerem el camí tancat C_R de la figura 12.1. A la part circular de C_R és $z = x + Re^{i\theta}$ amb $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ i

$$|F(z) e^{tz}| = e^{tx} \frac{e^{tR \cos \theta}}{|z^2 - 3z + 2|} \leq C \frac{e^{tx}}{R^2}, \quad \text{per a } R \text{ prou gran i } C \text{ constant,}$$

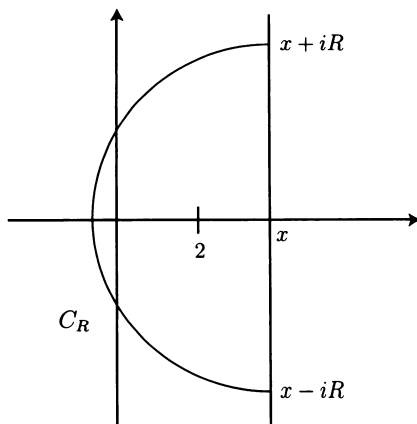


Figura 12.1

de manera que en el límit, quan $R \rightarrow +\infty$, la contribució d'aquesta part és zero. D'altra banda,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{tz}}{z^2 - 3z + 2}, z = 1\right) = -e^t, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{e^{tz}}{z^2 - 3z + 2}, z = 2\right) = -e^{2t}.$$

En conseqüència, $f(t) = e^{2t} - e^t$. A aquesta mateixa conclusió, hi arribem més fàcilment si fem la descomposició de F en fraccions simples

$$F(z) = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}$$

i recordem que $e^{\alpha t}$ té transformada $1/z - \alpha$. □

Ja hem observat que tota funció racional nul·la a l'infinit és la transformada de Laplace d'una funció f . Per trobar f descomponem la funció racional com a suma de fraccions simples i observem, per la proposició 12.24, que la funció $\frac{t^k}{k!} e^{\alpha t}$ té per transformada la funció $\frac{1}{(z - \alpha)^{k+1}}$. Les funcions f que tenen per transformades de Laplace les funcions racionals nul·les a l'infinit són, en conseqüència, les combinacions lineals de les funcions $t^k e^{\alpha t}$ amb $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, és a dir,

$$f(t) = \sum_{i=1}^N P_i(t) e^{\alpha_i t}$$

amb $\alpha_i \in \mathbb{C}$ i P_i funcions polinòmiques. Aquestes funcions s'anomenen *polinomis exponencials*.

12.4.2 La transformada de Laplace de funcions de quadrat integrable

El comportament de la transformada de Laplace a l'espai $L^2(0, +\infty)$ és particularment senzill, tal com passa amb la transformació de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$. En aquest apartat veurem la versió corresponent del teorema de Plancherel.

Definició 12.33. *L'espai de Hardy $H^2(\Pi)$ en el semiplà $\Pi = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ és el conjunt de funcions $F \in H(\Pi)$ que compleixen*

$$\|F\|_2^2 = \sup_{x>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dy < +\infty.$$

Teorema 12.34. *La transformació de Laplace, $F = \mathcal{L}f$, és una bijecció entre $L^2(0, +\infty)$ i $H^2(\Pi)$, que compleix, a més a més,*

$$2\pi \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \|F\|_2^2.$$

Demostració. Ja hem observat abans que $\alpha_f \leq 0$ si $f \in L^2(0, \infty)$, de manera que, efectivament, $\mathcal{L}f$ està definida a Π . També hem observat que $\mathcal{L}f(x+iy) = \widehat{g}_x\left(\frac{y}{2\pi}\right)$ amb $g_x(t) = e^{-tx}f(t)$. Per tant, per la identitat Parseval, hom té

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{L}f(x+iy)|^2 dy &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}_x(\xi)|^2 d\xi = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2tx} |f(t)|^2 dt \leq 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

que ens dona $F = \mathcal{L}f \in H^2(\Pi)$ i $\|F\|_2^2 \leq 2\pi \|f\|_2^2$. Recíprocament, suposem ara donada una funció $F \in H^2(\Pi)$. Utilitzant el teorema de Cauchy i fent servir un argument anàleg al de la prova del teorema 12.2, hom veu que el límit

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iT}^{x+iT} F(z) e^{tz} dz = e^{tx} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T F(x+iy) e^{ity} dy = e^{tx} h_x(t)$$

és independent de x , on $2\pi h_x(2\pi t)$ és la cotransformada de Fourier de la funció $y \rightarrow F(x+iy)$. Pel teorema de Plancherel es compleix, doncs,

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |h_x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dy \leq \|F\|_2^2.$$

Si posem $f(t) = e^{tx} h_1(t) = e^{tx} h_x(t)$, tenim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2tx} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_x(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \|F\|_2^2.$$

Fent ara $x \rightarrow +\infty$ veiem que $f(t) = 0$ g. p. t. a $(-\infty, 0)$, i fent $x \rightarrow 0^+$ veiem que $f \in L^2(0, +\infty)$ i

$$2\pi \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \leq \|F\|_2^2.$$

Com que $f \in L^2(0, +\infty)$, hom té $h_x \in L^1(\mathbb{R})$. Ara bé, transformant per Fourier la funció $2\pi h_x(2\pi t)$ resulta

$$\begin{aligned} F(x + iy) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi h_x(2\pi t) e^{-2\pi i t y} dt = \\ &= \int_0^\infty h_x(t) e^{-i t y} dt = \int_0^\infty e^{-t z} f(t) dt \end{aligned}$$

és a dir, F és la transformada de Laplace de f . □

12.5 Aplicacions de la transformada de Laplace

Les aplicacions de la transformació $f \rightarrow \mathcal{L}f$ es basen en les seves propietats en relació amb les operacions entre funcions causals. En donem les més importants.

Recordem que suposem sempre que $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció mesurable que compleix $\int_0^R |f(t)| dt < +\infty$, per a tot $R > 0$.

P1. $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n (\mathcal{L}f)^{(n)}(z)$ si $n \in \mathbb{N}$.

Això és la proposició 12.24. Per exemple, a la funció $e^{\alpha t}$ li correspon per la transformada de Laplace la funció $\frac{1}{z-\alpha}$, i a $t^n e^{\alpha t}$ li correspon $\frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}}$.

P2. $\mathcal{L}(f(\lambda t))(z) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, per a $\lambda > 0$.

P3. Suposem que f és de classe C^1 a $(0, +\infty)$ i contínua per la dreta en el zero. Si $\alpha_{f'} < +\infty$, aleshores també $\alpha_f < +\infty$ i per a $\operatorname{Re} z$ prou gran hom té

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0).$$

Demostració. Integrant per parts resulta, per a $R > 0$,

$$\int_0^R e^{-tz} f'(t) dt = e^{-Rz} f(R) - f(0) + z \int_0^R e^{-tz} f(t) dt$$

i, per tant, n'hi ha prou de provar que $\alpha_{f'} < +\infty$ implica $e^{-Rz}f(R) \rightarrow 0$ quan $R \rightarrow +\infty$, per a $\operatorname{Re} z > 0$ prou gran. Per hipòtesi, tenim que $\lim_R \int_0^R e^{-tx} f'(t) dt$ existeix per a algun valor de x , per al qual posem

$$g(t) = \int_0^t e^{-sx} f'(s) ds.$$

Aleshores hom té

$$\begin{aligned} e^{-Rz}f(R) &= e^{-Rz}f(0) + e^{-Rz} \int_0^R f'(t) dt = \\ &= e^{-Rz}f(0) + e^{-Rz} \int_0^R e^{xt} g'(t) dt = \\ &= e^{-Rz}f(0) + e^{-(z-x)R} g(R) - e^{-Rz} x \int_0^R e^{xt} g(t) dt. \end{aligned}$$

Com que g és acotada, la igualtat anterior implica

$$|e^{-Rz}f(R)| \leq e^{-R\operatorname{Re} z} |f(0)| + C e^{-R(\operatorname{Re} z - x)} + C e^{-R(\operatorname{Re} z - x)}, \quad C \text{ constant},$$

i el terme de la dreta tendeix a zero quan $R \rightarrow +\infty$, si $\operatorname{Re} z > x$. $\square$

P4. Si f és de classe C^n a $(0, +\infty)$ i existeixen les derivades per la dreta $f^{(i)}(0^+)$ per a $i = 0, \dots, n-1$ i a més $\alpha_{f^{(n)}} < +\infty$, aleshores és

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

P5. En les hipòtesis de P3, hom té

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}(f)(x).$$

En efecte, només cal aplicar la proposició 12.27.

Anàlogament, en les hipòtesis de P4, és

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \mathcal{L}(f)(x) - x f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x \mathcal{L}(f)(x) - f(0)) \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k+1} \mathcal{L}(f)(x) - x^k f(0) - x^{k-1} f'(0) - \dots - x f^{(k-1)}(0). \end{aligned}$$

El significat d'aquestes igualtats és que el desenvolupament asimptòtic de $\mathcal{L}f(x)$ quan $x \rightarrow +\infty$ és

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{f''(0)}{x^3} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{x^{k+1}} + \cdots$$

Si $\mathcal{L}f(z)$ és holomorfa a l'infinit, llavors aquest és el desenvolupament al voltant del punt de l'infinit.

P6. Si f és contínua i posem $g(t) = \int_0^t f(s)ds$, aleshores

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{z} \mathcal{L}f(z).$$

És una conseqüència de P3.

P7. Supposem que la funció $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ també és integrable a cada interval $[0, R]$ amb $R > 0$ i, a més, $\alpha_g < +\infty$. Aleshores és $(\mathcal{L}g)'(z) = -f(z)$.

Aquesta afirmació és una conseqüència de P1.

Per exemple, considerem la funció $g(t) = \frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t}$, amb α, β paràmetres reals. Llavors la funció $\mathcal{L}g(z)$ té derivada igual a

$$\frac{z}{z^2 + \beta^2} - \frac{z}{z^2 + \alpha^2}$$

i és nul·la a l'infinit. Així, per a $x \in \mathbb{R}$, és

$$\mathcal{L}g(x) = \int_x^\infty \left(\frac{t}{t^2 + \alpha^2} - \frac{t}{t^2 + \beta^2} \right) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x^2 + \alpha^2}{x^2 + \beta^2}.$$

i, per prolongació analítica, resulta $\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z^2 + \alpha^2}{z^2 + \beta^2}$. Hom té $0 \in C(g)$, i, per la proposició 12.29,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t} dt = \mathcal{L}g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}g(x) = \operatorname{Log} \frac{\alpha}{\beta}.$$

P8. Si $\lambda > 0$ i s'interpreta que la traslladada $\tau_\lambda f(t) = f(t - \lambda)$ val 0 per a $t < \lambda$, llavors hom té $\mathcal{L}(f(t - \lambda))(z) = e^{-\lambda z} \mathcal{L}f(z)$.

P9. Si $z_0 \in C(f)$ i $z - z_0 \in C(f)$, hom té

$$\mathcal{L}f(z - z_0) = \mathcal{L}(e^{z_0 t} f(t))(z).$$

P10. Si f és λ -periòdica, llavors $\alpha_f \leq 0$ i per a $\operatorname{Re} z > 0$ és

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda z}} \int_0^\lambda e^{-tz} f(t) dt.$$

En efecte, si g designa la funció que coincideix amb f a $(0, \lambda)$ i és zero fora d'aquest interval, podem escriure $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t - n\lambda)$ i aplicant P8, resulta

$$\mathcal{L}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\lambda z} \mathcal{L}g(z) = (1 - e^{-\lambda z})^{-1} \mathcal{L}g(z).$$

La convolució de dues funcions causals f, g es defineix per

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

Observem que coincideix amb la convolució habitual de f i g si estenem aquestes funcions per zero a $(-\infty, 0)$.

P11. Supposem que $\beta_f < +\infty$ i $\beta_g < +\infty$. Aleshores és $\beta_{f*g} \leq \max(\beta_f, \beta_g)$ i, si $\operatorname{Re} z > \max(\beta_f, \beta_g)$, hom té

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z).$$

En efecte, sigui $x > \beta_f, \beta_g$ de manera que

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-tx} (|f(t)| + |g(t)|) dt < +\infty.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tx} |(f * g)(t)| dt &\leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} \left(\int_0^t |f(s)| |g(t-s)| ds \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} |f(s)| \left(\int_s^{+\infty} |g(t-s)| e^{-tx} dt \right) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} |f(s)| \left(\int_s^{+\infty} |g(t-s)| e^{-(t-s)x} dt \right) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} |f(s)| \left(\int_0^{+\infty} |g(t)| e^{-tx} dt \right) ds \leq I^2. \end{aligned}$$

Per tant, $\beta_{f*g} \leq \max(\beta_f, \beta_g)$, i si repetim el càlcul anterior sense valors absoluts, trobem la igualtat de P.11.

Un cop establerta la llista de propietats de la transformada de Laplace, passem a les aplicacions.

Una aplicació típica de la transformada de Laplace és la resolució d'equacions diferencials ordinàries lineals amb coeficients constants. Tal com se sap, la solució de l'equació

$$P(D)f = g \quad (12.15)$$

amb $g(t)$ una funció donada i on $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$, $D = \frac{d}{dt}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, està completament determinada per les condicions inicials en un punt t_0 :

$$f^{(k)}(t_0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (12.16)$$

amb $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ constants.

Com que el problema és invariant per translacions, podem suposar $t_0 = 0$. Per trobar la solució $f(t)$ per a $t > 0$ utilitzarem la transformada de Laplace. Per a $t < 0$ només cal observar que la funció $\tilde{f}(t) = f(-t)$ satisfà l'equació

$$\tilde{P}(D)\tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = g(-t)$$

amb $\tilde{P} = \sum_{i=0}^n a_i(-1)^i D^i$. És convenient ampliar una mica el concepte mateix de solució. Així, no suposarem necessàriament que g és contínua a $(0, +\infty)$, sinó que ho és tret d'un conjunt de punts aïllats en cadascun dels quals g hi té un salt. Una solució generalitzada f és llavors una funció de classe C^{n-1} a $(0, +\infty)$, que és de classe C^n en el conjunt de punts on g és contínua i que compleix $P(D)f = g$ en aquest conjunt. Les condicions inicials s'interpreten com

$$f^{(k)}(0+) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Com veurem, l'ús de la transformació $\mathcal{L}$ presenta dos avantatges: en primer lloc les dades g i $b_0, \dots, b_{n-1}$ es manipulen simultàniament, i després el problema es redueix a una equació algebraica. La idea és trobar primer $\mathcal{L}f$ i després passar a f amb el teorema d'inversió, de manera que l'equació es converteixi en un problema sobre funcions de la variable complexa z .

Suposem que f és una solució del problema (12.15) i (12.16). Posem $F = \mathcal{L}f$ i $G = \mathcal{L}g$, que és una dada. Per la regla P4 tindrem

$$\mathcal{L}(P(D)f) = P(z)F(z) - b_0p_{n-1}(z) - \dots - b_{n-1}p_0(z),$$

on $P(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$ i $p_k(z)$ són els polinomis

$$p_0(z) = 1; \quad p_k(z) = z^k + a_{n-1}z^{k-1} + \dots + a_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Per tant,

$$P(z)F(z) = G(z) + b_0 p_{n-1}(z) + \cdots + b_{n-1} p_0(z),$$

que és una equació algebraica immediata de resoldre i dóna:

$$F(z) = \frac{G(z) + b_0 p_{n-1}(z) + \cdots + b_{n-1} p_0(z)}{P(z)}.$$

Així, tan sols cal invertir la transformada de Laplace per tal de trobar f a partir de F .

Observem, en primer lloc, que tenim la descomposició

$$F = F_1 + F_2, \text{ amb } F_1 = \frac{G}{P}, \text{ i } F_2 = \frac{b_0 p_{n-1}(z) + \cdots + b_{n-1} p_0(z)}{P(z)}.$$

Aquesta descomposició correspon a $f = f_1 + f_2$, on f_1 és la solució de $P(D)f_1 = g$ amb condicions inicials nul·les i f_2 és la solució de $P(D)f_2 = 0$ amb condicions inicials $f_2^{(k)} = b_k$, $k = 0, \dots, n-1$. La solució F_2 és racional i nul·la a l'infinit, i per tant f_2 és un polinomi exponencial.

La funció $\frac{1}{P}$ és una funció racional nul·la a l'infinit i hi ha, per tant, un polinomi exponencial h amb $\mathcal{L}h = \frac{1}{P}$. De $\mathcal{L}f_1 = F_1 = \frac{G}{P} = \mathcal{L}(h)\mathcal{L}(g)$, utilitzant P11 i el teorema d'unicitat, obtenim $f_1 = g * h$, és a dir,

$$f_1(t) = \int_0^t h(t-s)f(s)ds, \quad t > 0.$$

En el cas que g sigui contínua, el resultat següent es dedueix del teorema d'existència i unicitat per a equacions diferencials ordinàries. Aquí en fem una prova independent que val sense la hipòtesi de continuïtat sobre g .

Teorema 12.35. *El problema $P(D)f = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)f = g$, $f^{(k)}(0) = b_k$, $k = 0, \dots, n-1$ té una solució generalitzada única donada per*

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \int_0^t h(t-s)g(s)ds + f_2,$$

on f_2 és el polinomi exponencial que compleix $\mathcal{L}f_2(z) = \frac{1}{P(z)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k p_{n-1-k}(z)$ amb $p_k(z) = z^k + a_{n-1}z^{k-1} + \cdots + a_{n-k}$ ($p_0(z) = 1$) i h és el polinomi exponencial tal que $\mathcal{L}h = \frac{1}{P}$.

Demostració. Les consideracions anteriors proven que si hi ha una solució, és la descrita. Per a provar que efectivament és la solució, és suficient comprovar les

condicions inicials $f^{(k)}(0) = b_k$, $k = 0, \dots, n-1$, perquè llavors $\mathcal{L}(P(D)f) = \mathcal{L}(g)$ per construcció i $P(D)f = g$. Comprovem en primer lloc que

$$f_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Per la propietat P5 i observant que $P(z) = z^n + \dots$, es dedueix

$$h(0) = \dots = h^{n-1}(0) = 0, \quad h^{(n)}(0) = 1.$$

És clar que $f_1(0) = 0$ i, derivant succesivament, obtenim

$$f_1^{(k)}(t) = \int_0^t h^{(k)}(t-s)g(s)ds, \quad f_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1$$

(com que $h^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$, això és cert fins i tot en els punts t on g presenta un salt).

Ara cal provar $f_2^{(k)}(0) = b_k$ per a $k = 0, 1, \dots, n-1$. La funció $\frac{p_{n-1-k}(z)}{P(z)}$ és de l'ordre z^{-1-k} quan $z \rightarrow \infty$ i és clar, per tant, que $\mathcal{L}f_2(z) \sim \frac{b_0}{z}$. Ara, en la igualtat

$$z\mathcal{L}f_2(z) - b_0 = \frac{z \sum b_k p_{n-1-k}(z) - b_0 P(z)}{P(z)}$$

el numerador comença amb $b_1 z^{n-1}$, i en conseqüència és de l'ordre de $\frac{b_1}{z}$, i així succesivament. $\square$

En molts casos pràctics, per a trobar la solució f no cal fer separatament el còmput de h i el càlcul de la convolució $h * g$. Per exemple, si g és un polinomi exponencial, aleshores $G = \mathcal{L}g$ és una funció racional nul·la a l'infinit, $F_1 = \frac{G}{P}$ també ho és, i podem calcular directament f_1 fent la descomposició en fraccions simples. També podem aplicar aquest procediment si g és una combinació lineal de traslladats de polinomis exponencials en el sentit de P8. Això s'il·lustra en el primer dels exemples següents.

Exemple 12.36. Resoldrem l'equació

$$f'(t) + 2f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

amb la condició inicial $f(0) = 1$.

En aquest cas tenim

$$\mathcal{L}(f' + 2f) = \mathcal{L}(\mathbf{1}_{[0,1]}) = \frac{1}{z} (1 - e^{-z}).$$

Però $\mathcal{L}(f')(z) = -f(0) + z\mathcal{L}(f)(z)$ i, així,

$$-1 + (z+2)\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} (1 - e^{-z}),$$

d'on

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z(z+2)} - \frac{-e^{-z}}{z(z+2)}.$$

Descomponem en fraccions simples

$$\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right)$$

per a obtenir

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} \right) - \frac{1}{2} e^{-z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right).$$

Recordem que $\frac{1}{z-\alpha}$ prové de $e^{\alpha t}$. Aplicant P8 trobem

$$f(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{2t}) - \frac{1}{2} \tau_1 (1 - e^{-2t}),$$

és a dir, $f(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$ si $0 < t < 1$ i

$$f(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2t}) - \frac{1}{2} (1 - e^{-2(t-1)}) = \frac{1}{2} (e^{-2t} + e^{-2(t-1)}) \text{ si } t > 1.$$

Observem que f és contínua però no derivable en el punt 1, perquè g no és contínua en aquest punt. $\square$

Exemple 12.37. Resolem l'equació $f''(t) - 2f'(t) + 5f(t) = g(t)$ amb $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, on g és la funció $2L$ -periòdica que val 1 a $[0, L]$ i 0 a $[L, 2L]$.

Per P10, tenim

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{\int_0^L e^{-tz} dt}{1 - e^{-2Lz}} = \frac{1}{z} \frac{1 - e^{-Lz}}{1 - e^{-2Lz}} = \frac{1}{z(1 + e^{-Lz})}.$$

Així doncs, ha de ser

$$z^2 \mathcal{L}(f) - z - 2(z\mathcal{L}(f) - 1) + 5\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z(1 + e^{-Lz})}$$

$$\mathcal{L}f(z)(z^2 - 2z + 5) = z - 2 + \frac{1}{z(1 + e^{-Lz})}$$

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{z-2}{z^2+2z+5} + \frac{1}{(z^2-2z+5)z(1+e^{-Lz})} = F_2 + F_1.$$

Descomponem en fraccions simples:

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 5} = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \bar{\alpha}} \right), \quad \alpha = 1 + 2i$$

$$\frac{z - 2}{z^2 - 2z + 5} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{i}{4}}{z - \alpha} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{i}{4}}{z - \bar{\alpha}}.$$

La funció racional $\frac{z-2}{z^2-2z+5}$ prové de

$$f_2(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} \right) e^{\alpha t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4} \right) e^{\bar{\alpha} t} = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{i}{2} \right) e^{(1+2i)t} =$$

$$= e^t \operatorname{Re} \left[\left(1 + \frac{i}{2} \right) e^{2it} \right] = e^t \cos 2t - \frac{1}{2} e^t \sin 2t.$$

La funció racional $\frac{1}{z^2-2z+5}$ prové de

$$h(t) = \frac{1}{4i} (e^{\alpha t} - e^{\bar{\alpha} t}) = \frac{1}{2} e^t \sin 2t$$

i, tal com hem vist, $\frac{1}{z(1+e^{-Lz})}$ prové de g . Així, obtenim

$$f_1(t) = (g * h)(t) = \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) e^s \sin 2s ds$$

i, com sabem, la solució és $f = f_1 + f_2$. □

A continuació ens concentrem en el problema

$$P(D)f = g, \quad f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (12.17)$$

que, com hem vist, té solució única donada per

$$f(t) = \int_0^t h(t-s)g(s)ds,$$

on h és un polinomi exponencial amb $h^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$, de forma que f és de classe C^{n-1} i

$$f^{(k)}(t) = \int_0^t h^{(k)}(t-s)g(s)ds, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

En el conjunt de punts on g és contínua, com que $h^{(n)}(0) = 1$, f és de classe C^n i hom té

$$f^{(n)}(t) = g(t) + \int_0^t h^{(n)}(t-s)g(s)ds,$$

La funció h és la *funció de Green* del problema. També s'anomena *resposta-impuls* perquè quan, formalment, substituïm g per l'impuls δ (delta de Dirac a l'origen), aleshores és $f = h$. De la funció $\frac{1}{p}$, que és la transformada de Laplace de h , $\mathcal{L}h = \frac{1}{p}$, se'n diu la *funció de transferència*.

Aquestes nocions s'apliquen, en general, a tots els operadors lineals T que transformen funcions causals g en funcions causals $f = Tg$ i que són invariants per translacions en el sentit que si τ_λ és la translació definida a P8, s'ha de complir:

$$f = Tg \text{ i } \lambda > 0 \text{ impliquen } \tau_\lambda f = T(\tau_\lambda g).$$

Aquests operadors s'acostumen a anomenar *filtres*.

El problema $P(D)f = g$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$ és invariant per translacions. Pot provar-se sota hipòtesis generals que a tot operador invariant per translacions T li correspon una resposta-impuls h tal que

$$Tg = g * h, \quad \text{és a dir } Tg(t) = \int_0^t h(t-s)g(s)ds,$$

on h s'interpreta de la mateixa forma: $h = T(\delta)$. La idea intuïtiva és que tota funció g és una combinació lineal (infinita) de traslladades de la delta de Dirac a l'origen, δ :

$$g = \int g(s)\delta_s = \int g(s)\tau_s\delta$$

i, per tant, per linealitat i invariància per translacions, hom té

$$Tg = \int g(s)\tau_s T\delta = \int g(s)\tau_s h ds,$$

que significa

$$Tg(t) = \int_0^t g(s)h(t-s)ds.$$

En general, un filtre T s'anomena *estable* si Tg és acotada sempre que g sigui acotada. Per al problema (12.17) és fàcil determinar quan l'operador corresponent $T = P(D)$ és estable.

Teorema 12.38. *Si la funció de transferència d'un filtre és una funció R , racional i nul·la a l'infinit, llavors el filtre és estable si i només si tots els pols de R tenen part real negativa.*

Demostració. Demostrem primer que la condició és necessària. Si prenem $g(t) = e^{itw}$ per a w fixat, que és acotada, llavors $Tg = f$ ha de ser acotada. Ara bé, com que $Tg = g * h$, on h és la resposta-impuls i $\mathcal{L}h = R$, la funció

de transferència, obtenim $\mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}g(z)R(z) = \frac{R(z)}{z-iw}$. Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ els pols de R amb multiplicitats $m_1, \dots, m_n$. Si $\alpha_j \neq iw$, $j = 1, \dots, n$, tenim la descomposició en fraccions simples

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{R(iw)}{z-iw} + \sum_{j=1}^n R_j(z),$$

on R_j és la part principal de R en el punt α_j . Aleshores $\mathcal{L}^{-1}(R_j)$ és del tipus $P_j(t)e^{\alpha_j t}$, on P_j és un polinomi de grau m_{j-1} , i trobem

$$f(t) = R(iw)e^{itw} + \sum_{j=1}^n P_j(t)e^{\alpha_j t}.$$

Aquesta expressió és acotada si i només si $\operatorname{Re} \alpha_j \leq 0$ i si els pols α_j amb $\operatorname{Re} \alpha_j = 0$ tenen multiplicitat $m_j = 1$. Ara bé, si $\alpha_j = iw_0$ i prenem $w = w_0$, llavors iw_0 és un pol d'ordre més gran o igual que 2 de $\mathcal{L}f(z)$ i $f(t)$ contindria un terme no acotat. Per tant, $\operatorname{Re} \alpha_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ és una condició necessària.

Per a provar que la condició és suficient, utilitzem l'expressió

$$f(t) = \int_0^t h(t-s)g(s)ds$$

amb $\mathcal{L}h = R$, en la qual suposem que g és acotada. La funció h serà del tipus

$$h(t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t)e^{\alpha_j t}$$

amb Q_j polinomis i $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ els pols de R . Si $\operatorname{Re} \alpha_j \leq -\varepsilon$ amb $\varepsilon > 0$ per a $j = 1, \dots, n$, i N és el màxim dels graus dels polinomis Q_j , tenim

$$|f(t)| \leq \|g\|_\infty \int_0^t |h(t-s)|ds \leq C \|g\|_\infty \int_0^\infty |t|^N e^{-\varepsilon t} dt < +\infty,$$

amb C constant. □

Observem que els mètodes basats en la transformació de Laplace per a resoldre equacions diferencials ordinàries no requereixen tenir definida la funció $\mathcal{L}f(z)$ per a valors complexos. Hom podria definir $\mathcal{L}f(x)$ només per a x real i, aleshores, el teorema d'unicitat, en el sentit que $\mathcal{L}f(x) = \mathcal{L}g(x)$ implica $f \equiv g$, tindria la mateixa prova que hem donat. Ara bé, si volem tenir fórmules d'inversió, llavors és necessari passar a arguments complexos.

12.6 Sèries de Dirichlet

Les sèries de Dirichlet són un tipus especial de sèries de funcions holomorfes particularment importants en la teoria analítica de números. L'exemple més conegut és la sèrie que defineix la *funció ζ de Riemann*,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Definició 12.39. Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de funcions de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

amb $c_n \in \mathbb{C}$ i $\lambda_n \in \mathbb{R}$ complint $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$.

Quan $\lambda_n = n$, la sèrie anterior es redueix a una sèrie de potències en $w = e^{-z}$. Quan $\lambda_n = \text{Log } n$, la sèrie s'expressa com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$$

i s'anomena *sèrie especial de Dirichlet*.

Les sèries de Dirichlet són un anàleg discret de la transformada de Laplace, i existeix un paral·lisme entre les dues teories corresponents.

Proposició 12.40. Si la sèrie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$ és convergent en el punt $z_0 \in \mathbb{C}$, llavors és convergent a tot punt z amb $\text{Re } z > \text{Re } z_0$. A més, la convergència és uniforme a tot sector $S_\beta = \{z : |\text{Arg}(z - z_0)| \leq \beta\}$, $\beta < \pi/2$.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar $z_0 = 0$ i $\lambda_n \geq 0$. Així doncs, sabem que $\sum c_n$ és convergent i volem veure que $\sum c_n e^{-\lambda_n z}$ és convergent si $\text{Re } z > 0$, uniformement a tot sector $\{z : |\text{Arg } z| \leq \beta\}$, $\beta < \pi/2$. Aplicant el criteri d'Abel (teorema 2.14), hem de comprovar que

$$\sum_n |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n-1} z}| \leq C_\beta, \quad \text{si } |\text{Arg } z| \leq \beta < \pi/2, \text{ per a una constant } C_\beta.$$

Ara bé, si $z = x + iy$, és

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n-1} z}| &= \left| z \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} e^{-\lambda z} d\lambda \right| \leq \\ &\leq |z| \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} e^{-\lambda \operatorname{Re} z} = \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda_{n-1} x} - e^{-\lambda_n x}) \end{aligned}$$

i llavors la sèrie anterior està dominada per $\frac{|z|}{x} \leq \frac{1}{\cos \beta}$. $\square$

La proposició 12.40 implica:

Teorema 12.41. *Per a tota sèrie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$ hi ha un número real α tal que la sèrie és convergent si $\operatorname{Re} z > \alpha$ i divergent si $\operatorname{Re} z < \alpha$. La funció $D(z) = \sum c_n e^{-\lambda_n z}$ és holomorfa al semiplà $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$.*

El número α s'anomena *abscissa de convergència* de la sèrie.

També hi ha una *abscissa de convergència absoluta* β definida per la propietat que la sèrie és absolutament convergent per a $\operatorname{Re} z > \beta$ i no absolutament convergent per a $\operatorname{Re} z < \beta$. Trivialment és $\beta \geq \alpha$, però pot donar-se el cas que $\alpha < \beta$, i llavors la banda $\{z : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$ s'anomena *banda de convergència condicional*.

Per exemple, per a la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots$$

és $\beta = 1$ i $\alpha = 0$.

Naturalment, la derivada de la funció $D(z)$ del teorema 12.41 també es representa per una sèrie de Dirichlet,

$$D'(z) = - \sum c_n \lambda_n e^{-\lambda_n z}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z > \alpha.$$

Teorema 12.42 (Teorema d'unicitat). *Si $D(z) = \sum c_n e^{-\lambda_n z}$ i $D(z) = 0$ per a $\operatorname{Re} z > \alpha$, on α és l'abscissa de convergència de la sèrie de Dirichlet, llavors és $c_n = 0$ per a $n = 0, 1, 2, \dots$. Més generalment, si la funció $D(z)$ té infinits zeros en un sector $S_\beta = \{z : |\operatorname{Arg} z| \leq \beta\}$ amb $\beta < \pi/2$, aleshores és $c_n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, i $D(z)$ és idènticament nul·la.*

Demostració. Podem escriure

$$D(z) e^{\lambda_1 z} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)z}.$$

La sèrie del terme de la dreta és uniformement convergent en el sector $S_\beta = \{z: |\operatorname{Arg} z| < \beta\}$ i cada terme té límit zero quan $z \rightarrow \infty$ en aquest sector. Això significa que

$$c_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in S_\beta}} D(z) e^{\lambda_1 z}$$

De la mateixa manera $c_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} (D(z) - c_1 e^{-\lambda_1 z}) e^{\lambda_2 z}$ i així successivament. Ara si $D(w_n) = 0$ per a infinits w_n en el sector S_β , tindrem $c_n = 0$ per a cada n . $\square$

Moltes de les altres propietats de les transformades de Laplace poden transferir-se a les sèries de Dirichlet mitjançant l'observació següent. Comencem per escriure

$$\frac{D(z)}{z} = \sum_n c_n \frac{e^{-\lambda_n z}}{z}.$$

Ara la funció $\frac{1}{z}$ és $\mathcal{L}(1)(z)$ i la funció $\frac{e^{-\lambda_n z}}{z}$ és $\mathcal{L}(\tau_{\lambda_n} 1)(z)$. És a dir, si posem $H = \mathbf{1}_{(0, +\infty)}$ (anomenada *funció de Heaviside*), llavors és

$$\frac{D(z)}{z} = \sum_n c_n \mathcal{L}(H(t - \lambda_n)) = \mathcal{L}(f)(z)$$

amb

$$f(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} c_n.$$

Així doncs, tenim la relació $D(z) = z\mathcal{L}(f)(z)$.

12.7 La Z-transformada

La Z-transformada és una altra versió discreta de la transformada de Laplace que s'aplica fonamentalment a la resolució d'equacions en diferències finites, que són les equacions que corresponen a les equacions diferencials ordinàries en un context discret. Conceptualment coincideix amb la idea de sèrie de potències o amb la idea de sèrie de Laurent, si bé tradicionalment s'utilitza un llenguatge lleugerament diferent.

Definició 12.43. La Z -transformada d'una successió $c = (c_n)_{n=0}^{\infty}$ de números complexos és la funció

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n},$$

definida per als valors complexos de z per als quals la sèrie és convergent.

Es tracta, doncs, d'una sèrie de potències en $w = \frac{1}{z}$. Més generalment, es pot considerar la Z -transformada d'una successió $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indexada per $n \in \mathbb{Z}$, que serà una sèrie de Laurent en $w = \frac{1}{z}$.

Si $\rho = \rho(c) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}$, sabem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ té radi de convergència $R = 1/\rho$. Aquesta sèrie convergeix absolutament si $|w| < R$ i divergeix si $|w| > R$. Això significa que $C(z)$ convergeix absolutament si $|z| > \rho$ i divergeix si $|z| < \rho$. En aquest cas, doncs, els radis de “convergència” i de “convergència absoluta” coincideixen.

Exemple 12.44. Si $c_n = \lambda$, constant, és $C(z) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{\lambda z}{z-1}$ per a $|z| > 1$.

Si $c_n = \frac{1}{n!}$, és $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ per a $|z| > 0$. $\square$

Una forma d'interpretar la Z -transformada és com una discretització de la transformada de Laplace. La integral

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz} dt$$

s'aproxima per la suma de Riemann

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau) \delta e^{-n\tau z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e^{\tau z})^{-n} = C(e^{\tau z}), \text{ amb } c_n = f(n\tau), \quad \tau > 0.$$

La funció $z \mapsto e^{\tau z}$ transforma un semiplà $\{z: \operatorname{Re} z > \alpha\}$ en l'exterior d'un disc.

Les propietats de la Z -transformada són anàlogues a les propietats de la transformada de Laplace que hem donat a la secció 12.5 i no les especificarem aquí. Tan sols destacarem la corresponent a P.11 segons la qual si $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ són dues successions amb $\rho(a) < +\infty$, $\rho(b) < +\infty$, la convolució (c_n) de les dues successions definida per

$$c_n = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

té $\rho(c) \leq \max(\rho(a), \rho(b))$ i la seva Z -transformada $C(z)$ compleix $C(z) = A(z)B(z)$, on $A(z)$ i $B(z)$ són, respectivament, les Z -transformades de a i de b .

La Z -transformada és una eina molt útil per a resoldre *equacions en diferències*. Es tracta d'una equació del tipus

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j y_{n+j} = \sum_{j=0}^q \beta_j x_{n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

amb les condicions inicials $y_j = \gamma_j$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, on les γ_j són constants donades. Els números α_j per a $j = 0, 1, \dots, p$, β_j per a $j = 0, 1, \dots, q$ i la successió $x = (x_n)_{n=0}^\infty$ són les dades, i els termes de la successió $y = (y_n)_{n=0}^\infty$ són les incògnites.

Si adoptem la notació $\tau_j(c) = (c_{n+j})_{n=0}^\infty$ quan $c = (c_n)_{n=0}^\infty$ llavors l'equació anterior s'escriu:

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j \tau_j(y) = \sum_{j=0}^q \beta_j \tau_j(x).$$

Per tal de trobar y , la idea és aplicar la Z -transformada i utilitzar el fet que la Z -transformada de $\tau_j(c)$ és la funció

$$z^j \left(C(z) - \sum_{l=0}^{j-1} \frac{c_l}{z^l} \right),$$

si $C(z)$ és la Z -transformada de $c = (c_n)_{n=0}^\infty$. Hom obté, llavors, per a les Z -transformades $X(z)$, $Y(z)$ de $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ l'equació

$$\sum_{j=0}^p \alpha_j z^j \left(Y(z) - \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\gamma_l}{z^l} \right) = \sum_{j=0}^q \beta_j z^j \left(X(z) - \sum_{l=0}^{j-1} \frac{x_l}{z^l} \right)$$

de la qual s'aïlla $Y(z)$. La solució s'obté finalment fent el desenvolupament de $Y(z)$ en el punt de l'infinit.

Exemple 12.45. Considerem l'equació $3y_n + 2y_{n+1} = x_n - x_{n+2}$, $n \geq 0$ amb $y_0 = 1$. Tindrem

$$3Y(z) + 2z(Y(z) - 1) = X(z) - z^2 \left(X(z) - \left(x_0 + \frac{x_1}{z} \right) \right)$$

d'on

$$Y(z) = \frac{\left(x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots \right) - \left(x_2 + \frac{x_3}{z} + \frac{x_4}{z^2} + \dots \right) + 2z}{2z + 3}.$$

El desenvolupament de $\frac{1}{2z+3}$ a l'infinit, vàlid si $|z| > \frac{3}{2}$, és

$$\frac{1}{2z+3} = \frac{1}{2z\left(1+\frac{3}{2z}\right)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2z)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2z)^{n+1}}.$$

Això dona

$$y_n = \frac{(-1)^n 3^n}{2^n} + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} 3^{j-1}}{2^j} (x_{n-j} - x_{n-j+2}), \quad n \geq 1. \quad \square$$

Igual que hem fet en la secció 12.5 per a l'equació $P(D)f = g$, considerarem ara el cas que les condicions inicials siguin totes nul·les, és a dir, $\gamma_j = 0$ $j = 0, \dots, p-1$. Suposarem també $q = 0$ i $\beta_0 = 1$. Aleshores y depèn linealment de x i la transformada $Y(z)$ s'expressa en termes de $X(z)$ per

$$Y(z) = \frac{1}{\sum_{j=0}^p \alpha_j z^j} X(z).$$

La funció $\frac{1}{P(z)}$, on $P(z) = \sum_{j=0}^p \alpha_j z^j$, s'anomena *funció de transferència*. La successió $h = (h_n)_{n=0}^{\infty}$ que té per Z -transformada la funció $H(z) = \frac{1}{P(z)}$ permet trobar la solució de l'equació en diferències finites mitjançant la convolució

$$y_n = \sum_{k=0}^n h_{n-k} x_k.$$

Quan l'impuls és $x = (x_n) = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, hom té $y = h$, i per aquest motiu la successió h s'anomena *resposta-impuls*.

Com en el cas continu, una convolució $y = h * x$ és l'expressió general d'un *filtre discret*, és a dir, d'una transformació lineal que transforma successions causals $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en successions causals $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ i que és invariant per translacions. El filtre s'anomena *estable* si transforma successions acotades en successions acotades.

Teorema 12.46. *Un filtre amb funció de transferència racional R és estable si i només si tots els pols de R tenen valor absolut més petit que 1.*

Demostració. Vegem primer que la condició és suficient. Si tots els pols de R tenen mòdul més petit que 1, el desenvolupament a l'infinit de R

$$R(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{h_n}{z^n}$$

és absolutament convergent per a $|z| = 1$ i, per tant, $\sum_{n \geq 0} |h_n| = C < +\infty$. Això implica que si hi ha una constant $D > 0$ tal que $|x_n| \leq D$, $n = 0, 1, 2, \dots$, llavors

$$|y_n| \leq \sum_{k=0}^n |h_{n-k}| |x_k| \leq CD.$$

Vegem ara que la condició és necessària. Suposem que sempre que es compleix $|x_n| \leq D$, $n = 0, 1, 2, \dots$ la successió (y_n) és acotada. Observem que si $|y_n| \leq D'$, $n = 0, 1, 2, \dots$ llavors $Y(z)$, la Z -transformada de (y_n) , està definida a $\{z : |z| > 1\}$ i compleix

$$|Y(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n|}{|z|^n} \leq D' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^n} = D' \frac{|z|}{|z| - 1}, \quad \text{per a } |z| > 1. \quad (12.18)$$

Com que $Y(z) = R(z)X(z)$, és clar que R no pot tenir pols de mòdul més gran que 1. Suposem ara que λ és un pol de R amb $|\lambda| = 1$. Posem

$$R(z) = \frac{F(z)}{(z - \lambda)^m}, \quad m \geq 1$$

amb F analítica en un entorn de λ i $F(\lambda) \neq 0$. Si prenem com a x la successió definida per $x_n = \lambda^n$, hom té $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z^n} = \frac{z}{z - \lambda}$ i

$$Y(z) = R(z)X(z) = \frac{zF(z)}{(z - \lambda)^{m+1}}.$$

Com que $m \geq 1$, aquesta igualtat implica que $Y(z)$ no compleix (12.18) per a cap constant D' i no pot ser, doncs, acotada. Així, tots els pols de R tenen mòdul més petit que 1. $\square$

12.8 Exercicis

1. Sigui F una funció holomorfa i acotada en una banda $U = \{z: a < |\operatorname{Im} z| < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Per a $a < y < b$, posem

$$M(y) = \sup\{|F(x + iy)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Proveu que $\operatorname{Log} M(y)$ és una funció convexa de $\operatorname{Log} y$, és a dir, que si $a < c < y < d < b$, hom té

$$M(y)^{d-c} \leq M(c)^{d-y} M(d)^{y-c}.$$

Indicació: Feu primer el cas $M(c) = M(d) = 1$ fent servir la funció $F(z)/(1 + \varepsilon(z - ia))$. Per al cas general, considereu

$$g(z) = M(c)^{\frac{d-z}{d-c}} M(d)^{\frac{z-c}{d-c}}$$

i apliqueu el cas anterior a F/g .

2. Sigui F una funció holomorfa en una corona $C(0, R_2, R_1) = \{z: R_2 < |z| < R_1\}$ i sigui

$$M(r) = \sup\{|F(z)| : |z| = r\}, \quad R_2 < r < R_1.$$

Proveu que $\operatorname{Log} M(r)$ és una funció convexa de $\operatorname{Log} r$.

3. Proveu que el teorema de Phragmen-Lindelöf (teorema 12.9) també és cert si F compleix l'estimació $|F(z)| = O(e^{\varepsilon|z|^{\alpha}})$ per a tot $\varepsilon > 0$.
4. Sigui F una funció entera que compleix $|F(z)| = O(e^{a|z|^2})$, $z \in \mathbb{C}$ i $|F(x)| = O(e^{-b|x|^2})$, $x \in \mathbb{R}$, per a $a, b > 0$, constants. Proveu que

$$|F(x + iy)| = O(e^{-cx^2 + dy^2})$$

amb unes constants c, d que depenen de a, b .

5. Proveu que si F és una funció entera que satisfà les acotacions de la hipòtesi de l'exercici 4, aleshores la transformada de Fourier de $F(x)$ és una funció entera que també les compleix.
6. Sigui F una funció holomorfa en un entorn d'un polígon regular de n costats, $L_1, L_2, \dots, L_n$, centrat a l'origen. Posem $M_i = \sup\{|F(z)| : z \in L_i\}$. Proveu la desigualtat

$$|F(0)| \leq (M_1 M_2 \cdots M_n)^{\frac{1}{n}}.$$

7. Proveu que una funció entera F de tipus exponencial, és a dir, que compleix $|F(z)| \leq C e^{\tau|z|}$, $z \in \mathbb{C}$ per a $C, \tau \geq 0$ constants, que pertanyi als espais $L^p(\mathbb{R})$, corresponents a dues rectes no paral·leles, per a p fixat amb $1 < p < +\infty$, és idènticament nul·la. Proveu també que tota funció entera de tipus exponencial que estigui acotada sobre dues rectes no paral·leles és constant.
8. Sigui F una funció entera de tipus exponencial τ (exercici 7) que, a més, satisfà la condició

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p dx < +\infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Proveu que hi ha una constant $A(\tau, p)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F'(x)|^p dx \leq A(\tau, p) \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p dx.$$

Trobeu el millor valor de la constant $A(\tau, 2)$ utilitzant el segon teorema de Paley-Wiener.

9. L'espai de Bernstein B_τ és l'espai de les funcions enteres de tipus exponencial τ (exercici 7), que són acotades sobre l'eix real $\mathbb{R}$. Proveu la desigualtat de Bernstein

$$\sup\{|F'(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \tau \sup\{|F(x)| : x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{si } F \in B_\tau.$$

Indicació: En primer lloc proveu-ho per a F de la forma

$$F(z) = \int_{-\rho}^{+\rho} e^{2\pi tz} f(t) dt$$

amb f integrable i $2\pi\rho = \tau$, utilitzant la igualtat

$$2\pi i t e^{-\pi i t} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{2\pi i n t}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}.$$

En el cas general, considereu $F_\varepsilon(z) = F(z) \frac{\sin \varepsilon z}{\varepsilon z}$.

10. Sigui F una funció de banda limitada a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En lloc del pas de Nyquist corresponent (igual a 1), considereu un pas $\rho < 1$. Trobeu una fórmula que expressi $F(z)$ a partir dels valors $F(n\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, del tipus

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n\rho) \varphi(z - n\rho),$$

amb φ ràpidament decreixent a l'infinit ($\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^n |\varphi^{(k)}(x)| = 0$, per a $n, k = 0, 1, 2, \dots$).

Indicació: Amb $\tau = \frac{1}{2\rho}$, considereu el desenvolupament en sèrie de Fourier 2τ -periòdica de $\widehat{F}$, multipliqueu-lo per una funció de C_c^∞ que valgui 1 a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ amb suport dins de $[-\tau, \tau]$ i procediu com en la prova del teorema de Shannon-Whittaker.

11. Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ i considerem la seva 1-perioditzada

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + k).$$

Proveu que l' n -èsim coeficient de Fourier de F ,

$$\widehat{F}(n) = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx,$$

coincideix amb $\widehat{f}(n)$. Per tant, la fórmula de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

és certa si la sèrie de Fourier de F és puntualment convergent; per exemple quan F és contínua i de variació acotada. Proveu que aquest és el cas si f és, a més, absolutament contínua, és a dir, de la forma $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$ amb g integrable.

12. Determineu condicions sobre f per tal que valgui la igualtat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Proveu que aquesta igualtat és certa si f és la restricció a $\mathbb{R}$ d'una funció entera de tipus exponencial τ amb $\tau \leq 1$ (exercici 7) i integrable a $\mathbb{R}$.

13. Proveu que per a la sèrie de Dirichlet $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\log n)^z}$ hom té $\alpha = -\infty$ i $\beta = +\infty$, on α és l'abscissa de convergència i β l'abscissa de convergència absoluta.

14. Si en la sèrie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$ els coeficients λ_n compleixen la condició $\frac{\text{Log } n}{\lambda_n} \rightarrow 0$, per a $n \rightarrow \infty$, proveu que

$$\alpha = \beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |c_n|}{\lambda_n},$$

amb α i β igual a les abscisses de convergència i de convergència absoluta de la sèrie, respectivament.

Aquesta és la fórmula anàloga a la del radi de convergència d'una sèrie de potències.

15. Proveu la fórmula de Parseval per a la sèrie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$: si $x > \alpha$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 e^{-2\lambda_n x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^N |D(x + it)|^2 dt,$$

on hem posat $D(z) = \sum c_n e^{-\lambda_n z}$ i α és l'abscissa de convergència de la sèrie.

16. La finalitat d'aquest exercici és introduir la *transformada de Mellin* que és la transformació que correspon a la transformada de Fourier en el grup multiplicatiu $\mathbb{R}^+$, dotat de la mesura $d\mu = dt/t$. Si f és integrable respecte de $d\mu$, la transformada de Mellin es defineix per

$$f^*(z) = \int_0^{\infty} t^{-iz-1} f(t) dt.$$

Amb el canvi de variable $t = e^{2\pi s}$ es redueix essencialment a la transformada de Fourier complexa.

- a) Establiu la fórmula de Parseval per a la transformada de Mellin.
 b) Proveu que $f^*g^* = (f \& g)^*$, on $f \& g$ indica la convolució associada al grup multiplicatiu de $\mathbb{R}^+$, és a dir,

$$(f \& g)(x) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{t}\right) g(t) \frac{dt}{t}.$$

- c) Establiu la fórmula d'inversió per a la transformada de Mellin.

17. Utilitzeu la transformada de Laplace per a resoldre els problemes següents:

- a) $f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}; \quad f(0) = 0, f'(0) = 2$
- b) $f''(t) + tf'(t) + f(t) = 0; \quad f(0) = 1, f'(0) = 0$
- c) $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = \delta(t - 1), \quad f(0) = 1, f'(0) = 1.$

18. Sigui f una funció contínua a $(0, +\infty)$ i k una funció localment integrable a $(0, +\infty)$. Resoleu l'equació de Volterra en la funció incògnita Φ :

$$\Phi(t) + \int_0^t k(t-s)\Phi(s) ds = f(t), \quad t > 0$$

utilitzant la transformada de Laplace.

19. Resoleu les equacions en diferències finites següents:

- a) $y_n - y_{n+1} = x_n + x_{n+2}, \quad y_0 = 1$
- b) $y_n + 2y_{n+1} + y_{n+2} = x_n - x_{n+1}, \quad y_0 = 1, y_1 = 0.$
- c) $y_n - y_{n+1} - 4y_{n+2} + 4y_{n+3} = x_n + x_{n+1}, \quad y_0 = y_1 = 0, y_2 = 1.$

20. Decidiu quins dels sistemes lineals següents són estables:

- a) $y_n - y_{n+1} - 4y_{n+2} + 4y_{n+3} = x_n - x_{n+1}.$
- b) $y_n - y_{n+1} + 3y_{n+2} + 5y_{n+3} = x_n - x_{n+1}$
- c) $y_n - y_{n+1} - 4y_{n+2} - 4y_{n+3} = x_n$
- d) $2y_n + y_{n+1} = x_n + 2x_{n+1}$
- e) $6y_n - 20y_{n+1} + 6y_{n+2} + 10y_{n+3} = x_n + x_{n+1}$

Bibliografia

- [1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*, 3a edició, Mc Graw-Hill Int. Book Co., Nova York, 1978.
- [2] Blair, D.E., *Inversion theory and conformal mapping*, AMS Publications, Providence, RI, 2000.
- [3] Burckel, R.B., *An introduction to classical complex analysis*, Vol. 1, Academic Press, Nova York - Londres, 1979.
- [4] Carmona, J.J.; Cufí, J., "The index of a plane curve and Green's formula". *Rend. Circolo Matem. Palermo*, 53 (2004), 103–128.
- [5] Christenson, C.O.; Voxman, W.L., *Aspects of topology*, Marcel Dekker, Inc., Nova York - Basilea, 1977.
- [6] Dieudonné, J., *Éléments d'analyse 1*, Gauthier-Villars, París, 1969.
- [7] Gamelin, T.W., *Complex Analysis*, Springer Verlag, Nova York, 2001.
- [8] Muñoz, J., *Curso de teoría de funciones 1*, Tecnos, Madrid, 1978.
- [9] Nevanlinna, R.; Paatero, V., *Introduction to complex analysis*, 2a edició, Chelsea Publishing Co., Nova York, 1982.
- [10] Rudin, W., *Principles of mathematical analysis*, 3a edició, Mc Graw-Hill Book Co., Nova York - Auckland - Düsseldorf, 1976.
- [11] Saks, S.; Zygmund, A., *Fonctions analytiques*, Masson et Cie. Éditeurs, París, 1970.
- [12] Schwartz, L., *Cours d'analyse 1*, 2a edició, Hermann, París, 1981.
- [13] Warner, F.W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill. - Londres, 1971.

Índex de notacions

- $\mathbb{C}$, 1
- $\mathbb{R}$, 1
- $\operatorname{Im} z$, 1
- $\operatorname{Re} z$, 1
- $|z|$, 2
- 1_t , 3
- $\mathbb{T}$, 4
- $\mathbb{Z}$, 4
- $\arg z$, 5
- $\operatorname{Arg} z$, 5
- $|x|$, 12
- $D(a, r)$, 13
- $D_r(a)$, 13
- $C(a, r)$, 13
- $C_r(a)$, 13
- $\mathbb{D}$, 13
- $\mathbb{C}^*$, 13
- S^2 , 13
- $C(E)$, 14
- $d(z, w)$, 14
- γ^* , 18
- $L(\gamma)$, 22
- $\int_{\gamma} h \, ds$, 23
- $\Delta_{\gamma} \arg$, 26
- $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$, 27
- $\operatorname{Int}(\gamma)$, 30
- $\operatorname{Ext}(\gamma)$, 30
- $\operatorname{gr}(P)$, 46
- $\limsup$, 59
- $H(U)$, 67
- $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, 75
- $\frac{\partial}{\partial z}$, 75
- $\partial, \bar{\partial}$, 75
- $\int_{\gamma} f(z) \, dz$, 96, 97
- $B(a, r)$, 105, 273
- ds , 124
- dA , 124
- dV , 124
- $\Delta\phi$, 140
- $d^*\phi$, 141
- Δf , 142
- dm , 149
- $\operatorname{spt}(f)$, 151
- $\mathcal{Z}(f)$, 163
- $m(f, a)$, 163
- $D'(a, \varepsilon)$, 179
- $D'_{\varepsilon}(a)$, 179
- $C(a, R_2, R_1)$, 185
- $\operatorname{Res}(f, a)$, 191
- $\operatorname{Res}(f, \infty)$, 199
- $d_H(E, F)$, 205
- v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$, 212
- $\Gamma_1 \approx \Gamma_2(U)$, 229
- $H^1(U)$, 247
- $H^1(U)^*$, 248
- $C^r(U)$, 271
- $C_c^r(U)$, 271
- $L_{\operatorname{loc}}^1(U)$, 271
- $L_c^p(U)$, 271
- $S(a, r)$, 273, 274
- $\mathbb{B}$, 273
- $\mathbb{S}$, 273
- $d\sigma$, 273
- c_n , 273
- $G(x)$, 278

G_U , 291	$K_p(z, w)$, 529
P_U , 291	$M(\tau)$, 538
H_U , 293	$n_f(r)$, 539
$G_{\mathbb{D}}$, 294	$\mathbb{C}[z]$, 545
$P_{\mathbb{D}}$, 294	$\mathbb{C}[[z]]$, 546
P_r , 297	$I(Z)$, 547
$A(\mathbb{D})$, 299, 492	$Z(I)$, 550
$A(\mathbb{T})$, 299, 491	$\ f\ _1$, 558
$H_{\mathbb{D}}$, 305	$\ f\ _2$, 558
$\text{spt}(\mu)$, 307	$L^1(E)$, 558
$G(\mu)$, 307	$L^2(E)$, 558
$G_{\mathbb{B}}$, 330	$\widehat{f}(\xi)$, 558
$P_{\mathbb{B}}$, 330	$\widehat{f}(z)$, 559
$H_{\mathbb{B}}$, 334	$H^2(B_a)$, 559
$\text{Aut}(U)$, 359	L_a^2 , 559
$C(U)$, 433	$\ f\ _{2,a}^2$, 559
$d(f, g)$, 434	PW_τ , 568
$C(K)$, 458	$\mathcal{L}f$, 577
$\mathbf{1}_A$, 464	$C(f)$, 578
$C(\mu)$, 482	α_f , 579
$C_H(\phi)$, 487	β_f , 580
$E_p(z)$, 516	$H^2(\Pi)$, 588

Índex alfabètic

- abscissa de convergència, 579, 601
- abscissa de convergència absoluta, 580, 601
- àlgebra del disc, 299
- angle, 5
- angle de Stolz, 64
- angles orientats, 5
- antiderivada, 74
- aplicació anticonforme, 11, 72
- aplicació conforme, 10
- aplicació de Jowkowski, 393
- arc, 18
- arc analític, 361
- arc de corba, 17
- arc de Jordan, 18
- argument, 5
- argument principal, 5
- arrel n -èsima, 6
- arrel n -èsima primitiva, 6
- arrels n -èsimes de la unitat, 6
- automorfismes, 374
- automorfismes del disc unitat, 377
- barrera, 448
- càlcul de residus, 193
- cadena, 228
- cadenes homòlogues, 229
- camí, 19
- camp conservatiu, 103, 335
- camp diferenciable, 128
- camp estacionari, 99
- camp gradient, 103
- camp holomorf, 140
- camp newtonià, 261
- camp solenoïdal, 137, 335
- camp vectorial, 99
- canvi de parametrització, 21, 97
- carta local, 123
- cercle, 368
- cercles de Steiner, 385
- cicle, 229
- cicle homòleg a zero, 229
- circulació, 101
- circumferències d'Apol·loni, 385
- classe C^1 , 19
- classe C^1 a trossos, 19
- coeficient de Fourier, 572
- components connexes, 14
- condició de Blaschke, 534, 535
- condició local de Lipschitz, 319
- conjunt acotat de $C(U)$, 435
- conjunt de zeros, 163, 547
- constant d'Euler, 519
- convergència local uniforme, 420
- convergència uniforme sobre compactes, 421
- convolució, 592, 603
- corba, 17
- corba de Jordan, 18
- corba diferenciable, 19
- corba rectificable, 22
- corba regular, 19
- corba simple, 18
- corba tancada, 18

- corbes de nivell, 381
 corbes de Peano, 18
 corbes homòtopes, 250
 corbes integrals, 99
 corona, 185, 402
 creixement exponencial, 578
 criteri M de Weierstrass, 55
 criteri d'Abel, 57
 criteri de Dirichlet, 56

 derivada complexa, 66
 derivada logarítmica, 194
 desigualtat de Harnack, 431
 desigualtats de Cauchy, 173
 determinació de l'argument, 23, 24
 determinació de l'arrel m -èsima, 24
 determinació del logaritme, 48
 determinació principal de l'arrel
 quadrada, 7
 difeomorfisme anticonforme, 344
 difeomorfisme conforme, 344
 diferencial exterior, 133
 disc de convergència, 60
 disc unitat, 13
 distància de Hausdorff, 205
 domini, 14
 domini amb vora regular, 33
 domini amb vora regular a trossos,
 33
 domini n -connex, 16
 domini de Jordan, 30
 domini estrellat, 104
 domini simètric, 166
 domini simplement connex, 16, 230
 domini k -simplement connex, 138
 dominis conformement equivalents,
 358

 element de longitud, 22
 equació de Helmholtz, 273

 equació de Poisson, 263, 305, 322,
 527
 equació de continuïtat, 264
 equacions d'Euler, 265
 equacions de Cauchy-Riemann, 68
 equacions de Cauchy-Riemann no
 homogènies, 481, 486
 equacions en diferències, 604
 esfera de Riemann, 13
 espai de Paley-Wiener, 568
 exponent de convergència, 540
 exterior de γ , 30

 factors elementals de Weierstrass,
 516
 família equicontínua, 427
 família normal, 431
 família sumable, 53
 filtre, 598
 filtre discret, 605
 filtre estable, 598, 605
 fluid incompressible, 266
 fluid perfecte, 265
 flux, 126
 font, 410
 forma conjugada, 141
 1-forma diferencial, 102
 $(n - 1)$ -forma diferencial, 128
 2-forma diferencial, 127
 1-forma diferencial exacta, 104
 1-forma diferencial tancada, 134
 1-forma localment exacta, 105
 forma polar, 5
 fórmula d'inversió, 558
 fórmula de Cauchy-Green, 150, 237
 fórmula de descomposició de Riesz,
 281
 fórmula de Green, 110, 235
 fórmula de Jensen, 532
 fórmula de Poisson, 562, 565, 609
 fórmula de Schwarz-Christoffel, 394

-
- fórmula de suma parcial d'Abel, 56
 - fórmula integral de Cauchy, 151, 238
 - frontera analítica a trossos, 362
 - funció Γ d'Euler, 519
 - funció $\mathbb{C}$ -derivable, 66
 - funció σ de Weierstrass, 520
 - funció ζ de Riemann, 600
 - funció analítica, 81
 - funció analítica de variable real, 86
 - funció analítica de variables reals, 88
 - funció antiholomorfa, 357
 - funció causal, 576
 - funció comptadora, 539
 - funció de banda limitada, 567
 - funció de classe C^r , 85
 - funció de corrent, 410
 - funció de Green, 438, 598
 - funció de Heaviside, 602
 - funció de Koebe, 390
 - funció de transferència, 598, 605
 - funció entera, 67
 - funció exponencial, 46
 - funció harmònica, 140, 272, 466
 - funció harmònica conjugada, 141
 - funció holomorfa, 67
 - funció holomorfa a l'infinit, 197
 - funció inversament conforme, 357
 - funció localment lipschitziana, 319, 485
 - funció meromorfa, 181, 200, 469
 - funció potencial, 104, 410
 - funció subharmònica, 146, 286, 443
 - funció theta, 566
 - funcions de variable complexa, 88
 - funcions hiperbòliques, 51
 - funcions racionals, 45, 461
 - funcions trigonomètriques, 50
 - grup de connexió, 16
 - grup d'automorfismes, 359, 374
 - grup d'isotropia, 375
 - grup fonamental, 251
 - grup transitiu, 375
 - hipersuperfície orientable, 125
 - hipersuperfície regular amb vora, 125
 - homografia, 366
 - homotopia, 250
 - ideal, 546
 - ideal maximal, 551
 - ideal principal, 546
 - identitat d'Euler, 46
 - identitat de Parseval, 558
 - identitats de Green, 270
 - índex de γ respecte d'un punt, 27
 - integral de Cauchy, 482
 - integral de Dirichlet, 347
 - integral de línia, 102
 - integral de línia complexa, 96
 - integral respecte de l'element de longitud, 23
 - interior de γ , 30
 - interpolació, 522
 - interval de convergència, 86
 - inversió, 330, 367, 373
 - laplaciana, 140, 268
 - lema de Schwarz, 376
 - lema de Weyl, 317
 - lleis de Fourier, 260
 - lleis de Gauss, 262
 - límit superior, 59
 - línies de corrent, 410
 - logaritme, 47
 - longitud d'una corba, 22
 - mètode de Cauchy, 474
 - mètode de Perron, 348, 443
 - mètode dels residus, 478
 - mòdul, 2

- multiplicitat d'un pol, 180
 multiplicitat d'un zero, 163
- nombre de voltes, 27
 normal exterior, 36, 125
 nucli de Bergman, 491
 nucli de Cauchy, 151
 nucli de Herglotz, 304
 nucli de Poisson, 291, 562
- ordre d'un pol, 180
 ordre d'un zero, 163
 ordre d'una funció entera, 538
 orientació, 21
 orientació positiva, 36, 37
 orientacions compatibles, 125
- paràmetre arc, 22
 part antiholomorfa, 161
 part holomorfa, 161
 part imaginària, 1
 part principal, 188
 part real, 1
 part regular, 188
 pla complex, 13
 pla complex ampliat, 13
 pol, 180
 pol a l'infinit, 198
 polígon, 393
 polinomi, 44, 460, 546
 polinomi d'interpolació de Lagrange, 522
 polinomis exponencials, 587
 potències complexes, 49
 potencial complex, 410
 potencial de capa doble, 283
 potencial de capa simple, 282
 potencial de Green, 324
 potencial de Riesz, 279, 307
 potencial logarítmic, 280
 potencial newtonià, 262, 280
- potencial vector, 137
 primer grup d'homologia, 247
 primer grup d'homotopia, 251
 primer grup de cohomologia, 248
 primer teorema de Paley-Wiener, 560
 primera funció de Green, 291
 primitiva holomorfa, 74, 106
 principi de Dirichlet, 347
 principi de l'argument, 202, 241
 principi de prolongació analítica, 165
 principi de reflexió de Schwarz, 166
 principi de reflexió respecte de cercles, 373
 principi de simetria, 372
 principi de simetria per a funcions harmòniques, 331
 principi de simetria per a funcions holomorfes, 362
 principi del màxim, 171, 288
 principi del màxim per a funcions subharmòniques, 444
 problema de Dirichlet, 261, 287, 296, 342, 379
 problema de Dirichlet no homogeni, 322
 problema de Dirichlet per a l'operador $\bar{\partial}$, 496
 problema de Neumann, 261, 289, 304, 342, 379
 problema de Neumann no homogeni, 328
 producte canònic, 541
 producte de Blaschke, 537
 producte de Cauchy, 55
 producte escalar, 9
 producte infinit, 508
 projecció de Mercator transversa, 406
 projecció estereogràfica, 13

- propietat de la mitjana, 153, 274, 275
 punt de l'infinit, 13
 punt regular, 447
 quaternions, 8
 raó doble, 371
 radi de convergència, 60
 regió, 14
 regla d'antiderivació per parts, 74
 regla d'integració per parts, 108
 regla del canvi de variable, 75
 representació conforme, 358
 residu, 191
 residu de la derivada logarítmica, 194
 resposta-impuls, 598, 605
 rotacional, 131
 segon teorema de Paley-Wiener, 567
 segona funció de Green, 293
 semblances, 13
 sèrie absolutament convergent, 52
 sèrie convergent, 52
 sèrie de Dirichlet, 600
 sèrie de Fourier, 160, 161, 572
 sèrie de funcions, 55
 sèrie de Laurent, 184
 sèrie de potències, 58
 sèrie especial de Dirichlet, 600
 sèrie geomètrica, 59
 sèries dobles, 54
 sèries formals, 546
 simetria, 372
 singularitat aïllada, 180
 singularitat evitable, 180
 singularitat essencial, 181
 singularitat essencial a l'infinit, 198
 sinus cardinal, 573
 solució feble, 315, 484
 solució fonamental del laplacà, 278
 solució generalitzada, 593
 subvarietat amb vora, 31
 subvarietat regular amb vora, 123
 subvarietat regular amb vora orientable, 125
 successió d'interpolació, 574
 successió de mostreig estable, 574
 successió exhaustiva de compactes, 16
 successió uniformement acotada, 426
 superfície, 125
 suport, 151
 suport d'una mesura, 307
 teorema d'Abel, 64
 teorema de Borel, 544
 teorema de Carathéodory, 361
 teorema de Carleson, 559, 572
 teorema de Casorati-Weierstrass, 182
 teorema de Cauchy, 118, 231
 teorema de Cauchy per a formes diferencials, 242
 teorema de Cauchy-Goursat, 119
 teorema de de Rham, 248
 teorema de Hadamard, 541, 542
 teorema de Helmholtz, 339
 teorema de Hurwitz, 424
 teorema de l'aplicació oberta, 171
 teorema de la corba de Jordan, 30
 teorema de la divergència, 129
 teorema de Liouville, 72, 173
 teorema de Liouville per a funcions harmòniques, 276
 teorema de Mittag-Leffler, 469
 teorema de Montel, 430
 teorema de Morera, 156
 teorema de Parseval, 559

- teorema de Phragmen-Lindelöf, 568
- teorema de Rouché, 203
- teorema de Runge, 461, 463
- teorema de Schoenflies, 32
- teorema de Shannon-Whittaker, 574
- teorema de Stokes per a 1-formes, 133
- teorema de Šura-Bura, 463
- teorema de Weierstrass, 421, 517
- teorema del rotacional, 132
- teorema dels residus, 191, 240
- teorema fonamental de l'àlgebra, 174
- teorema fonamental de la representació conforme, 359, 436
- teorema fonamental del càlcul complex, 106
- trajectòries, 99
- transformació de Fourier complexa, 559
- transformada de Fourier, 558
- transformada de Laplace, 577
- transformada de Poisson, 297
- translació de pols, 460
- valor principal de Cauchy, 212
- variació de l'argument, 26
- 1-varietat, 31
- versió homològica de la fórmula de Cauchy-Green, 237
- versió homològica de la fórmula de Green, 235
- versió homològica del principi de l'argument, 241
- versió homològica del teorema dels residus, 240
- versió homològica del teorema de Cauchy, 231
- vorticitat, 266
- Z-transformada, 603

